Zeitschrift: Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel

Band: 18 (1889-1890)

Artikel: Recherche des points d'inflexion des courbes avec les coordonnées polaires

Autor: Isely, J.-P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88285

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Recherche des points d'inflexion des courbes avec les coordonnées polaires

PAR M. J.-P. ISELY, PROF.

Les ouvrages d'analyse s'occupent de la détermination des points d'inflexion au moyen des coordonnées rectilignes.

On sait que la condition d'inflexion est donnée par l'égalité de la dérivée seconde avec zéro. Otto Hesse a démontré à l'égard des points d'inflexion les théorèmes suivants :

1° Les points d'inflexion d'une courbe algébrique du degré n sont situés sur une seconde courbe algébrique du degré $3\,(n-2)$.

2° Une courbe algébrique du degré n, dont les coefficients demeurent indéterminés, a $3\,n\,(n-2)$ points d'inflexion.

Les courbes du second degré n'en ont pas, ce qui est connu. Une courbe du troisième degré a en général 9 points d'inflexion, réels ou imaginaires.

Il arrive souvent que l'équation d'une courbe est exprimée en coordonnées polaires plus simplement qu'en coordonnées rectilignes, ce qui provient de son mode de génération. Cela arrive entre autres pour la conchoïde de Nicomède. Quand on écrit son équation en coordonnées de Descartes, et que l'on calcule ses dérivées, on obtient des fonctions explicites assez compliquées, tandis qu'en coordonnées polaires elles sont plus simples. Mais dans ce dernier cas, que devient la condition $\frac{d^2y}{dx^2}=0$?

Pour le savoir, il faut d'abord remplacer la fonction $\frac{d^2y}{dx^2}$ par $\frac{d^2y\,dx-dy\,d^2x}{dx^3}$ qui convient au cas où l'on change de variable indépendante.

Il faut ensuite remplacer x et y par leurs valeurs en coordonnées polaires, à savoir :

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

r est le rayon recteur et θ l'argument ou l'angle. On a

$$dx=-r\sin\theta d\theta+\cos\theta dr;\quad dy=r\cos\theta d\theta+\sin\theta dr$$

$$d^2x=-r\cos\theta d\theta^2-2\sin\theta d\theta dr+\cos\theta d^2r$$

$$d^2y=-r\sin\theta d\theta^2+2\cos\theta d\theta dr+\sin\theta d^2r.$$

En substituant ces valeurs dans $\frac{d^2y\,dx-dy\,d^2x}{dx^3}$ et en égalant à zéro, on obtient la formule suivante :

$$(1)\qquad r^2d\theta^2-rd^2r+2\,dr^2=0$$

Telle est la condition d'inflexion.

En l'appliquant à la conchoïde, dont l'équation est :

$$r=\frac{l}{\cos\theta}\pm b$$

on trouve :

$$dr=\frac{l\cos^2\theta d\theta}{\sin\theta};\quad d^2r=\frac{2l-l\cos^2\theta}{\cos^3\theta}$$

En mettant ces valeurs dans l'équation de condition (1), on trouve la formule :

$$(2)\qquad b^2\cos\theta\left\{\cos^3\theta\pm\frac{3l}{b}\cos^2\theta\mp\frac{2l}{b}\right\}=0$$

Les signes $\pm$ s'appliquent respectivement aux deux branches de la courbe.

On en tire d'abord :

$$\cos\theta = 0 \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{2}$$

ce qui se rapporte à l'asymptote.

Ensuite l'équation :

$$\cos^3\theta \pm \frac{3l}{b}\cos^2\theta \pm \frac{2l}{b} = 0$$

donne, si $b < l$, les valeurs de $\cos\theta < 1$ qui déterminent les points d'inflexion sur les deux branches de la courbe. C'est une équation du 3^me^ degré, qui se résout facilement en nombres quand on connaît les valeurs de l et de b.

La condition d'inflexion (1) peut être obtenue d'une seconde manière au moyen du rayon de courbure exprimé en coordonnées polaires.

Sa formule est :

$$\frac{(dr^2 + r^2 d\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 d\theta^2 - r d^2 r + 2 dr^2}$$

Or, au point d'inflexion, la courbe a trois points consécutifs en ligne droite, c'est-à-dire que son rayon de courbure est infini, autrement dit son dénominateur est zéro, ce qui donne de nouveau l'équation (1).