Zeitschrift: Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel
Herausgeber: Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel
Band: 24 (1895-1896)

Artikel: La géométrie non-euclidienne
Autor: Isely, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88386

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Séance du 9 janvier 1896

LA GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

PAR L. ISELY, PROFESSEUR

Cette appellation, introduite par Gauss dans les mathématiques, pourrait s'appliquer à toutes les questions qui ne se trouvent pas directement traitées dans les *Eléments* de l'illustre géomètre grec. Telles seraient, malgré les suppositions de Chasles sur le traité perdu des *Porismes,* la théorie de l'involution, celle de l'homologie et de l'homographie, le principe de continuité, et surtout celui des polaires réciproques ou de dualité, le plus beau fleuron de la géométrie du XIXme siècle. On y pourrait aussi faire rentrer la notion si féconde de l'infini, qui permet, entre autres, en considérant le plan comme une sphère de rayon infini, de déduire la trigonométrie rectiligne de la trigonométrie sphérique, dont elle n'est qu'un cas particulier. Mais tel n'est pas le sens donné par les géomètres contemporains à l'expression de géométrie non-euclidienne. Ils comprennent sous ce titre un certain nombre de considérations relatives à la théorie des parallèles et aux questions connexes. On sait que dans la géométrie euclidienne cette théorie repose sur l'axiome XI, improprement connu sous le nom de *postulatum*. Celui-ci s'énonce généralement comme il suit: « Si deux droites font avec une sécante deux angles internes d'un même côté, dont la somme est

inférieure à deux droits, ces lignes, prolongées suffisamment, se rencontreront »; ou, ce qui revient au même: « Par un point donné, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite. »

Bien des géomètres, depuis Proclus, ont tenté de démontrer *a priori* l'axiome XI (ou 5me postulat) d'Euclide. Il convient de mentionner sous ce rapport les recherches de Nassir-ed-Din, astronome arabe du XIIIme siècle; de John Wallis, l'habile mathématicien anglais, qui, dans un cours public fait à Oxford le 11 juillet 1663, captiva l'attention de ses auditeurs par une démonstration ingénieuse et subtile de cet axiome. Saccheri (1733), que quelques-uns considèrent comme le précurseur de Lobatschewsky, et Lambert, dans un ouvrage posthume paru en 1786, donnèrent une grande extension à la théorie des parallèles et s'occupèrent d'une façon toute spéciale de la validité du postulatum euclidien[1]. Tout dernièrement encore, a paru une démonstration assez concluante de prime abord, due à M. Frolov, membre de la Société mathématique de France.

Ces démonstrations reviennent, en général, à admettre que la droite n'a qu'un point réel à l'infini, hypothèse qui n'est qu'une simple conséquence de l'axiome XI. L'on tourne ainsi dans un cercle vicieux. « Il faut, dit Hoüel, reléguer parmi les chimères l'espoir que nourrissent encore tant de géomètres de parvenir à démontrer le postulat d'Euclide autrement que *par l'expérience*. Désormais, ces tentatives devront

[1] Pour les détails, consulter l'ouvrage très complet et très intéressant de MM Engel et Stäckel, intitulé: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Leipzig, 1895, ainsi que *The History of modern Mathematics*, de M. D.-E. Smith, New-York, 1896.

être mises au même rang que la quadrature du cercle et le mouvement perpétuel. »

Le but des non-Euclidiens est de prouver, en opposition à l'axiome XI, qu'il n'existe *a priori* aucune raison d'affirmer qu'on ne puisse mener, par un même point, qu'une seule droite ne rencontrant pas une droite donnée dans le même plan. D'illustres géomètres ont fait des recherches dans ce sens. Après avoir reconnu dans la première édition de ses *Eléments*, publiée en 1794, que l'axiome XI équivaut au théorème qui dit que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, Legendre prouve dans des éditions ultérieures que cette somme ne peut surpasser deux droits et que, si dans un triangle quelconque elle vaut deux droits, il en est de même dans tous les triangles (1833). Par contre, il éprouve quelque difficulté à démontrer qu'elle ne peut être inférieure à deux droits.

La théorie des parallèles avait aussi été, pendant plus d'un demi-siècle, l'objet des méditations de Gauss, comme cela ressort de plusieurs passages de sa correspondance avec Schumacher. Le 17 mai 1831, il écrivait : « Depuis quelques semaines, j'ai commencé à mettre par écrit quelques résultats de mes propres méditations sur ce sujet, qui remontent en partie à quarante ans, et dont je n'avais jamais rien rédigé, ce qui m'a forcé trois ou quatre fois à recommencer tout le travail dans ma tête. Je ne voudrais pourtant pas que tout cela périt avec moi ![1] » Hoüel, en 1867, fait suivre sa traduction de cette lettre d'une remarque conçue en ces termes : « En parcourant la table des

[1] *Ich wünschte doch, dass es nicht mit mir unterginge.*

matières que doit contenir le quatrième volume de l'édition des *Œuvres* de Gauss, publiée en ce moment par l'Académie de Gœttingue, nous n'avons vu annoncer aucun article qui parût se rapporter au projet annoncé ici par le grand géomètre. Il serait bien regrettable que ces recherches si profondes et si originales *eussent péri avec lui!* » M. Stäckel, en 1895, ne peut que confirmer cette remarque. Ainsi, malheureusement pour la géométrie, Gauss ne donna aucune suite à son projet, et, à l'exception de quelques notes éparses çà et là, entre autres dans les *Gelehrte Anzeigen* de Gœttingue, tout a péri avec lui. Le 28 novembre 1846, il écrit encore : « J'ai eu dernièrement occasion de relire l'opuscule de Lobatschewsky, intitulé *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien,* Berlin, 1840. Cet opuscule contient les éléments de la géométrie qui devrait exister si la géométrie euclidienne n'était pas vraie. Un certain Schweikardt[1] a donné à cette géométrie le nom de géométrie *astrale,* Lobatschewsky, celui de géométrie *imaginaire.* Vous savez que, depuis cinquante-quatre ans (depuis 1792), je partage les mêmes convictions, sans parler ici de certains développements qu'ont reçus, depuis, mes idées sur ce sujet. Je n'ai donc trouvé dans l'ouvrage de Lobatschewsky aucun fait nouveau pour moi; mais l'exposition est toute différente de celle que j'avais projetée, et l'auteur a traité la matière de main de maître et avec le véritable esprit géométrique. Je crois devoir appeler votre attention sur ce livre, dont la lecture ne peut manquer de vous causer le plus vif plaisir. »

[1] Autrefois à Marbourg, maintenant professeur de jurisprudence à Königsberg. (Note de Gauss.)

Lobatschewsky (né à Nijni-Nowgorod en 1793, mort à Kazan en 1856) est le géomètre dont les travaux ont le plus contribué à répandre dans le monde savant les idées non-euclidiennes.

Son premier essai sur les fondements de la géométrie, comme il le dit lui-même, parut en langue russe dans le *Courrier de Kazan,* pour l'année 1829. Dans ce travail, Lobatschewsky montre la possibilité de concevoir une géométrie indépendante de l'axiome d'Euclide. Il continua à exposer les résultats de ses recherches sur ce sujet dans les *Mémoires de l'Université de Kazan,* années 1836-1838, sous le titre de *Nouveaux principes de géométrie, avec une théorie complète des parallèles.* En 1837, il fit insérer dans le *Journal de Crelle* (tome 17, page 295) un article, la *Géométrie imaginaire,* qui contient un extrait des mémoires précédents. En 1840, il publia à Berlin une sorte de résumé de ses principaux travaux, sous le titre déjà cité de *Recherches géométriques sur la théorie des parallèles* (in-18, 61 pages). Une traduction française, faite par Hoüel, parut en 1866. Enfin, en 1855, Lobatschewsky mit le couronnement à son œuvre par la publication de sa *Pangéométrie,* qui parut simultanément en français et en russe.

Dans ses *Recherches géométriques sur la théorie des parallèles,* Lobatschewsky commence par rappeler succinctement une quinzaine de propositions connues et faciles à démontrer. Il s'applique tout spécialement à donner une définition scientifique de la ligne droite. « La définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des parallèles, sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale de la géométrie élémentaire. » C'est de cette manière que s'exprimait d'Alembert, en 1759,

dans ses *Mélanges de Littérature, d'Histoire et de Philosophie*. Lobatschewsky considère la droite comme une ligne qui se superpose à elle-même dans toutes ses positions. « J'entends par là, ajoute-t-il, que, si l'on fait tourner autour de deux points de la ligne droite la surface qui la contient, cette ligne ne change pas de place. » — Plus tard, dans sa *Pangéométrie*, il définira le plan et la droite de la manière suivante : « Je définis le plan comme le lieu géométrique des intersections de sphères égales décrites autour de deux points fixes comme centres. Enfin, je définis la ligne droite comme le lieu géométrique des intersections de cercles égaux situés tous dans un même plan et décrits de deux points fixes de ce plan comme centres. » Lobatschewsky, il fallait s'y attendre, eut de nombreux adversaires, et en a encore beaucoup aujourd'hui. L'un de ces derniers, M. A. Karagiannides, fait observer qu'en parlant du plan et de la droite, Lobatschewsky emploie à tout propos les mots point, lieu géométrique, sphère et cercle, sans en donner de définition. « Il se place ainsi sans le savoir sur sol euclidien, et érige là-dessus une géométrie non-euclidienne ! [1] »

Lobatschewsky fait suivre les quinze propositions qu'il suppose connues de ses lecteurs d'une définition des parallèles, plus générale que la définition ordinaire, et se réduisant à celle-ci lorsqu'on admet l'axiome XI d'Euclide. « Toutes les droites tracées par un même point dans un plan, dit-il, peuvent se distribuer, par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux

[1] *Die nichteuklidische Geometrie vom Alterthum bis zur Gegenwart*, Berlin, 1893, page 22.

classes, savoir : en droites *qui coupent* la droite donnée, et en droites *qui ne la coupent pas*. La droite qui forme la *limite* commune de ces deux classes est dite *parallèle* à la droite donnée.

Soit abaissée du point A (la figure est facile à construire), sur la droite BC, la perpendiculaire AD, et soit élevée au point A, sur la droite AD, la perpendiculaire AE. Dans l'angle droit EAD, il arrivera ou que toutes les droites partant du point A rencontreront la droite CD, comme le fait AF, par exemple ; ou bien que quelques-unes d'entre elles, comme la perpendiculaire AE, ne rencontreront pas DC. Dans l'incertitude si la perpendiculaire AE est la seule droite qui ne rencontre pas DC, nous admettrons la possibilité qu'il existe encore d'autres lignes, telles que AG, qui ne coupent pas DC, quelque loin qu'on les prolonge. En passant des lignes AF, qui coupent CD, aux lignes AG, qui ne coupent pas CD, on trouvera nécessairement une ligne-limite AH, d'un côté de laquelle les lignes AG ne rencontrent aucune la ligne DC, tandis que, de l'autre côté, toutes les lignes AF rencontrent DC. L'angle HAD, compris entre la parallèle HA et la perpendiculaire AD, sera dit *l'angle de parallélisme*, et nous le désignerons par $\Pi(p)$, p représentant la distance AD. » Cet angle joue un rôle important dans la géométrie de Lobatschewsky.

L'auteur prouve un peu plus loin, ce que Legendre avait déjà fait, que dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles ne peut surpasser deux droits Il déduit de là que deux hypothèses sont possibles : ou bien, la somme des angles est égale à deux droits dans tous les triangles rectilignes, et alors l'angle de parallélisme $\Pi(p)$ est égal à $^1/_2\,\pi$, quelle que soit la

distance p ; ou bien, cette somme est moindre que deux droits dans tous les triangles, en même temps que $\Pi(p)$ est inférieur à $^1/_2\,\pi$.

« La première hypothèse, ajoute Lobatschewsky, sert de fondement à la *Géométrie ordinaire* et à la *Trigonométrie plane*. La seconde hypothèse peut être également admise, sans conduire à aucune espèce de contradiction dans les résultats, et elle est la base d'une nouvelle théorie géométrique, à laquelle j'ai donné le nom de *Géométrie imaginaire*. » C'est la *Géométrie non-euclidienne* de Gauss.

Plus loin encore, Lobatschewsky substitue à la droite et au plan une *courbe-limite* (horicycle) et une *surface-limite* (horisphère). La courbe-limite est une ligne plane telle que toutes les perpendiculaires élevées sur les milieux de ses cordes sont parallèles entre elles (dans l'acception généralisée du mot parallèle). Une circonférence, dont le rayon devient infiniment grand, se transforme en une courbe-limite. De là le nom *d'horicycle* que l'on peut donner à cette courbe. La surface-limite, engendrée par la révolution de la courbe-limite autour d'un de ses axes, peut aussi être remplacée par une sphère dont le rayon croît indéfiniment, *l'horisphère*. Lobatschewsky démontre qu'alors la somme des angles dièdres d'un trièdre dont les arêtes sont *parallèles*, est égale à deux angles droits. Il en résulte naturellement que dans les triangles sphériques, tracés sur l'horisphère, il existe entre les côtés et les angles les mêmes relations qu'entre les éléments correspondants des triangles rectilignes. Aussi, est-ce par de nombreuses et intéressantes applications à la trigonométrie que se termine le mémoire du géomètre russe sur la théorie des parallèles.

Un autre ouvrage, qui contribua pour une large part à la diffusion des idées non-euclidiennes, est celui de Jean Bolyai, capitaine au Corps du Génie dans l'armée autrichienne. Son père, Wolfgang Bolyai (1775-1856), de Bolya en Transylvanie, avait été l'ami et le condisciple de Gauss durant son séjour à Gœttingue. Il engagea fortement son fils à s'occuper de la théorie des parallèles et à l'approfondir. Celui-ci, dont l'intelligence était très éveillée, ne manqua pas de suivre les conseils paternels. A vingt et un ans déjà (c'était le 3 novembre 1823, et il était né en 1802), il mandait à son père ce qui suit : « Je me suis décidé, aussitôt que les choses seront en ordre, à publier un travail sur les parallèles. Tout n'est pas encore définitif, mais le chemin que je me suis tracé me conduira certainement au but, si toutefois ce but est réalisable. Il n'est pas encore atteint, mais j'ai amené au jour des faits qui ne laissent pas que de me surprendre. Il serait à toujours regrettable que ces faits vinssent à se perdre. Tout ce que je puis dire, c'est qu'avec rien j'ai créé un monde nouveau. » Cet enthousiasme tout juvénile est compréhensible et pardonnable, étant donnés la grandeur et le désintéressement de la cause qui le provoquait. Ne rappelle-t-il pas en quelque sorte celui que Pascal dut éprouver en découvrant, à peine âgé de seize ans, son fameux théorème de l'hexagone inscrit, qui sert encore de base à toute la théorie des coniques ? La joie que la science procure est l'une des plus pures et des plus saines que l'on puisse goûter.

C'est dans un appendice d'un traité de mathémati-

ques [1], publié par son père en 1832, que Jean Bolyai exposa en une trentaine de pages ses idées sur la nouvelle géométrie. Cet appendice, intitulé : *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens :* a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem ; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore Johanne Bolyai de eadem, Geometrarum in Exercitu Cæsareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo, a été traduit en français par Hoüel, en 1867. Dans ce mémoire, Bolyai considère deux systèmes de géométrie : l'un, le système Σ, reposant sur l'hypothèse de la vérité de l'axiome XI d'Euclide ; l'autre le système S, sur l'hypothèse de sa fausseté. Après une série de considérations, il arrive alors aux conclusions suivantes [2] :

I. Est-ce le système Σ ou le système S qui a lieu dans la réalité ? — C'est ce qu'on ne saurait décider.

II. Toutes les hypothèses tirées de la *fausseté* de l'axiome XI (en se plaçant au point de vue non-euclidien) sont *absolument vraies* et, en ce sens, ne s'appuient sur aucune hypothèse. Il y a donc une *Trigonométrie plane* a priori *dans laquelle le système seul vrai reste inconnu.* La *Trigonométrie sphérique,* au contraire, s'établit d'une manière absolue, indépendamment de l'axiome XI.

Dans sa dernière conclusion, la cinquième, Bolyai insiste sur le fait que, dans le cas où c'est le système S, et non le système Σ, qui a réellement lieu, il est

[1] *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi.* Cum appendici triplici. Maros Vásárhely, in 8°,

[2] *Appendix.* § 33.

possible de construire une figure rectiligne équivalente à un cercle. Le problème de la quadrature du cercle est donc résoluble dans ce système.

Jean Bolyai mourut en 1860, quatre ans seulement après son père. Celui-ci avait ajouté quelques remarques au mémoire de son fils, desquelles nous détachons principalement ce qui suit [1] :

« Les formules de la *Trigonométrie sphérique* (démontrées dans le Mémoire précédent, indépendamment de l'axiome XI d'Euclide) coïncident avec celles de la *Trigonométrie plane,* lorsque l'on considère (pour nous servir d'une façon de parler provisoire) les côtés d'un triangle *sphérique* comme *réels,* ceux d'un triangle *rectiligne* comme *imaginaires;* de sorte que, lorsqu'il s'agit des formules trigonométriques, on peut regarder le plan comme une sphère imaginaire, en prenant pour sphère réelle celle dans laquelle $\sin R = 1$.

« On démontre qu'il existe une certaine quantité i (dans le cas où l'axiome d'Euclide n'a pas lieu), telle que la quantité correspondante I est égale à la base e des logarithmes népériens. Dans ce cas, on établit encore les formules de la Trigonométrie plane, et de telle manière que les formules sont encore vraies pour le cas de la réalité de l'axiome en question, en prenant les limites des valeurs lorsque i tend vers l'infini. Ainsi le système euclidien est en quelque sorte la limite du système anti-euclidien, pour i convergeant vers l'infini. »

[1] *Tentamen,* t. II, p. 380 et suiv. Trad. Hoüel. Paris, Librairie A. Hermann.

Dans son *Kurzer Grundriss*, paru en 1851, Wolfgang Bolyai fait voir entre autres : « que dans la trigonométrie rectiligne comme dans la trigonométrie sphérique, les sinus des angles sont entre eux comme les sinus des côtés opposés, si ce n'est que, sur la sphère, les côtés sont réels, et que dans le plan on doit les considérer comme imaginaires, de même que si le plan était une sphère imaginaire.

« Si l'axiome XI n'est pas vrai, il existe un i déterminé, qu'il faut substituer dans les formules. Si, au contraire, cet axiome est vrai, il faudra faire dans les formules $i = \infty$. »

Les œuvres des deux Bolyai étant devenues extrêmement rares, l'Académie des Sciences de Hongrie en a entrepris dernièrement une réimpression. Espérons, avec M. Stäckel, que cette nouvelle édition verra bientôt le jour.

Disons enfin, en terminant, que les non-euclidiens conçoivent un espace dont le nôtre n'est, pour ainsi dire, qu'un cas particulier, et sur lequel nous reviendrons dans une prochaine communication. Nous aurons alors l'occasion de parler des remarquables travaux de Helmholtz, de Riemann, de Beltrami, de Klein, de Cayley, de Poincaré, dans le domaine de la géométrie non-euclidienne.