

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel  
**Herausgeber:** Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel  
**Band:** 20 (1891-1892)

**Artikel:** Application du principe de dualité à l'étude des trièdres  
**Autor:** Isely, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-88313>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# APPLICATION DU PRINCIPE DE DUALITÉ

à l'étude des trièdres

PAR L. ISELY, PROFESSEUR

(Lu à la séance du 26 novembre 1891.)

Les travaux de Poncelet, de Gergonne, de Plücker et de Chasles ont doté la géométrie de modes de transformation remarquables, permettant de passer d'une figure à une autre et de déduire d'une propriété de la première la propriété correspondante de la seconde. La méthode des polaires réciproques est l'un des plus féconds de ces modes.

Rappelons succinctement l'esprit de cette méthode, dans le plan et dans l'espace.

Si l'on considère, dans le plan d'une conique, une figure composée de droites  $a, b, c, \dots$  et de points  $A, B, C, \dots$  et que l'on construise d'une part les pôles  $A', B', C', \dots$  des droites  $a, b, c, \dots$  par rapport à cette conique; de l'autre, les polaires  $a', b', c', \dots$  par rapport à la même courbe, des points  $A, B, C, \dots$  la figure formée des points  $A', B', C', \dots$  et des droites  $a', b', c', \dots$  est la figure polaire de la proposée par rapport à la conique considérée, qui prend le nom de *directrice*.

Réciproquement, la première figure est la polaire de la seconde par rapport à la même directrice. C'est pourquoi les deux figures sont appelées *polaires réciproques*.

Dans ce mode de transformation, comme on le voit, les *points* d'une figure correspondent aux *droites* de l'autre, et *vice versa*.

La théorie des polaires réciproques permet de trouver un corrélatif à un théorème déjà connu, et, ainsi, de doubler l'étendue des connaissances acquises. Nous avons parlé ailleurs<sup>1</sup> du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit dans une conique qui a pour corrélatif le théorème de Brianchon sur l'hexagone circonscrit.

Pour polariser les figures de l'espace, on prend pour directrice une quadrique : à chaque *point* de l'une des figures il correspond alors un *plan* dans l'autre ; à une *droite* de la première correspond une *droite* de la seconde, chacune de ces droites étant à la fois le lieu des pôles des plans passant par l'autre et l'intersection des plans polaires des points de l'autre.

Le principe de dualité, tel que l'ont conçu Gergonne et Plücker, résulte de la généralisation de la méthode des polaires réciproques.

Faisons, en effet, abstraction de la directrice. Nous pourrions alors, selon ce qui précède, diviser les figures en deux classes de figures corrélatives. Des propriétés des figures de la première, nous déduirions les propriétés correspondantes de celles de la seconde, en changeant simplement, dans l'énoncé des définitions et des théorèmes, le mot *point* en mot *droite*, le mot *droite* en mot *point*, s'il s'agit du plan ; le mot *point* en mot *plan*, le mot *plan* en mot *point*, s'il

<sup>1</sup> *Bulletin de la Société des sciences naturelles de Neuchâtel*, tome XII, pages 534 et 535. Année 1882.

s'agit de l'espace. Dans ce dernier cas, le mot *droite* reste invariable.

C'est dans ce simple changement de mots que consiste le *principe de dualité*.

Quelques exemples élémentaires à l'appui. Nous placerons, selon l'usage généralement admis, les propositions corrélatives en regard l'une de l'autre sur deux colonnes distinctes.

Dans le plan :

Deux *points* déterminent une *droite*. (Droite de jonction.)

Deux *droites* déterminent un *point*. (Point d'intersection.)

Dans l'espace :

Une *droite* et un *point*, pris hors de la droite, déterminent un *plan*.

Une *droite* et un *plan*, ne passant pas par la droite, déterminent un *point*.

Trois *points*, non en ligne droite, déterminent un *plan*.

Trois *plans*, ne passant pas par une droite, déterminent un *point*.

La *sécante commune* à deux *droites*, menée par un *point*, est la *droite* d'intersection des *plans*, que ces *droites* et le *point* déterminent.

La *sécante commune* à deux *droites*, située dans un *plan*, est la *droite* de jonction des *points*, que ces *droites* et le *plan* déterminent.

Ce principe, dont les géomètres contemporains font un usage constant dans leurs recherches transcendantales, pourrait, selon nous, rendre de nombreux et d'importants services dans le domaine de la géométrie élémentaire. En établissant une corrélation nettement définie entre les figures planes et les figu-

res dans l'espace, il contribuerait à combler le fossé qui sépare, de nos jours encore, les deux parties de cette science. Nous avons montré, dans une communication antérieure<sup>1</sup>, comment, grâce à la notion de l'infini, les triangles sphériques et les triangles rectilignes ne forment qu'une seule espèce de figures, et comment on peut passer des formules relatives aux uns à celles concernant les autres. Le principe de dualité, ajouté à cette notion de l'infini, rendrait encore plus intimes les liens qui unissent les deux sortes de formes géométriques. Il servirait, pour ainsi dire, de trait d'union entre les angles polyèdres et les polygones en général, entre les trièdres et les triangles en particulier.

Considérons, en effet, un certain nombre de points, situés dans le même plan. A ces points correspondent, par le principe de dualité, des plans en nombre égal et passant par le même point.

Les polygones plans et les angles solides sont donc des formes corrélatives : au plan des uns correspond le sommet des autres ; aux sommets correspondent les plans des faces ; aux côtés, les arêtes.

Le triangle a pour figure corrélative le trièdre. D'une part, trois points, situés dans un plan ; de l'autre, trois plans, passant par un point. Aux trois côtés, qui joignent ces points, s'opposent les trois droites, suivant lesquelles ces plans se coupent, soit les arêtes de l'angle trièdre.

Cette corrélation explique un fait qui frappe les élèves, lorsqu'ils étudient les propriétés des trièdres :

<sup>1</sup> *Bulletin de la Société des sciences naturelles de Neuchâtel*, tome XIII, pages 230-241. Année 1883.

la grande analogie qui existe entre les propositions qui s'y rapportent et celles qui s'appliquent aux triangles.

Bornons-nous à en rappeler quelques-unes :

Lorsqu'un triangle a 2 côtés égaux (triangle isoscèle), les angles opposés à ces côtés sont égaux, et réciproquement.

Dans un triangle, au plus grand côté est opposé le plus grand angle, et réciproquement.

Si les trois côtés d'un triangle sont égaux (triangle équilatéral), les trois angles sont aussi égaux (triangle équiangle), et réciproquement.

2 triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

2 triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

2 triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

Lorsque deux dièdres d'un trièdre sont égaux, les faces opposées à ces dièdres sont égales, et réciproquement.

Dans un trièdre, au plus grand dièdre est opposée la plus grande face, et réciproquement.

Si les trois dièdres d'un trièdre sont égaux, les trois faces sont aussi égales, et réciproquement.

2 trièdres sont égaux (ou symétriques) lorsqu'ils ont leurs dièdres égaux chacun à chacun.

2 trièdres sont égaux (ou symétriques) lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun.

2 trièdres sont égaux (ou symétriques) lorsqu'ils ont un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune.

etc.

Il nous a paru naturel, dans la comparaison que nous venons de faire, de regarder comme éléments corrélatifs les côtés du triangle et les angles dièdres du trièdre. Les premiers, en effet, mesurent les distances des sommets de la figure plane ; les seconds, les espaces compris entre les faces correspondantes du trièdre. Du reste, on sait que « s'il existe, entre les distances des points d'une figure plane quelconque, une relation métrique projective, la même relation aura lieu aussi entre les sinus des angles dièdres formés par les plans polaires respectifs de ces points, plans qui convergent en un même point, et réciproquement <sup>1</sup>. »

Le principe de dualité établit donc un lien remarquable entre le plan et l'espace. Les angles solides, envisagés par les anciens comme des formes spéciales et distinctes, deviennent dans la géométrie contemporaine les figures corrélatives des polygones plans, et l'étude des uns se rattache à celle des autres. Ainsi tombe en grande partie la distinction que l'on se plaisait à faire entre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace ; les méthodes se généralisent et les démonstrations se simplifient. Les mathématiques ne peuvent qu'y gagner, car, comme le disait Poincaré, « il n'y a qu'une manière d'avancer les sciences, c'est de les simplifier, ou d'y ajouter quelque chose de nouveau. »

<sup>1</sup> Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*. Tome II, pages 112 et 113.

