

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles  
**Band:** 35 (1907-1908)

**Artikel:** A propos de deux théorèmes de géométrie élémentaire  
**Autor:** Isely, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-88541>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# A PROPOS DE DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

PAR L. ISELY, PROFESSEUR

---

Les traditions sont vivaces. Elles engendrent le plus souvent la routine. C'est ainsi que certaines erreurs, plus ou moins manifestes, se transmettent inaltérées de génération en génération. Les fils apprennent les mêmes définitions vicieuses, les mêmes propositions incorrectes ou incomplètes qu'ont apprises leurs pères. Ne dit-on pas couramment de nos jours encore que la ligne droite est le *plus court chemin* d'un point à un autre ; que deux parallèles *ne se rencontrent point*, quelque loin qu'on les prolonge, etc.? Et cependant, que de progrès accomplis par la science géométrique depuis l'époque où Euclide en jetait les premières bases ! L'enseignement actuel semble les ignorer presque totalement.

Ouvrons, pour nous en convaincre, l'un des traités de géométrie les plus récents et les plus hardiment novateurs, celui de MM. Niewenglowski et Gérard. A la page 71 du tome premier (*Géométrie plane*), nous lisons l'énoncé suivant :

« Par trois points A, B, C, *non en ligne droite*, on peut faire passer une circonférence, et on n'en peut faire passer qu'une. »

La notion de l'*infini* enlève à cet énoncé son caractère restrictif, tout en lui laissant toute sa rigueur. Comme le fait fort justement remarquer M. L. Maillard dans ses *Eléments de géométrie*<sup>1</sup>, trop peu connus chez nous, si les trois points donnés sont en ligne droite, la circonférence qui passe par ces points se confond avec cette droite elle-même. L'illustre géomètre allemand A. Clebsch prête à cette conception de la droite, qui peut paraître quelque peu risquée, la grande autorité de son nom. « Une ligne droite, dit-il dans ses *Leçons sur la géométrie*, recueillies et complétées par F. Lindemann, forme, d'après notre définition du cercle, conjointement avec la droite de l'infini, un cercle (de rayon infiniment grand<sup>2</sup>). » La construction graphique, devenue classique et que con-

<sup>1</sup> Chez Attinger frères, éditeurs. Neuchâtel, 1893.

<sup>2</sup> Traduction française par A. Benoist. Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, Paris, 1879-1883. t. I, p. 190 (note).

naissent tous les élèves de nos établissements secondaires, le montre clairement si l'on admet, avec Desargues, que deux parallèles ont un point commun à l'infini. Ce point est le centre d'une circonférence de rayon infiniment grand, qui n'est autre que la droite sur laquelle se trouvent les points en question.

La géométrie analytique corrobore pleinement cette manière de voir. L'équation du cercle qui passe par les trois points *quelconques*  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , fournie par la *résultante* d'un système linéaire par rapport aux paramètres, peut abrégativement s'écrire comme il suit :

$$\begin{vmatrix} \varphi & x & y & 1 \\ \varphi_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \varphi_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \varphi_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

en posant symboliquement

$$\varphi(x, y) \equiv x^2 + 2xy \cos \theta + y^2,$$

si les axes sont obliques et que  $X O Y = \theta$ ; ou bien

$$\varphi(x, y) \equiv x^2 + y^2,$$

si les axes sont rectangulaires, ce que nous supposerons dans ce qui va suivre.

En développant le déterminant du quatrième ordre placé dans le premier membre suivant les éléments de la première colonne, l'équation ci-dessus deviendra

$$\varphi \cdot \Delta + \varphi_1 \cdot \Delta_1 + \varphi_2 \cdot \Delta_2 + \varphi_3 \cdot \Delta_3 = 0,$$

$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , étant les *premiers mineurs* du déterminant primitif auxquels on doit donner des signes alternativement positifs et négatifs.

Or, dans le cas particulier où les trois points considérés sont en ligne droite, on a la condition

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation du cercle perd alors le terme  $\varphi \cdot \Delta$ , et se réduit au premier degré en  $x$  et  $y$ . Elle représente donc une *ligne droite*. De plus, cette dernière est bien celle qui passe par les

points  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ , puisque son équation est vérifiée en  $y$  faisant simultanément

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0,$$

et que chacune de ces trois relations exprime que la droite en question contient deux des points donnés.

On aurait pu développer le même déterminant du quatrième ordre suivant les éléments de sa première ligne et mettre l'équation du cercle sous la forme

$$\varphi \cdot \Delta + x \cdot \Delta' + y \cdot \Delta'' + \Delta''' = 0,$$

en attribuant aux mineurs  $\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta'''$  des signes alternativement positifs et négatifs. Les coordonnées du centre résulteraient alors, *en observant les signes des mineurs*, des deux équations, obtenues en égalant à zéro les dérivées partielles du premier ordre par rapport à  $x$  et à  $y$ :

$$\begin{aligned} 2\Delta \cdot x + \Delta' &= 0, \\ 2\Delta \cdot y + \Delta'' &= 0; \end{aligned}$$

d'où l'on tire aisément

$$x = -\frac{\Delta'}{2\Delta}, \quad y = -\frac{\Delta''}{2\Delta}.$$

Pour  $\Delta = 0$ , ces valeurs deviennent infinies et, par suite, le centre du cercle est rejeté à l'infini. C'est le cas où, précisément, les trois points donnés sont en ligne droite. La circonférence qu'ils déterminent a donc alors un rayon infiniment grand.

Mais il y a plus. On sait que *tous* les cercles d'un même plan passent par les deux *points cycliques* imaginaires ou, selon la dénomination de Laguerre, par les *ombilics* de ce plan, situés sur la *droite de l'infini*. Il s'ensuit que celle-ci, caractérisée par l'équation en coordonnées homogènes  $z = 0$ , fait aussi partie intégrante de cette variété de la circonférence, la *droite-cercle*. L'hypothèse de Clebsch susmentionnée se trouve ainsi pleinement justifiée.

Il convient donc de substituer à l'énoncé ci-dessus le suivant :

« Par trois points *distincts* quelconques d'un plan, on peut toujours faire passer une circonférence, et on n'en peut faire passer qu'une. »

Nous insistons sur le vocable conditionnel *distincts* que nous soulignons. Si l'un des points en question *dépendait* d'une manière quelconque des deux autres, si par exemple  $(x_3, y_3)$  coïncidait avec  $(x_2, y_2)$ , il y aurait *indétermination*, en ce sens que par les trois points, ne formant en réalité qu'un groupe de deux points distincts, passeraient une infinité de cercles, constituant dans leur ensemble ce qu'on est convenu d'appeler un *faisceau de cercles*, ayant ces points pour *points de base*. Dans ce cas, en effet, les coordonnées du centre trouvées plus haut sont de la forme  $\frac{0}{0}$ ; il y a donc une infinité

de centres tous situés sur la perpendiculaire menée par le milieu de la distance des points de base. Parmi ces cercles, il faut tout spécialement distinguer la droite elle-même (cercle de rayon infiniment grand), leur *axe radical* commun, et les deux points (cercles de rayon infiniment petit) auxquels Poncelet a donné le nom de *points limites* du faisceau.

Dans l'espace à trois dimensions, les choses se passent exactement de même. A la proposition: « Par quatre points A, B, C, D, *non situés dans un même plan*, on peut faire passer une sphère, et on n'en peut faire passer qu'une », il conviendrait à l'avenir de substituer celle-ci, plus conforme à nos idées actuelles sur les êtres géométriques: « Par quatre points *distincts* quelconques de l'espace, on peut toujours faire passer une sphère, et on n'en peut faire passer qu'une ».

Les quatre points donnés sont les sommets d'un tétraèdre: le centre de la sphère circonscrite résulte de l'intersection des plans perpendiculaires aux arêtes en leurs milieux. Dans le cas particulier où ces points appartiennent au même plan (*quadrangle complet*), le centre de la sphère circonscrite est rejeté à l'infini. Le plan des quatre points constitue alors, conjointement avec le *plan de l'infini*, la sphère en question (sphère de rayon infiniment grand).

La géométrie analytique, dans son langage concis et universel, corrobore de nouveau pleinement cette manière de voir.

En désignant, pour abrégé, par  $\varphi(x, y, z)$  la forme *ternaire quadratique*  $x^2 + y^2 + z^2$ , en coordonnées rectangulaires, l'équation de la sphère passant par les points  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$ ,  $(x_4, y_4, z_4)$  sera

$$\begin{vmatrix} \varphi & x & y & z & 1 \\ \varphi_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \varphi_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \varphi_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ \varphi_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant du cinquième ordre suivant les éléments de sa première colonne, cette équation devient

$$\varphi \cdot \Delta + \varphi_1 \cdot \Delta_1 + \varphi_2 \cdot \Delta_2 + \varphi_3 \cdot \Delta_3 + \varphi_4 \cdot \Delta_4 = 0,$$

les mineurs  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  étant alternativement positifs et négatifs.

Or, si les quatre points sont dans un même plan, leurs coordonnées sont liées par la condition

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation de la sphère perd alors sa partie du second degré, et définit un plan. Celui-ci renferme les points en question, puisque les conditions

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0,$$

qui vérifient son équation, expriment qu'il passe successivement par chacun des groupes formés de trois de ces points.

Le même déterminant du cinquième ordre, développé suivant les éléments de sa première ligne, conduit à une expression de la forme

$$\varphi \cdot \Delta + x \cdot \Delta' + y \cdot \Delta'' + z \cdot \Delta''' + \Delta'''' = 0,$$

en attribuant alternativement aux mineurs des signes positifs et négatifs.

Les coordonnées du centre de la sphère, que cette équation représente, s'obtiennent en égalant les dérivées partielles du premier ordre à zéro; ce qui donne :

$$\begin{aligned} 2\Delta \cdot x + \Delta' &= 0, \\ 2\Delta \cdot y + \Delta'' &= 0, \\ 2\Delta \cdot z + \Delta''' &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire aisément

$$x = -\frac{\Delta'}{2\Delta},$$

$$y = -\frac{\Delta''}{2\Delta},$$

$$z = -\frac{\Delta'''}{2\Delta}.$$

Pour  $\Delta = 0$ , ces coordonnées deviennent infinies ; le centre de la sphère est donc rejeté à l'infini. Mais il y a plus. Comme toutes les sphères passent par le même cercle imaginaire, le *cercle de l'infini*, situé dans le *plan de l'infini*, ce dernier constitue avec le plan des quatre points lui-même une sphère de rayon infiniment grand.

Cette détermination exige que les quatre points donnés soient réellement *distincts*. Si la position de l'un d'eux *dépendait* d'une manière quelconque de celle des trois autres, par exemple si les points en question étaient les sommets d'un quadrangle *inscrit* à un cercle, les coordonnées du centre susmentionnées seraient *indéterminées*. L'on aurait alors affaire à ce qu'on est convenu d'appeler un *faisceau de sphères*, passant toutes par le cercle des quatre points donnés. Le plan de celui-ci (*plan radical*) fait aussi partie de ce faisceau (sphère de rayon infiniment grand), ainsi que les *sphères limites* (de rayon infiniment petit), qui sont deux points, réels ou imaginaires, situés à égale distance du plan radical.

D'ailleurs, on passe aisément du cas du plan à celui de l'espace proprement dit par une simple rotation. Soient, en effet, une droite  $D$  à l'infini et une sphère  $S$  de centre  $O$ . Le plan  $OD$  coupe la sphère suivant un cercle  $C$ , qui rencontre  $D$  aux deux points cycliques du plan  $OD$ .

En faisant tourner le cercle  $C$  de façon qu'il engendre la sphère, la droite  $D$  engendrera de son côté le plan de l'infini, et les points cycliques décrivent dans ce plan une circonférence (*cercle de l'infini*), qui sera la même pour toutes les sphères possibles, puisque dans le plan les points cycliques sont les mêmes pour tous les cercles possibles<sup>1</sup>.

En particulier, faisons tourner un faisceau de cercles autour de la ligne des centres ; il en résultera un faisceau de sphères. L'axe radical (cercle de rayon infiniment grand)

<sup>1</sup> J. Richard, *Leçons sur les méthodes de la géométrie moderne*, 2<sup>me</sup> édition, p. 100. Paris, Librairie scientifique A. Hermann, 1900.

engendrera le plan radical (sphère de rayon infiniment grand), et les *points de base* du premier faisceau décriront, dans ce plan, la circonférence commune (*cercle de base*) aux sphères du second. Les *points limites* du système de cercles, points qui peuvent être regardés comme des cercles infiniment petits, donneront naissance aux *sphères limites* du système de sphères. Cette correspondance parfaite entre les deux sortes de faisceaux justifie pleinement notre manière de voir, puisqu'elle ramène le cas de l'espace à celui du plan où le nombre des éléments déterminatifs est *insuffisant*.

