

# Solutions singulières des équations différentielles d'ordre supérieur

Autor(en): **Isely, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **35 (1907-1908)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-88539>

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SOLUTIONS SINGULIÈRES

## DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR L. ISELY, PROFESSEUR

---

Dans la séance du 5 janvier 1906, nous avons montré par de nombreux exemples comment l'emploi des discriminants facilite la recherche des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. Cette méthode si simple et si élégante est applicable aux équations d'un ordre quelconque.

Soit, en premier lieu, une équation différentielle du second ordre de la forme

$$f(x, y, y', y'') = 0.$$

Assimilons-la à une équation *algébrique* avec pour inconnue la dérivée seconde  $y''$ ; puis, exprimons que cette dernière équation admet une racine double en  $y''$ , en égalant son discriminant à zéro. On obtient ainsi la solution singulière de l'équation proposée sous forme d'une équation différentielle du premier ordre, dont l'intégrale générale, qui renferme une constante arbitraire, sera la forme *finie* de la solution singulière cherchée.

Un premier exemple à l'appui de cette méthode nous est fourni par l'équation déjà traitée par Lagrange<sup>1</sup>

$$y - x \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2} = \left( \frac{dy}{dx} - x \frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)^2.$$

L'intégrale *générale* de cette équation est

$$y = \frac{ax^2}{2} + bx + a^2 + b^2,$$

$a$  et  $b$  étant deux constantes arbitraires.

<sup>1</sup> *Sur les intégrales particulières des équations différentielles.* Mémoires de l'Académie royale de Berlin, année 1774.

Posons maintenant

$$\frac{dy}{dx} = y' \text{ et } \frac{d^2y}{dx^2} = y'';$$

puis ordonnons les termes suivant les puissances décroissantes de  $y''$ , prise pour inconnue.

$$2(1+x^2)y''^2 - x(x+4y')y'' + 2(y'^2 + xy' - y) = 0,$$

équation algébrique du second degré; en exprimant que  $y''$  en est une racine double, nous obtiendrons l'équation discriminante :

$$x^2(x+4y')^2 - 16(1+x^2)(y'^2 + xy' - y) = 0,$$

ou, après réductions,

$$y'^2 + x\left(1 + \frac{1}{2}x^2\right)y' - \frac{1}{16}x^4 - y(1+x^2) = 0.$$

La solution *singulière* de l'équation proposée est donc l'équation différentielle du premier ordre

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\left(1 + \frac{1}{2}x^2\right)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{16}x^4 - y(1+x^2) = 0.$$

Pour obtenir l'expression *finie* de la solution singulière, mettons cette équation sous la forme

$$\frac{8dy + 4xdx + 2x^3dx}{\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}} = 2dx\sqrt{1+x^2},$$

d'où, en intégrant de part et d'autre,

$$\sqrt{16y + 4x^2 + x^4} = x\sqrt{1+x^2} + L(x + \sqrt{1+x^2}) + C,$$

$L$  désignant, selon l'usage, un logarithme népérien, et  $C$  une constante arbitraire.

Remarquons, en passant, avec Lagrange que l'équation du premier ordre ci-dessus admet, outre l'intégrale générale précédente, une solution singulière, qui s'obtient immédiatement en égalant le discriminant du premier membre relatif à  $y'$  à zéro. Il vient ainsi :

$$x^2\left(1 + \frac{1}{2}x^2\right)^2 + \frac{1}{4}x^4 + 4y(1+x^2) = 0,$$

ou, en réduisant,

$$(1+x^2) \left( 4y + \frac{1}{4}x^4 + x^2 \right) = 0.$$

Le premier facteur donne les valeurs imaginaires

$$x = \pm i;$$

le second, seul admissible par conséquent, s'annule pour

$$y = -\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{4},$$

solution singulière de l'équation du premier ordre. Mais cette dernière intégrale ne satisfait pas à l'équation différentielle du second ordre primitive, comme on peut facilement s'en assurer.

La question 576 du *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal* (5<sup>me</sup> éd.), par Frenet, nous servira de second exemple.

Soit l'équation

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - y \frac{d^2y}{dx^2} = n \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + a^2 \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

ou, sous forme rationnelle,

$$(y'^2 - y y'')^2 = n^2 (y'^2 + a^2 y''^2).$$

Ordonnons-la suivant les puissances décroissantes de la dérivée seconde prise pour inconnue. L'équation algébrique du deuxième degré

$$(a^2 n^2 - y^2) y''^2 + 2 y y' y'' + y'^2 (n^2 - y'^2) = 0$$

admettra une racine double si

$$y^2 y'^4 - (a^2 n^2 - y^2) y'^2 (n^2 - y'^2) = 0,$$

ou bien, si

$$n^2 y'^2 (a^2 y'^2 + y^2 - a^2 n^2) = 0.$$

Le second facteur donne la solution singulière sous forme de l'équation différentielle du premier ordre

$$a^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + y^2 - a^2 n^2 = 0$$

à variables séparables, qui devient

$$dx = \frac{a dy}{\sqrt{a^2 n^2 - y^2}},$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$y = an \cdot \sin \frac{x + C}{a},$$

C désignant une constante arbitraire. C'est là l'expression *finie* de la solution singulière.

L'équation du premier ordre ci-dessus admet une solution singulière, qui résulte de l'évanouissement du discriminant de son premier membre relativement à  $y'$ , savoir :

$$y = \pm an.$$

Cette solution, contrairement au cas précédent, convient aussi à l'équation initiale.

Les équations du troisième ordre, ou d'un ordre plus élevé, se prêtent à des considérations analogues. Soit la suivante, où l'on a posé

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \quad \frac{d^3y}{dx^3} = y''',$$

$$f(x, y, y', y'', y''') = 0.$$

En exprimant que cette équation, considérée comme *algébrique*, admet une racine double en  $y'''$ , résultat obtenu par l'évanouissement du discriminant de son premier membre, la solution singulière se présentera généralement sous la forme d'une équation différentielle du second ordre; en intégrant celle-ci, on trouvera l'expression *finie* de la solution singulière de la proposée, où entreront deux constantes arbitraires.

Soit, par exemple, l'équation de la forme de celle de Lagrange traitée précédemment

$$y - \frac{x^3}{6} \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = \left( \frac{d^3y}{dx^3} \right)^2.$$

Elle a pour intégrale générale

$$y = \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + a^2,$$

$a, b, c$  étant trois constantes arbitraires.

Algébriquement, cette équation peut s'écrire

$$y'''' + \frac{x^3}{6} y''' - \frac{x^2}{2} y'' + xy' - y = 0.$$

Elle a pour équation discriminante

$$x^6 - 144 \left( xy' - \frac{x^2}{2} y'' - y \right) = 0,$$

solution singulière du second ordre, qui peut se mettre sous la forme

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = -\frac{x^6}{72},$$

équation linéaire à coefficients variables, type Euler, qui s'intègre en posant<sup>1</sup>

$$x = e^t,$$

ce qui la transforme en une équation linéaire à coefficients constants, savoir :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y = -\frac{e^{6t}}{72},$$

dont l'intégrale générale est

$$y = Ae^t + Be^{2t} - \frac{e^{6t}}{1440}.$$

La relation

$$e^t = x$$

donne enfin

$$y = x \left( A + Bx - \frac{x^5}{1440} \right),$$

A et B étant deux constantes arbitraires. C'est la solution singulière *finie* de l'équation proposée du troisième ordre.

En général, si l'équation différentielle est d'ordre  $n$ , on la regardera comme *algébrique* par rapport à la dérivée du même ordre. La solution singulière, sous forme *différentielle*, s'obtiendra alors immédiatement, si elle existe, par l'évanouissement du discriminant. Nous estimons superflu de multiplier les exemples.

<sup>1</sup> LEGENDRE. *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, 1787.

L'interprétation *géométrique* de cette méthode si simple et si élégante réside dans la théorie générale du contact des courbes planes.

On sait que la solution singulière d'une équation différentielle du premier ordre représente l'enveloppe des courbes définies par l'intégrale générale (*courbes intégrales*). Il s'ensuit qu'en un point quelconque  $(x, y)$  de l'enveloppe, celle-ci touche une des enveloppées, de sorte que, en ce point,  $x, y$  et  $y'$  sont les mêmes pour les deux courbes. En d'autres termes, les deux courbes ont à cet endroit un contact *du premier ordre*.

Voyons maintenant comment se comportent sous ce rapport les équations différentielles d'ordre supérieur au premier et leurs solutions. L'équation du second ordre

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

par exemple, admet une intégrale générale renfermant deux paramètres arbitraires. Cette intégrale, de la forme

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

représente donc une *famille* doublement infinie de lignes planes. Dans l'exemple traité en premier lieu, ces lignes sont des *paraboles*.

La solution singulière *finie*, ne contenant plus qu'une constante arbitraire, représente une simple infinité de lignes, algébriques ou transcendantes. Dans l'exemple précité, celles-ci appartiennent à la classe nombreuse et importante des *logarithmiques*, et ont elles-mêmes pour enveloppe la *quartique*

$$y = -\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{4}.$$

D'une manière générale, entre deux courbes correspondant à l'intégrale générale et à la solution singulière finie de l'équation du second ordre, il y aura un contact *du deuxième ordre* puisque, au point où elles se touchent, elles ont les mêmes valeurs de  $x, y, y'$  et  $y''$ . Il pourra aussi arriver que, si le résultat de l'élimination (discriminant) de  $y''$  entre l'équation différentielle du second ordre

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

et la relation

$$\frac{\partial f}{\partial y''} = 0$$

est l'équation différentielle du premier ordre

$$\varphi(x, y, y') = 0,$$

les intégrales de cette dernière, solutions singulières finies de la première, posséderont la propriété suivante : Par chaque point M d'une de ces courbes intégrales C, il passe une courbe intégrale de l'équation  $f = 0$ , ayant un rebroussement de seconde espèce en M et la tangente en ce point à la courbe C pour tangente de rebroussement<sup>1</sup>.

Plus généralement encore, la courbe que représente la solution singulière aura avec chacune de celles qui résultent de l'intégrale générale de l'équation proposée un contact d'un ordre marqué par le nombre de dérivées communes à la solution singulière et à chaque intégrale particulière<sup>2</sup>.

La théorie des solutions singulières s'étend aux *systèmes d'équations différentielles*, l'intégration d'un tel système se ramenant à celle d'une équation différentielle ordinaire. En particulier, un système de deux équations du premier ordre comprend le cas d'une seule équation différentielle du second ordre, et *vice versa*. Les discriminants facilitent de nouveau grandement la recherche des solutions singulières.

Soit, par exemple, le système traité par Legendre<sup>3</sup>

$$(y^2 - 2mx) \frac{dy}{dx} - m^2 \frac{dz}{dx} + 2my = 0,$$

$$z \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + y \frac{dy}{dx} \frac{dz}{dx} + 2m \frac{dz}{dx} = 0.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'',$$

puis éliminons la fonction  $z$  entre les deux équations ci-dessus ; il s'ensuit l'équation du second ordre en  $y$

$$(y'^3 - my'')(y^2 y' - mx y' + 2my) = 0.$$

En assimilant celle-ci à une équation algébrique quadra-

<sup>1</sup> GOURSAT. *Cours d'analyse mathématique*. II, p. 526, exerc. 5.

<sup>2</sup> LACROIX. *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. 2<sup>me</sup> éd., t. II, p. 468 et 469.

<sup>3</sup> *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, 1790. LACROIX. *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. 2<sup>me</sup> éd., II, p. 399-401.

tique en  $y''$ , dont le terme du second degré a pour coefficient zéro, l'évanouissement du discriminant conduira à la solution *singulière*

$$(y^2 - mx) y' + 2my = 0,$$

dont l'expression finie, obtenue par intégration, sera

$$3mx + y^2 = C\sqrt{y},$$

C étant une constante arbitraire. La valeur correspondante de  $z$  résultera de la relation

$$zy - x^2 = 0.$$

Ce système de solutions n'est pas compris dans celui des intégrales *générales*, qui renferme deux constantes arbitraires, et qui s'obtient en intégrant le premier facteur

$$y'^3 - my'' = 0,$$

ce qui donne

$$(y + C_1)^2 = 2m(C_2 - x),$$

d'où 
$$m^2 z + 2mx(y + 2C_1) + y(y + 2C_1)^2 = 0,$$

système intégral qui peut être mis sous la forme plus simple

$$\begin{aligned} mz + C_1' y + C_2' &= 0, \\ zy - 2C_1' x + C_1'^2 &= 0. \end{aligned}$$

Le système des solutions singulières, établi directement plus haut, se déduirait de ce dernier. On trouve, en effet, en dérivant la seconde de ces équations par rapport à  $C_1'$ ,

$$C_1' = x,$$

d'où

$$zy - x^2 = 0,$$

et, par suite,

$$3mx + y^2 = C\sqrt{y}.$$

Au point de vue géométrique, le système des intégrales générales, dépendant de deux paramètres arbitraires, représente dans l'espace ce qu'on appelle une *congruence* de courbes. Ce sont les *courbes intégrales* des équations différentielles simultanées proposées. Soient, pour fixer les idées,  $a$  et  $b$  ces paramètres arbitraires. Les courbes intégrales seront alors définies par deux expressions de la forme

$$(1) \quad F_1(x, y, z, a, b) = 0,$$

$$(2) \quad F_2(x, y, z, a, b) = 0.$$

Etablissons maintenant entre  $a$  et  $b$  une relation arbitraire, telle que  $b = \varphi(a)$ ; les courbes intégrales dépendront ainsi d'un seul paramètre variable  $a$ , et pourront dans certains cas admettre une enveloppe, c'est-à-dire être tangentes à une courbe  $C$ . Les coordonnées  $x, y, z$  d'un point de contact avec l'enveloppe devront alors vérifier les équations (1) et (2), ainsi que les deux suivantes :

$$(3) \quad \frac{\partial F_1}{\partial a} + \frac{\partial F_1}{\partial b} \frac{db}{da} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial F_2}{\partial a} + \frac{\partial F_2}{\partial b} \frac{db}{da} = 0.$$

Par l'élimination de  $x, y, z$  entre ces quatre équations, on sera conduit à une équation différentielle du premier ordre

$$(5) \quad \Phi \left( a, b, \frac{db}{da} \right) = 0,$$

d'un certain degré en  $\frac{db}{da}$ , qui permettra de déterminer la relation  $b = \varphi(a)$ . Les courbes de la congruence correspondantes engendrent alors une surface  $S$  et sont tangentes à une courbe  $C$  située sur  $S$ , que, par analogie avec d'autres considérations géométriques, nous appellerons l'*arête de rebroussement* de  $S$ .

Du degré de l'équation (5) en  $\frac{db}{da}$  dépendra le nombre des surfaces analogues à  $S$ . Toute courbe de la congruence touchera sur chacune d'elles l'arête de rebroussement correspondante en un point bien déterminé, qui a reçu le nom de *point focal* de cette courbe. Le lieu des points focaux est la *surface focale* de la congruence<sup>4</sup>; ce sera aussi le lieu des arêtes de rebroussement  $C$  des surfaces  $S$ , et, par conséquent, toutes les courbes de la congruence la toucheront. L'équation cartésienne de cette surface s'obtiendra en éliminant les paramètres  $a$  et  $b$  entre les trois relations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a} \frac{\partial F_2}{\partial b} - \frac{\partial F_1}{\partial b} \frac{\partial F_2}{\partial a} = 0.$$

<sup>4</sup> GOURSAT. *Cours d'analyse mathématique*, t. II, p. 521. — HUMBERT. *Cours d'analyse*, t. I, p. 373.

Des considérations qui précèdent, il ressort que les arêtes de rebroussement C sont aussi des courbes intégrales des équations différentielles proposées. En effet, en un point de C les valeurs de  $x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$  sont les mêmes pour C et pour

la courbe de la congruence tangente à C en ce point. Elles représenteront donc les solutions singulières, qui résulteront ainsi de l'intégration de l'équation du premier ordre (5)<sup>1</sup>.

Appliquons ces principes au système de Legendre traité plus haut.

Les équations de la congruence (*intégrale générale* du système) sont dans ce cas

$$\begin{aligned} mz + ay + b &= 0, \\ zy - 2ax + a^2 &= 0, \end{aligned}$$

$a$  et  $b$  désignant deux constantes arbitraires. L'équation de la surface focale de cette congruence s'obtiendra en éliminant  $a$  et  $b$  entre ces deux relations et la suivante

$$x - a = 0.$$

On tire de la dernière  $a = x$ ; en portant cette valeur dans la seconde, il vient

$$zy - x^2 = 0.$$

La surface focale, lieu des arêtes de rebroussement, est donc une *quadrique* dont il est aisé de déterminer la nature (cône du second degré ayant son sommet à l'origine). La différentiation de son équation donne

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \frac{dy}{dx},$$

et mettant cette valeur dans les équations différentielles proposées, on tirera également de l'une et de l'autre

$$(y^2 - mx) \frac{dy}{dx} + 2my = 0,$$

équation du premier ordre dont l'intégrale

$$3mx + y^2 = C\sqrt{y}$$

<sup>1</sup> GOURSAT. *Cours d'analyse mathématique*, t. II, p. 522.

constitue, conjointement avec l'équation de la surface focale, la *solution singulière* du système proposé. Nous l'avons obtenue, cette solution singulière, sans passer par l'intégrale générale. D'où, grande simplification.

Les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier sont aussi susceptibles de solutions singulières. L'emploi des discriminants facilite de nouveau notablement leur recherche. Preuve en est l'équation suivante, du second ordre, dont Poisson s'est occupé d'une façon toute spéciale<sup>1</sup>:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 - 2 \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{1+x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{1+x}\right)^2 y = 0,$$

qui devient en posant, selon l'usage,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r,$$

$$r^2 - 2qr \left(p - \frac{z}{1+x}\right) + \left(p - \frac{z}{1+x}\right)^2 y = 0.$$

Considérée comme *algébrique* en  $r$ , cette équation du second degré admet une racine double lorsque

$$q^2 \left(p - \frac{z}{1+x}\right)^2 - \left(p - \frac{z}{1+x}\right)^2 y = 0,$$

ou bien

$$\left(p - \frac{z}{1+x}\right) \left[ q^2 \left(p - \frac{z}{1+x}\right) - y \right] = 0.$$

Le premier facteur fournit immédiatement la solution singulière du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{1+x} = 0.$$

En séparant les variables et en intégrant, on trouve pour la solution singulière l'expression finie

$$z = (1+x) \varphi(y),$$

<sup>1</sup> *Journal de l'Ecole polytechnique*, XIII<sup>me</sup> cahier.

$\varphi(y)$  désignant une *fonction arbitraire* de  $y$ . Il est facile de s'assurer que cette relation vérifie bien l'équation primitive du second ordre. L'intégrale *générale* de cette dernière contient deux fonctions arbitraires; mais, développée en série, cette intégrale générale, comme la solution singulière, ne renferme *essentiellement* qu'une seule fonction arbitraire; ce qui doit avoir lieu, comme Poisson lui-même et plusieurs autres géomètres l'ont établi<sup>1</sup>, toutes les fois que l'équation proposée ne contient pas en même temps les dérivées de l'ordre le plus élevé par rapport à chaque variable.

Dans le cas plus général où l'équation proposée contient les dérivées partielles par rapport à chaque variable indépendante, par exemple celles du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t,$$

ou d'un ordre plus élevé encore, un échelonnement judicieux des discriminants, de tout point pareil à celui que nous avons utilisé pour les équations du premier ordre<sup>2</sup>, conduit également très simplement à la solution singulière, si toutefois celle-ci existe réellement.

<sup>1</sup> LACROIX. *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, 2<sup>m</sup>e éd., t. II, p. 641-643.

<sup>2</sup> L. ISELY. *Discriminants et solutions singulières*. (Bulletin de la Société neuch. des sc. nat., t. XXXIV.)