**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles

**Band:** 57 (1932)

**Artikel:** Sur les nombres hypercomplexes de Clifford et leurs applications à l'analyse vectorielle ordinaire, à l'électromagnétisme de Minkowski et à la théorie de Dirac

**Autor:** Juvet, G. / Schidlof, A.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-88699

# Sur les nombres hypercomplexes de Clifford et leurs applications à l'analyse vectorielle ordinaire, à l'électromagnétisme de Minkowski et à la théorie de Dirac

PAR

G. JUVET (Lausanne) et A. SCHIDLOF (Genève)

---

## INTRODUCTION

1. Clifford a défini un système de nombres complexes au moyen duquel il est très facile de représenter les substitutions linéaires à $n$ variables qui laissent invariante la somme des carrés de ces variables [1]. Ils permettent par conséquent de faire une étude de la géométrie de l'espace euclidien à $n$ dimensions; de plus, des travaux récents ont montré leur utilité dans la physique mathématique. Notre but est de faire voir avec quelle aisance ces nombres permettent d'obtenir les principales formules du calcul vectoriel ordinaire ($n=3$), de quelle manière élégante, on arrive, par leur moyen, à écrire les équations de l'électromagnétisme classique ($n=4$) et même à les généraliser formellement, enfin nous rappellerons comment la théorie de Dirac en peut faire un heureux usage.

2. On définit les nombres de Clifford de la façon suivante, pour $n$ quelconque. Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_n$ $n$ *unités fondamentales* dont les produits deux à deux satisfont aux conditions suivantes:

$$\Gamma_i^2=1, \quad \Gamma_i \Gamma_k=-\Gamma_k \Gamma_i, \quad (i \neq k); \tag{1}$$

on forme avec elles les *unités dérivées* suivantes parfaitement bien définies par (1) et par l'hypothèse de l'associativité du produit des $\Gamma_i$ qui entraîne alors l'associativité du produit des nombres du système:

$$\Gamma_1 \Gamma_2, \Gamma_1 \Gamma_3, \dots \Gamma_{n-1} \Gamma_n, \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3, \dots, \dots, \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_n .$$

[1] Voir *Encyclopédie des sciences mathématiques,* t. I, vol. I, fascicule 3 (1908), article de MM. Cartan et Study, p. 463-466.

Avec l'unité ordinaire 1, les unités fondamentales et les unités dérivées forment un ensemble de $2^n$ symboles entre lesquels n'existe aucune relation linéaire à coefficients numériques ordinaires.

Un *nombre de Clifford* est à $2^n$ coordonnées: $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, $a_{12}, a_{13}, \ldots a_{n-1,n}, a_{123}, \ldots, \ldots, a_{12\ldots n}$, il s'écrit

$$\begin{aligned} C = \; & a_0 \\ & + a_1 \Gamma_1 + a_2 \Gamma_2 + a_3 \Gamma_3 + \ldots + a_n \Gamma_n \\ & + a_{12} \Gamma_1 \Gamma_2 + a_{13} \Gamma_1 \Gamma_3 + \ldots + a_{n-1,n} \Gamma_{n-1} \Gamma_n \\ & + a_{123} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 + \ldots + a_{n-2,n-1,n} \Gamma_{n-2} \Gamma_{n-1} \Gamma_n \\ & + \ldots \\ & + a_{12\ldots n} \Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_n \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} C = a_0 + \Sigma a_i \Gamma_i + \Sigma a_{ik} \Gamma_i \Gamma_k + \Sigma a_{ikl} \Gamma_i \Gamma_k \Gamma_l \\ + \ldots + a_{12\ldots n} \Gamma_{12\ldots n}, \end{aligned}$$

où les sommes portent sur les combinaisons $i$, $ik$, $ikl$, ... des $n$ indices $1, 2, \ldots n$.

3. Les nombres de la forme

$$V = a_1 \Gamma_1 + \ldots + a_n \Gamma_n = \Sigma a_i \Gamma_i$$

représenteront les vecteurs de l'espace euclidien $E_n$ à $n$ dimensions dont les composantes dans un système rectangulaire sont $a_1, a_2, \ldots a_n$. Une rotation du corps des vecteurs de $E_n$ — ou peut-être, si $n$ est pair, une symétrie relativement à un hyperplan à $n-1$ dimensions, ou une combinaison de l'une et de l'autre — fait passer le vecteur $V$ dont les composantes sont les $a_i$ aux vecteurs $V'$ dont les composantes sont les nombres $a'_i$ définis par l'équation cliffordienne:

$$\sum_i a'_i \Gamma_i = B^{-1} V B, \tag{2}$$

où $B$ est un nombre de Clifford qui est un produit de vecteurs dont aucun n'est nul (ou si l'on admet que les coordonnées d'un nombre de Clifford peuvent être des nombres de Gauss, dont aucun n'est diviseur de zéro), $B^{-1}$ est son inverse facile à obtenir.

Si on applique la transformation (2), non plus à un vecteur, mais à un nombre de Clifford quelconque $C$, les diverses parties de $C$ que nous avons écrites sur des lignes différentes se comportent respectivement comme un invariant, un vecteur, un bivecteur, ..., un $n$-vecteur. Nous le verrons mieux en étudiant les deux cas particuliers $n=3$ et $n=4$.

## CHAPITRE PREMIER

### **Le calcul vectoriel classique, $n=3$.**

4. Un nombre de Clifford général est, dans ce cas, de la forme

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad C = \; & a_0 \\
& + a_1 \Gamma_1 + a_2 \Gamma_2 + a_3 \Gamma_3 \\
& + a_{12} \Gamma_1 \Gamma_2 + a_{23} \Gamma_2 \Gamma_3 + a_{31} \Gamma_3 \Gamma_1 \\
& + a_{123} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 ;
\end{aligned}
$$

$a_0$ est un invariant, $\Sigma a_i \Gamma_i$ est un vecteur, $\Sigma a_{ik} \Gamma_i \Gamma_k$ est un bivecteur et $a_{123} \Gamma_{123}$ est un trivecteur. La transformation (2) ne change pas l'orientation d'un trièdre si on l'applique aux trois vecteurs qui le forment, car $\Gamma_{123}$ commute avec tous les $\Gamma_i$, dès lors $a_{123}$ est aussi un invariant. Si on pose $\Gamma_0 = \Gamma_{123}$, on aura

$$
\begin{aligned}
(3') \qquad C = \; & a_0 + a_1 \Gamma_1 + a_2 \Gamma_2 + a_3 \Gamma_3 \\
& + \Gamma_0 (b_0 + b_1 \Gamma_1 + b_2 \Gamma_2 + b_3 \Gamma_3)
\end{aligned}
$$

avec $b_0 = a_{123}$, $b_1 = a_{23}$, $b_2 = a_{31}$, $b_3 = a_{12}$, et $\Sigma b_i \Gamma_i$ est un vecteur; on a ainsi la justification la plus claire de la correspondance qu'on est accoutumé d'établir entre les bivecteurs et les vecteurs de l'espace à trois dimensions, pour le cas où les seules transformations permises sont des rotations.

5. Soient deux vecteurs

$$V = \Sigma v_i \Gamma_i \qquad W = \Sigma w_i \Gamma_i ,$$

leur produit cliffordien est

$$
\begin{aligned}
VW = \; & v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \\
& + (v_2 w_3 - v_3 w_2) \Gamma_2 \Gamma_3 + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \Gamma_3 \Gamma_1 \\
& + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \Gamma_1 \Gamma_2
\end{aligned}
$$

ce qui peut s'écrire avec les notations vectorielles ordinaires, le point désignant le produit scalaire et la croix, le produit vectoriel:

$$VW = \vec{V} \cdot \vec{W} + \Gamma_0 \vec{V} \times \vec{W} ;$$

d'où

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \frac{1}{2} (VW + WV)$$

$$\vec{V} \times \vec{W} = - \frac{1}{2} \Gamma_0 (VW - WV)$$

car $\Gamma_0^2 = -1$. Ces formules donnent donc les deux produits du calcul vectoriel ordinaire en fonction des produits cliffordiens $VW$ et $WV$.

Si $Y$ est un troisième nombre de Clifford représentant le vecteur $\vec{Y}$, on a

$$VWY = \left\{\vec{V}\vec{W}\vec{Y}\right\}\Gamma_0 + \left(\vec{W}\cdot\vec{Y}\right)\vec{V} - \left(\vec{V}\cdot\vec{Y}\right)\vec{W} + \left(\vec{V}\cdot\vec{W}\right)\vec{Y}$$

mais le premier membre peut s'écrire aussi

$$\left[\vec{V}\cdot\vec{W} + \Gamma_0\vec{V}\times\vec{W}\right]Y = \left(\vec{V}\cdot\vec{W}\right)\vec{Y} + \Gamma_0\left\{\vec{V}\vec{W}\vec{Y}\right\} - \left(\vec{V}\times\vec{W}\right)\times\vec{Y},$$

et l'identification donne la formule connue et importante du double produit vectoriel :

$$\left(\vec{V}\times\vec{W}\right)\times\vec{Y} = \left(\vec{V}\cdot\vec{Y}\right)\vec{W} - \left(\vec{W}\cdot\vec{Y}\right)\vec{V};$$

l'accolade indique le produit mixte qui est un nombre mesurant le volume du parallélépipède construit sur $\vec{V}$, $\vec{W}$, $\vec{Y}$ comme il est bien connu.

Ces calculs ressemblent très nettement à ceux que l'on fait avec les quaternions.

6. Pour l'*analyse vectorielle*, on introduit le nombre de Clifford symbolique

$$\nabla = \Gamma_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_3\frac{\partial}{\partial x_3},$$

considéré comme un opérateur portant sur des nombres de Clifford variables, dont les coordonnées sont fonctions des variables $x_1$, $x_2$, $x_3$, coordonnées rectangulaires du point où l'on considère le *champ* cliffordien $C$. On aura

$$\begin{aligned}\nabla C = &\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, a_0 + \operatorname{div}\vec{a} + \overrightarrow{\operatorname{rot}\, a}\,\Gamma_0\\ &+ \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, b_0 + \operatorname{div}\vec{b} + \overrightarrow{\operatorname{rot}\, b}\,\Gamma_0\right)\Gamma_0,\end{aligned}$$

en prenant pour $C$ la forme (3′) et en reprenant les notations courantes du calcul vectoriel. Ce sera un nombre de Clifford dont l'invariant est $\operatorname{div}\vec{a}$, le vecteur $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, a_0 - \overrightarrow{\operatorname{rot}\, b}$, le bivecteur $(\overrightarrow{\operatorname{rot}\, a} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, b_0)\,\Gamma_0$ et le trivecteur $\operatorname{div}\vec{b}\,\Gamma_0$.

On peut aussi considérer l'opérateur

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\Gamma_3$$

et l'on aura à former le produit symbolique $C\nabla'$; $\nabla'$ est un opérateur qui agit à droite alors que $\nabla$ agit à gauche. Il est préférable d'utiliser une autre typographie

$$\overrightarrow{\nabla} = \nabla \qquad \overleftarrow{\nabla} = \nabla';$$

on a

$$\begin{aligned} C\overleftarrow{\nabla} = {} & \operatorname{div} \vec{a} + \overrightarrow{\operatorname{grad}\, a_0} + \overrightarrow{\operatorname{rot}\, b} \\ & + \Gamma_0 \left(\operatorname{div} \vec{b} + \overrightarrow{\operatorname{grad}\, b_0} + \overrightarrow{\operatorname{rot}\, b}\right). \end{aligned}$$

$\nabla$ et $\nabla'$ sont des opérateurs linéaires; appliqués à une somme ou à une différence, ils donnent des expressions faciles à écrire. Appliqués à des produits de champs cliffordiens $U$ et $V$, ils conduisent aux formules bien connues

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla}(UV) &= \overrightarrow{\nabla}(\underset{\uparrow}{U}V) + \overrightarrow{\nabla}(U\underset{\uparrow}{V}) \\ (UV)\overleftarrow{\nabla} &= (\underset{\uparrow}{U}V)\overleftarrow{\nabla} + (U\underset{\uparrow}{V})\overleftarrow{\nabla} \end{aligned}$$

où les flèches indiquent que la quantité mise en vedette est seule variable dans la parenthèse où elle se trouve. La démonstration de ces formules est immédiate.

7. Il est utile de donner une définition directe des opérateurs $\nabla$ et $\nabla'$, puisqu'aussi bien leur utilité provient de leurs propriétés intrinsèques et non pas de celles qu'on déduit du fait qu'ils sont des sommes de termes contenant des dérivées partielles en facteurs symboliques. On arrive à cette définition par des passages à la limite. Il faut remarquer qu'un bivecteur représente un parallélogramme orienté; plus généralement, on peut représenter tout élément de surface orientée par un bivecteur

$$d\sigma = dx_1\, dx_2\, \Gamma_1 \Gamma_2 + dx_2\, dx_3\, \Gamma_2 \Gamma_3 + dx_3\, dx_1\, \Gamma_3 \Gamma_1$$

où il faut entendre comme d'habitude que $dx_i\, dx_k = -\, dx_k\, dx_i$. On peut écrire

$$\begin{aligned} d\sigma &= (dx_1\, dx_2\, \Gamma_3 + dx_2\, dx_3\, \Gamma_1 + dx_3\, dx_1\, \Gamma_2)\, \Gamma_0 \\ &= \overrightarrow{d\sigma}\, \Gamma_0 \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{d\sigma}$ est la représentation vectorielle ordinaire des éléments de surface, par le moyen de la normale orientée.

On montre dès lors, tout à fait comme dans les traités d'analyse vectorielle où l'on respecte l'esprit du calcul géométrique (ils ne sont pas légion), que[1]

$$(4) \qquad \vec{\nabla} C \Gamma_0 = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint_{\Sigma} d\sigma\, C}{\tau};$$

c'est-à-dire qu'autour du point $P$ où l'on veut «*dériver*» le champ $C$, on construit une surface fermée, dont la face positive est la face extérieure, limitant un volume $\tau$; on fait le rapport de l'intégrale de surface indiquée ci-dessus au volume $\tau$ et on fait tendre $\tau$ vers zéro dans toutes ses dimensions, $P$ restant toujours intérieur à $\tau$; si la limite existe quelle que soit la manière dont $\tau$ s'évanouit, elle est justement $\vec{\nabla} C \Gamma_0$.

On a aussi

$$(4') \qquad \Gamma_0\, C \overleftarrow{\nabla} = \lim_{\tau = 0} \frac{\iint_{\Sigma} C\, d\sigma}{\tau}.$$

8. Soit $T$ un volume compris dans la région où le champ $C$ est défini et où il admet un $\vec{\nabla} C$, soit $S$ la surface qui le limite, sa face positive étant la face extérieure, la définition précédente conduit à la formule

$$\iiint_T \vec{\nabla} C\, d\tau = \iint_S d\sigma\, C$$

où $d\tau$ est le trivecteur $dx_1\, dx_2\, dx_3\, \Gamma_0$ qui représente l'élément de volume de $T$. Si $C$ est le vecteur $V = \Sigma v_i \Gamma_i$, cette formule donne les deux relations

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{V} \,|\, d\tau \,| = \iint_S \overrightarrow{d\sigma} \cdot \vec{V}$$

$$\iiint_T \overrightarrow{\operatorname{rot} V} \,|\, d\tau \,| = \iint_S \overrightarrow{d\sigma} \times \vec{V}$$

qui sont bien connues, la première est celle d'Ostrogradzky.

Les formules (4) et (4') permettent de donner une interprétation géométrique de la dérivée des formes quadratiques extérieures à trois variables. Une telle forme pourra s'écrire comme une combinaison linéaire de $C\, d\sigma$ et de $C'\, d\sigma$, $C$ et $C'$ étant deux nombres de Clifford, la dérivée sera alors une combinaison de $\vec{\nabla} C$ et de $C' \overleftarrow{\nabla}$ au facteur $d\tau$ près.

[1] Cf. p. ex. W.-V. Ignatowsky, *Die Vektoranalysis,* Bd. I, p. 15 (Edition de 1909, Leipzig, Teubner, éd.) ou G. Juvet, *Leçons d'analyse vectorielle,* Cours de l'Ecole d'ingénieurs de Lausanne, vol. I, Lausanne, Rouge, éd., chap. IV.

9. La formule de Stokes va se déduire sans peine des relations précédentes.

Soit un volume élémentaire dont le trivecteur est $dx_1\, dx_2\, dx_3\, \Gamma_0$ et soit $P$ son centre; désignons par $\vec{a}$ le vecteur unité perpendiculaire à la face $dx_1\, dx_2$ et par $a$ le nombre de Clifford correspondant. On aura

$$\vec{\nabla}(a\, C)\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, \Gamma_0 = \iint d\sigma\, a\, C \tag{5}$$

où l'intégrale de surface doit être étendue aux 6 faces du parallélépipède. Si l'on définit la dérivée $\frac{dC}{da}$ par la limite du rapport de l'accroissement de $C$ dans la direction $\vec{a}$ à la distance parcourue dans ce champ dans le sens $\vec{a}$, on trouve que

$$\iint d\sigma\, a\, C = \Gamma_0 \left[ dx_1\, dx_2\, dx_3 \frac{dC}{da} - \Gamma_0\, dx_3 \int_\gamma dr\, C \right], \tag{6}$$

où $dr$ est le nombre de Clifford qui représente le vecteur élémentaire du contour $\gamma$ limitant la base $dx_1\, dx_2$ du parallélépipède.

Par conséquent, si $\vec{n}$ est le vecteur unité normal à un élément de surface, $n$ le nombre de Clifford correspondant, on aura en tenant compte de (5), de (6) et après division par $dx_3$ et par intégration sur toute une portion $S$ d'une surface dont $d\sigma$ est le bivecteur élémentaire:

$$\iint_S \nabla\, n\, C\, n\, d\sigma = \iint_S \frac{dC}{dn}\, n\, d\sigma + \int_\Gamma dl\, C,$$

où $\Gamma$ est le contour de $S$, $dl$ le nombre de Clifford qui représente l'élément d'arc dirigé, le sens du parcours étant déterminé par la règle ordinaire : un observateur dirigé le long de $\vec{n}$ vers le bord $\Gamma$ voit $\Gamma$ parcouru dans le sens positif.

On peut écrire cela de la manière suivante:

$$\iint_S \left( \nabla\, n\, C - \frac{dC}{dn} \right) n\, d\sigma = \int_\Gamma dl\, C.$$

Il faut remarquer que $\nabla\, n$ est un opérateur qui porte sur $C$, et dont la forme est, si $\vec{\nabla}$ est l'opérateur connu du calcul vectoriel:

$$\sum_i n_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,k} \Gamma_i\, \Gamma_k \left( n_k \frac{\partial}{\partial x_i} - n_i \frac{\partial}{d x_k} \right) = \frac{d}{dn} - \Gamma_0\, \vec{n} \times \vec{\nabla}$$

En particulier, pour $C = \Sigma\, v_i\, \Gamma_i$, $d\sigma = n\, \Gamma_0\, |d\sigma|$, $dl = \Sigma\, dx_i\, \Gamma_i$, il vient, en rappelant que $nn = 1$, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$:

$$-\iint_S \Gamma_0 \left[ \overrightarrow{d\sigma} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} + \left( \overrightarrow{d\sigma} \times \vec{\nabla} \right) \times \vec{V}\, \Gamma_0 \right] \Gamma_0 = \int_\Gamma \overrightarrow{dl} \cdot \vec{V} + \int_\Gamma \overrightarrow{dl} \times \vec{V}\, \Gamma_0$$

et en identifiant:
$$\int_{\Gamma} \vec{dl} \cdot \vec{V} = \iint_S \vec{d\sigma} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right)$$
$$\int_{\Gamma} \vec{dl} \times \vec{V} = \iint_S \left(\vec{d\sigma} \times \vec{\nabla}\right) \times \vec{V};$$
la première de ces relations est la formule de Stokes, la seconde moins connue est cependant une formule intéressante.

10. On a ainsi obtenu toutes les formules de l'analyse vectorielle où intervient une fois le symbole $\vec{\nabla}$; on remarquera avec quelle aisance elles s'écrivent et avec quelle élégance elles s'enchaînent. Pour les formules qui font intervenir l'opérateur $\vec{\nabla}$ itéré, il faut remarquer que l'itération de l'opérateur cliffordien $\nabla$ donne:
$$\nabla \nabla = \nabla^2 = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \text{laplacien} = \text{lap}.$$
Si l'on considère, par exemple,
$$\nabla V = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \Gamma_0 \vec{\nabla} \times \vec{V} = \operatorname{div} \vec{V} + \Gamma_0 \overrightarrow{\operatorname{rot} V},$$
on aura en itérant:
$$\operatorname{lap} \vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{V} + \Gamma_0 \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot} V} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{\operatorname{rot} V},$$
en identifiant les parties différentes de chacun des nombres de Clifford qui sont dans chaque membre, on trouve
$$\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot} V} = 0$$
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{\operatorname{rot} V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{V} - \operatorname{lap} \vec{V}.$$
Pour un scalaire, on aurait
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, C = 0, \qquad \operatorname{lap} C = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, C.$$

11. Il est possible — et il est utile — d'introduire un opérateur nouveau. Si $U$ et $V$ sont deux nombres de Clifford quelconques, on a appris à prendre le $\nabla\!\!\!>$ ou le $<\!\!\!\nabla$ du produit $UV$; on applique les formules (4) et (4'), ce qui fait considérer des intégrales
$$\iint d\sigma\, UV \qquad \text{et} \qquad \iint UV\, d\sigma.$$
Si l'on part d'une intégrale de la forme
$$\iint U\, d\sigma\, V$$
on voit que la limite
$$\lim_{\tau = 0} \frac{\displaystyle\iint_{\Sigma} U\, d\sigma\, V}{\tau}$$
ne sera ni l'une ni l'autre des expressions $\Gamma_0 \nabla\!\!\!> UV$, $\Gamma_0\, UV <\!\!\!\nabla$.

Nous poserons
$$\lim_{\tau=0} \frac{\iint U\, d\sigma\, V}{\tau} = \Gamma_0\, U \overleftrightarrow{\nabla} V$$
ce qui n'est pas autre chose, comme on le voit sans peine, que l'expression
$$\Gamma_0 [(U \overleftarrow{\nabla})\, V + U (\overrightarrow{\nabla} V)].$$
On voit donc que $U \overleftrightarrow{\nabla} V d\tau$ est la dérivée extérieure[1] de $U d\sigma V$.

On peut appeler ce curieux symbole en nœud de cravate, le $\nabla$ médian d'un produit; on en verra la signification dans le cas $n=4$ et son utilité pour l'électromagnétisme.

Nous nous arrêtons ici pour $n=3$; nous sommes bien persuadés qu'un lecteur averti aura pu constater par ce bref exposé que de toutes les méthodes au moyen desquelles on établit les formules du calcul vectoriel, celle qui est fondée sur la considération des nombres de Clifford ne le cède à aucune autre pour la simplicité, la rapidité et l'élégance.

## CHAPITRE II

### L'univers minkowskien et l'électromagnétisme ($n=4$).[2]

12. La forme quadratique qui définit la métrique de l'univers minkowskien peut se ramener, en choisissant des axes convenables, à la forme
$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2\, dt^2;$$
il serait probablement plus naturel de modifier un peu les définitions du système de Clifford et de prendre à côté des trois unités $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ une quatrième $\Gamma_4$ dont le carré fût égal à $-c^2$. Pour ne pas trop modifier ce que nous avons dit dans le cas $n=3$, nous poserons $x_4 = ict$ et $\Gamma_4^2 = 1$ comme dans la définition générale donnée au début de ce mémoire.

On posera $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 = \Gamma_5$, mais il faut remarquer que $\Gamma_5$ ne commute plus avec les autres unités $\Gamma_i$. On a
$$\Gamma_i \Gamma_5 = -\Gamma_5 \Gamma_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$
et
$$\Gamma_5^2 = 1$$

[1] Une forme à multiplication extérieure étant l'élément sous le signe $\int$ relatif à une intégration sur une variété fermée à $k$ dimensions, sa dérivée extérieure sera l'élément différentiel de l'intégrale étendue à une région à $k+1$ dimensions dont cette variété fermée est la frontière; cf. p. ex. E. CARTAN, *Leçons sur les Invariants intégraux.* Paris, Hermann, 1922, chap. VII.

[2] Cf. G. JUVET, *Opérateurs de Dirac et équations de Maxwell, Commentarii Mathematici Helvetici,* vol. 2, p. 225-235, et une note aux *Actes du Congrès international des mathématiciens de Zurich* (1932).

Un nombre de Clifford — dans le mémoire cité des *Commentarii Mathematici Helvetici* (vol. II), nous avons appelé nombres de Lorentz, les nombres de Clifford pour $n = 4$ — s'écrira

$$C = a_0 + \Sigma a_i \Gamma_i + \Sigma a_{ik} \Gamma_i \Gamma_k + \Sigma a_{ikl} \Gamma_i \Gamma_k \Gamma_l + a_{1234} \Gamma_5,$$

les sommes portant sur les *combinaisons* des indices; mais parfois, il sera utile d'introduire $a_{21} \Gamma_2 \Gamma_1$ au lieu de $a_{12} \Gamma_1 \Gamma_2$, par exemple; il sera entendu que $a_{12} = - a_{21}$ et d'une manière générale, si l'on considère tous les arrangements d'indices, le signe du coefficient correspondant sera bien déterminé par la forme du produit des $\Gamma_i$ auquel il correspond.

Dans l'équation (2) qui exprime une rotation d'axes ou une symétrie, on se bornera à prendre pour $B$ un produit d'un nombre pair de vecteurs afin de n'avoir à traiter que des rotations. Dès lors, le nombre $C$ peut s'écrire

$$C = I_1 + V_1 + T + \Gamma_5 (V_2 + I_2)$$

où $I_1$ et $I_2$ sont deux invariants, deux scalaires; $V_1$ et $V_2$ sont deux vecteurs, $\Gamma_5 V_2$ est un trivecteur correspondant au vecteur $V_2$, on a pour les composantes de $V_2$

$$b_4 = a_{123}, \text{ etc.};$$

enfin $T = \Sigma a_{ik} \Gamma_i \Gamma_k$ est un bivecteur, ou comme on dit aussi, un *tenseur antisymétrique* du second ordre. Il faut remarquer que les tenseurs symétriques et les tenseurs quelconques n'ont pas droit de cité dans le système cliffordien; on verra cependant que ceux qui ont quelque utilité en physique mathématique s'introduisent naturellement dans les calculs par quelques-unes de leurs combinaisons utiles — opérateurs différentiels contractés — puisqu'ils ne peuvent le faire directement.

Il est parfois commode de décomposer $T$ en deux parties

$$T = T_1 + \Gamma_5 T_2,$$

cette décomposition n'est pas univoque en général, mais comme le calcul peut la présenter, il convenait de la signaler [cf. chap. III].

D'autre part, les nombres de la forme

$$V_1 + \Gamma_5 V_2,$$

où $V_1$ et $V_2$ sont des vecteurs, jouent un rôle remarquable dans les applications, nous les appellerons des *survecteurs*. Ils jouissent de la propriété suivante:

Le produit d'un survecteur $S$ (qui peut dégénérer en un vecteur ou un trivecteur) par un tenseur $T$ est un survecteur

$$ST = S', \qquad TS = S'';$$

la somme et la différence de $S'$ et de $S''$ fournissent un vecteur et un trivecteur.

13. A des nombres de Clifford variables, définissant un certain champ, on peut appliquer l'un ou l'autre des opérateurs

$$\nabla = \Sigma \Gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{et} \qquad \nabla' = \Sigma \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_i$$

qui sont des vecteurs symboliques, l'un s'applique à gauche, l'autre à droite et pour éviter les chances d'erreur, on écrira

$$\nabla C = \overrightarrow{\nabla} C \quad \text{qui est} \quad \Sigma \Gamma_i \frac{\partial C}{\partial x_i}$$

$$C \nabla' = C \overleftarrow{\nabla} \quad \text{qui est} \quad \Sigma \frac{\partial C}{\partial x_i} \Gamma_i$$

Les résultats de ces deux opérations sont des nombres de Clifford, c'est-à-dire que ces opérations sont invariantes par les transformations (2); la démonstration de ce fait résultera de la définition intrinsèque que nous donnerons plus bas de $\nabla$ et $\nabla'$.

Pour écrire ces résultats, il est commode d'introduire quelques abréviations; nous renonçons d'ailleurs à mettre des flèches aux vecteurs et à distinguer les tenseurs par des signes spéciaux. Les lettres $I$, $V$ et $T$ sont suffisamment claires. On sait ce qu'est le gradient d'un scalaire, la divergence et le rotationnel d'un vecteur:

$$\operatorname{grad} I = \Sigma \frac{\partial I}{\partial x_i} \Gamma_i = \Sigma \Gamma_i \frac{\partial I}{\partial x_i};$$

$$\operatorname{div} V = \Sigma \frac{\partial v_i}{\partial x_i};$$

$$\operatorname{rot} V = \sum_{i,k} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \Gamma_i \Gamma_k.$$

On appellera *divergence vectorielle* d'un tenseur $T$ et l'on écrira DIV $T$ le vecteur suivant:

$$\mathrm{DIV}\, T = \sum_k \left[ \sum_i \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} \right] \Gamma_k.$$

Enfin nous poserons

$$\max T = \left[ \frac{\partial a_{43}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{32}}{\partial x_4} + \frac{\partial a_{24}}{\partial x_3} \right] \Gamma_1 + \dots$$

les termes non écrits s'obtenant par permutation circulaire des indices 1, 2, 3, 4; on obtient ainsi un vecteur que nous avons appelé le *maxwellien* de $T$.

Dès lors

$$(7) \qquad \vec{\nabla} C = \begin{aligned}[t] & \operatorname{div} V_1 \\ & + \operatorname{grad} I_1 + \mathrm{DIV}\, T \\ & + \operatorname{rot} V_1 - \Gamma_5 \operatorname{rot} V_2 \\ & + \Gamma_5 (-\operatorname{grad} I_2 + \max T) \\ & - \Gamma_5 \operatorname{div} V_2, \end{aligned}$$

et

$$(7') \qquad C \overleftarrow{\nabla} = \begin{aligned}[t] & \operatorname{div} V_1 \\ & + \operatorname{grad} I_1 - \mathrm{DIV}\, T \\ & - \operatorname{rot} V_1 - \Gamma_5 \operatorname{rot} V_2 \\ & + \Gamma_5 (\operatorname{grad} I_2 + \max T) \\ & + \Gamma_5 \operatorname{div} V_2, \end{aligned}$$

où l'on a écrit les différentes parties de ces nombres dérivés sur des lignes différentes.

14. Les définitions intrinsèques se fondent sur un passage à la limite. Soit $P$ un point du champ, entourons-le d'une hypersurface $L$ limitant un hypervolume de mesure $\varrho$; soit $d\tau = dx_1\, dx_2\, dx_3\, \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 + \ldots$, le trivecteur élémentaire représentant l'élément de l'hypersurface, on a

$$(8) \qquad -\Gamma_5 \vec{\nabla} C = \lim_{\varrho = 0} \frac{\iiint_L d\tau\, C}{\varrho}$$

$$(8') \qquad C \overleftarrow{\nabla} \Gamma_5 = \lim_{\varrho = 0} \frac{\iiint_L C\, d\tau}{\varrho},$$

et par suite pour un hypervolume quelconque $H$ limité par une hypersurface $G$, on a, si

$$d\varrho = \Gamma_5 \,|\, d\varrho \,| = \text{quadrivecteur élémentaire de } H,$$

$$\iiiint_H d\varrho\, \vec{\nabla} C = -\iiint_G d\tau\, C$$

$$\iiiint_H C \overleftarrow{\nabla}\, d\varrho = \iiint_G C\, d\tau.$$

15. On n'aura pas à s'intéresser au $\nabla$ d'un produit $UV$, mais il faut définir le $\nabla$ médian d'un tel produit. On y arrivera de la façon suivante, qui permet de préciser ce que nous avons esquissé pour le cas de $n = 3$.

Dans les passages à la limite précédents, on peut supprimer le signe *lim*, remplacer $\varrho$ par $|d\varrho|$ et les intégrales des numérateurs seront étendues à l'hypersurface infiniment petite que limite $d\varrho$. Désignons alors par un indice zéro les valeurs de $U$ et de $V$ au point $P$ fixe dans l'hypervolume évanouissant, et posons pour $U$ sur la frontière

$$U = U_0 + dU.$$

On calculera la limite du rapport d'une intégrale portant sur $U\,d\tau\,V$ à l'hypervolume évanouissant ; on aura

$$\frac{\iiint U\,d\tau\,V}{|d\varrho|} = \frac{\iiint U_0\,d\tau\,V}{|d\varrho|} + \frac{\iiint U\,d\tau\,V_0}{|d\varrho|}$$

$$- \frac{U_0\left(\iiint d\tau\right)V_0}{|d\varrho|} + \frac{\iiint dU\,d\tau\,dV}{|d\varrho|};$$

mais $\iiint d\tau = 0$ puisque l'hypersurface est fermée ; de plus, le dernier terme est un infiniment petit d'ordre supérieur à l'ordre des deux premiers, et par suite

$$(9) \qquad \lim_{\varrho=0} \frac{\iiint_L U\,d\tau\,V}{\varrho} = -\,U\,\Gamma_5(\nabla\!\!> V) + (U <\!\!\nabla)\,\Gamma_5 V.$$

On peut définir un opérateur légèrement différent de $\nabla$, ce serait un opérateur trivectoriel

$$\mathring{\nabla} = \nabla\,\Gamma_5 = -\,\Gamma_5 \nabla$$

alors le second membre de (9) s'écrira

$$U(\mathring{\nabla}\!\!> V) + (U <\!\!\mathring{\nabla})V = U <\!\!\mathring{\nabla}\!\!> V.$$

On voit dès lors que

$U <\!\!\mathring{\nabla}\!\!> V\,|d\varrho|$ est la dérivée extérieure de $U\,d\tau\,V$.

16. On peut introduire aussi la notion d'opérateur adjoint d'un opérateur donné. Soit $M(U)$ un opérateur agissant sur $U$, $\mathfrak{M}$ sera l'*adjoint* de $M$ si l'intégrale

$$\iiiint_H M(U)\,d\varrho\,V - U\,d\varrho\,\mathfrak{M}(V)$$

est égale à une intégrale étendue à la frontière $G$ de $H$. La formule (9) donne immédiatement

$$\iiint_G U\,d\tau\,V = \iiiint_H (U\overleftarrow{\nabla})\,d\varrho\,V - U\,d\varrho\,(\overrightarrow{\nabla}V);$$

de ce point de vue

$\overleftarrow{\nabla}$ est l'adjoint de $\overrightarrow{\nabla}$.

17. L'opérateur itéré $\nabla\nabla = \nabla^2$ est le laplacien de l'espace à 4 dimensions

$$\nabla^2 = \Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

on a de même

$$\mathring{\nabla}^2 = -\Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Si on revient à la variable $t = \dfrac{x_4}{ic}$, $\nabla^2$ se transforme en le dalembertien

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

qui est l'opérateur bien connu de la théorie des ondes.

18. Il n'y aurait pas lieu de revenir sur les équations de l'électromagnétisme dont on trouvera la forme cliffordienne dans le mémoire cité plusieurs fois déjà, s'il ne nous était pas possible d'y ajouter des résultats formels nouveaux. Ils concernent les équations de conservation que l'opérateur en nœud de cravate permettra d'écrire élégamment. Nous ajouterons quelques remarques propres à rendre plausible une généralisation de la théorie de Maxwell.

19. Voici les hypothèses sur lesquelles se fondent la théorie de Maxwell et les équations qui l'expriment réduites à leur forme la plus simple.

*a)* Le champ électromagnétique est un bivecteur

$$\begin{aligned} F = {} & F_{12}\Gamma_1\Gamma_2 + F_{23}\Gamma_2\Gamma_3 + F_{31}\Gamma_3\Gamma_1 \\ & + F_{14}\Gamma_1\Gamma_4 + F_{24}\Gamma_2\Gamma_4 + F_{34}\Gamma_3\Gamma_4. \end{aligned}$$

*b)* Le courant est un vecteur

$$S = s_1\Gamma_1 + s_2\Gamma_2 + s_3\Gamma_3 + s_4\Gamma_4$$

et l'on a

$$\nabla F = -S$$

ce qui prouve que

$$\max F = 0$$

et par suite — ce qu'une analyse cliffordienne montrerait sans difficulté —:

*c)* Il existe un vecteur

$$\Phi = \varphi_1 \Gamma_1 + \varphi_2 \Gamma_2 + \varphi_3 \Gamma_3 + \varphi_4 \Gamma_4$$

tel que

$$F = \nabla \Phi,$$

ce qui entraîne $\operatorname{div} \Phi = 0$, et $\nabla^2 \Phi = - S$.

*d)* Enfin puisque $\nabla^2 F$ est un bivecteur et que

$$\nabla^2 F = - \nabla S = - \operatorname{div} S - \operatorname{rot} S,$$

il faut que

$$\operatorname{div} S = 0.$$

19. La force de Lorentz $P$ est un vecteur dont les composantes sont les nombres

$$p_i = \sum_k F_{ik}\, s_k.$$

On voit sans peine que le nombre de Clifford

$$P = \sum_i p_i \Gamma_i$$

est égal à

$$\frac{1}{2}(FS - SF),$$

c'est-à-dire que

$$P = \frac{1}{2}\Big[(\nabla\!\rightarrow F) F - F (\nabla\!\rightarrow F)\Big],$$

Or

$$\nabla\!\rightarrow F = - F \leftarrow\!\nabla$$

donc

$$P = -\frac{1}{2}\Big[(F \leftarrow\!\nabla) F + F (\nabla\!\rightarrow F)\Big]$$

ou encore

$$P = -\frac{1}{2} F \leftarrow\!\nabla\!\rightarrow F.$$

La force de Lorentz est, au facteur $-\frac{1}{2}$ près, le $\nabla$ médian du produit $FF$. Mais on sait[1] aussi que $P$ est la divergence vectorielle d'un tenseur symétrique $\mathfrak{S}$ représentant les tensions de Maxwell et dont les composantes sont

$$\mathfrak{S}_{ik} = \sum_r F_{ir} F_{kr} - \frac{1}{4} \delta_{ik} \sum\sum F_{rs}^2.$$

[1] Pour tout ce qui concerne la forme tensorielle des équations de Maxwell, voir H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie,* 5. Aufl. Berlin, Springer, 1923.

Or les tenseurs symétriques n'ont pas droit de cité dans l'électromagnétisme cliffordien tout antisymétrique, mais en fait, ce n'est pas $\mathfrak{S}$ dont on a besoin, c'est le vecteur DIV $\mathfrak{S}$ qui est nécessaire et il est à un facteur près $F \overleftrightarrow{\nabla} F$; qu'on puisse précisément lui donner la forme DIV $\mathfrak{S}$ c'est fort intéressant du point de vue du calcul tensoriel, mais il est bien plus intéressant de remarquer que le tenseur $\mathfrak{S}_{ik}$ est une grandeur mathématique nullement indispensable, c'est sa *divergence vectorielle* qui en a une véritable signification physique et elle se trouve être justement un nombre de Clifford.

20. Les théorèmes de conservation pour un champ dans lequel on ne considère que du rayonnement, et où par conséquent $C = -\nabla F = 0$, se formulent par l'équation

$$F \overleftrightarrow{\nabla} F = 0,$$

ou encore, sous une forme moins tautologique :

$$\iiint_G F\, d\tau\, F = 0$$

pour toute hypersurface fermée $G$; on a bien là l'assurance la plus précise de la conservation de quelque chose, qui n'est pas le carré $F^2$ mais le produit $FF$, si l'on veut distinguer.

Lorsqu'on considère des charges mobiles douées d'inertie, mais dont l'effet sur le champ $F$ est négligeable, les équations du mouvement qui sont en même temps les équations de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement s'écrivent synthétiquement pour chaque charge

$$\mu_0 \frac{dV}{ds} + \frac{1}{2} F \overleftrightarrow{\nabla} F = 0, \tag{10}$$

où $V = \Sigma v_i \Gamma_i$ est le vecteur unité $\left(\Sigma v_i^2 = 1, v_i = \dfrac{dx_i}{ds}\right)$ tangent à la ligne d'univers de la particule considérée, $ds$ est l'élément d'arc de cette ligne, $\mu_0$ la densité propre de la particule. On peut écrire cette équation sous la forme

$$\mu_0 (V \overleftrightarrow{\nabla} V) + F \overleftrightarrow{\nabla} F = 0 \tag{10'}$$

car, comme le montre un calcul simple,

$$V \overleftrightarrow{\nabla} V = 2 \frac{dV}{ds}.$$

Or de même que $F \overleftrightarrow{\nabla} F$ est à un facteur près la divergence vectorielle d'un tenseur symétrique $\mathfrak{S}_{ik}$, de même $V \overleftrightarrow{\nabla} V$ est la divergence vectorielle du tenseur symétrique

$$\mathfrak{T}_{ik} = \mu_0 v_i v_k$$

et l'équation (10') s'écrira en notation tensorielle [WEYL, *loc. cit.*, p. 197]:

$$(10'') \qquad \sum_k \frac{\partial (\mathfrak{T}_{ik} + \mathfrak{S}_{ik})}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Le tenseur $\mathfrak{T}_{ik}$ n'a pas droit de cité dans notre analyse, mais il intervient dans les formules par sa divergence vectorielle qui est un nombre de Clifford. Ce serait à une étude des milieux continus, exposée dans le langage cliffordien, qu'il appartiendrait de préciser la relation entre $\mu_0 (V \overleftrightarrow{\nabla} V)$ et la divergence vectorielle de $\mathfrak{T}$, car cette relation fait intervenir l'équation de continuité

$$\frac{\partial (\mu_0 v_k)}{\partial x_k} = 0$$

ou

$$\overrightarrow{\nabla} (\mu_0 V) + (\mu_0 V) \overleftarrow{\nabla} = 0;$$

nous laissons cette étude de côté, elle allongerait démesurément ce mémoire.

Il faut remarquer que l'équation (10) qui établit un lien entre l'électromagnétisme et la mécanique n'est valable que pour autant que la modification apportée au champ par la charge mobile est négligeable; de plus elle ne fait pas intervenir le tenseur $\mathfrak{S}$, mais le vecteur $F \overleftrightarrow{\nabla} F$ qui est une combinaison bilinéaire des composantes de $F$ et de leurs dérivées, exprimable, en calcul tensoriel, par la divergence vectorielle de $\mathfrak{S}$. La théorie de Maxwell n'est pas une théorie fermée, car dire $F \overleftrightarrow{\nabla} F = 0$ c'est dire que le courant est nul et comme il est $-\nabla F$, le théorème de conservation semble être une tautologie, mais il n'en est rien si l'on a égard aux tensions de Maxwell. S'il y a au contraire un courant, $F \overleftrightarrow{\nabla} F$ n'est pas nul, il est compensé par la variation du vecteur $V$ dans l'unité de temps propre, mais ce vecteur $V$ apporte avec lui toute la mécanique et l'équation (10) marque, pourrait-on dire, le lieu d'intersection de la mécanique et de l'électromagnétisme, car elle exprime un théorème de conservation d'une somme de deux grandeurs, l'une « *cinétique* », l'autre « *potentielle* ».

# CHAPITRE III

## Sur une généralisation de la théorie précédente.

21. L'hypothèse *b*) que nous avons faite au § 19, revient à dire qu'il n'existe pas de courant magnétique; elle est équivalente, en effet, à

$$\max F = 0,$$

qui exprime l'inexistence d'un magnétisme vrai. Cela implique alors que $F$ est le rotationnel d'un vecteur. On peut se demander quelles modifications apporte aux lois observables l'hypothèse plus générale

$$\max F \neq 0.$$

Tout d'abord: *a)* le champ reste un bivecteur, mais il est quelconque. Puisque

$$\nabla F = \mathrm{DIV}\, F + \Gamma_5 \max F,$$

on admettra que

*b)* le courant est un *survecteur*, c'est-à-dire la somme d'un vecteur et d'un trivecteur

$$C = \Sigma s_i \Gamma_i + \Gamma_5 \Sigma m_i \Gamma_i = S + \Gamma_5 M,$$

le trivecteur représentera le courant magnétique, et l'on remarquera que si l'on peut donner à ce courant une représentation purement vectorielle $\Sigma m_i \Gamma_i$, c'est par le trivecteur $\Gamma_5 \Sigma m_i \Gamma_i$ qu'il intervient dans les formules. Il y a dans cette distinction formelle le signe d'une différence de nature géométrique correspondant à la différence physique entre l'électricité et le magnétisme. Grâce à l'introduction du courant magnétique, une plus belle symétrie régnera dans les équations, $C$ sera dit le *courant total*. On posera alors

$$\nabla F = -C.$$

*c)* $F$ étant quelconque, on n'a plus $F = \nabla \Phi$, mais il est possible de trouver un survecteur $\Phi + \Gamma_5 \Psi$, tel que l'on ait

$$\nabla (\Phi + \Gamma_5 \Psi) = F$$

ou si $U = \Phi + \Gamma_5 \Psi$

(11) $$\nabla U = F,$$

ce qui implique

(12) $$\mathrm{div}\, \Phi = \mathrm{div}\, \Psi = 0,$$

et ensuite

$$\nabla^2 U = -C,$$

d'où l'on tire $U$ par les potentiels retardés. On voit que l'existence du «*potentiel survecteur*» $U$ n'est pas la conséquence d'une restriction faite sur $F$; dire qu'il existe un potentiel n'est plus un théorème physique, c'est une évidence mathématique, on peut toujours mettre $F$ sous la forme (11) avec les deux conditions (12).

On voit enfin que $\operatorname{div} S = \operatorname{div} M = 0$.

22. Que devient dès lors la force de Lorentz? Il semblerait, à première vue, que notre généralisation dût faire ajouter à la force au sens ordinaire un trivecteur et alors, il serait bien difficile d'établir un lien naturel entre la mécanique et notre théorie généralisée; mais il n'en est rien.

Formons encore $F \overset{\leftrightarrow}{\nabla} F$, on trouve

$$F \overset{\leftrightarrow}{\nabla} F = (F \overset{\leftarrow}{\nabla}) F + F (\overset{\rightarrow}{\nabla} F),$$

mais [cf. éq. (7′)]

$$F \overset{\leftarrow}{\nabla} = - \mathrm{DIV}\, F + \Gamma_5 \max F$$

et par suite

$$\begin{aligned} F \overset{\leftrightarrow}{\nabla} F &= (S - \Gamma_5 M) F - F (S + \Gamma_5 M) \\ &= SF - FS - \Gamma_5 (MF + FM). \end{aligned}$$

Or $MF + MF$ est un trivecteur, son produit par $\Gamma_5$ donne un vecteur, dès lors, puisque $SF - FS$ est au facteur $-2$ près la force ordinaire de Lorentz, on pourra prendre encore pour l'expression de cette force dans notre nouvelle théorie,

$$P = -\frac{1}{2} F \overset{\leftrightarrow}{\nabla} F.$$

Mais il y a plus: le second membre s'exprime avec les $F_{ik}$ d'une façon absolument indépendante du fait que $F_{ik}$ est un bivecteur particulier ($\operatorname{rot} \Phi$) ou un bivecteur quelconque. Dès lors, l'expression de $P$ au moyen des tensions de Maxwell reste la même, les composantes du tenseur $\mathfrak{S}_{ik}$ ayant de plus la même forme.

Donc: si l'on admet que le champ électromagnétique est un tenseur antisymétrique du second ordre absolument quelconque, les *expressions* de l'énergie et de la quantité de mouvement du champ sont exactement les mêmes que celles que donne la théorie ordinaire.

On voit donc, et de la manière la plus simple, quelle faible importance présente pour la théorie formelle l'hypothèse de l'inexistence du courant magnétique.

Il nous paraît que ces considérations, toutes formelles à première vue, acquièrent une signification physique si on les confronte avec les hypothèses proposées récemment par M. P. A. M. Dirac [1].

[1] Cf. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A.* vol. 133, p. 60-72 (1931).

# CHAPITRE IV

## Remarques sur les équations de Dirac.

23. On sait que M. P. A. M. Dirac[1] a eu l'heureuse idée de remplacer l'opérateur

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

qui se présente dans l'équation fondamentale de la mécanique ondulatoire et qui porte sur le scalaire $\psi$, par le produit $\nabla\,\nabla$ ou $\nabla'\,\nabla'$. Dans l'expression de ces opérateurs les $\Gamma_i$ sont des matrices. Il remplace alors l'équation

$$\nabla^2\psi-\frac{m^2c^2}{h^2}\psi=0 \tag{13}$$

relative à l'électron dans l'espace privé de champ par l'équation

$$\nabla\psi+\frac{mc}{h}\psi=0$$

où $\psi$ n'est plus un scalaire, mais une grandeur d'un type qui a paru d'abord tout à fait nouveau, et qui, dans la théorie des matrices, a 4 composantes distinctes. En itérant $\nabla$, on trouve

$$\nabla\,\nabla\,\psi+\frac{mc}{h}\nabla\psi=\nabla^2\psi-\frac{m^2c^2}{h^2}\psi=0$$

et chaque composante satisfait à l'équation (13).

24. M. A. Proca[2] a proposé de considérer $\psi$ comme un nombre de Clifford ; en posant $\frac{mc}{h}=\alpha$, on aura l'équation

$$\overrightarrow{\nabla}\psi+\alpha\psi=0 \tag{14}$$

qui en remplace 16, non indépendantes d'ailleurs.

On aurait pu aussi bien remplacer (14) par

$$\psi'\overleftarrow{\nabla}+\alpha\psi'=0 \tag{14'}$$

que nous appellerons l'équation *associée* de l'équation (14), $\psi'$ sera le nombre de Clifford associé à $\psi$ dans le problème considéré.

[1] Cf. p. ex. P. A. M. DIRAC, *Les Principes de la Mécanique quantique,* trad. française par A. PROCA et J. ULLMO. Paris, Presses Universitaires de France, 1931, p. 281 et 59.

[2] *C. R. Paris* (1930), tome 190, p. 1377 et tome 191, p. 26; *J. de Phys.* (VII), (1930), tome I, p. 235-248.

On tire de là

$$\Gamma_5 \overrightarrow{\nabla} \psi + \alpha \Gamma_5 \psi = 0$$
$$\psi' \overleftarrow{\nabla} \Gamma_5 + \alpha \psi' \Gamma_5 = 0.$$

On multiplie les deux membres de ces équations, pour la première par $\psi'$ à gauche, pour la seconde par $\psi$ à droite, et on soustrait membre à membre, il vient (cf. § 15):

$$(\psi' \overleftarrow{\nabla}) \psi + \psi' (\overrightarrow{\nabla} \psi) = 0$$

soit

(15) $$\psi' \overleftrightarrow{\nabla} \psi = 0,$$

ce qui montre que

(16) $$\iiint_G \psi' \, d\tau \, \psi = 0$$

pour toute hypersurface fermée $G$ de l'espace $E_4$.

25. Lorsqu'un champ électromagnétique règne dans l'espace dont $U$ est le potentiel (complet ou non), on peut remplacer (14) par

(17) $$(\overrightarrow{\nabla} + \beta U) \psi + \alpha \psi = 0$$

et l'équation associée pourrait s'écrire

(17′) $$\psi' (\overleftarrow{\nabla} - \beta U) + \alpha \psi' = 0$$

afin qu'on puisse encore trouver une équation de conservation; les mêmes combinaisons que celles qu'on a faites ci-dessus redonneront les équations de conservation (15) et (16), si l'on a égard, en faisant le calcul, à ce que $\Gamma_5$ et $U$ anticommutent.

Il serait intéressant d'interpréter avec précision ces théorèmes de conservation; cela ne peut se faire que par l'étude approfondie des solutions de (14) et (14′) ou de (17) et (17′). Dans certains cas, $\psi' \overleftrightarrow{\nabla} \psi$ est la divergence d'un vecteur qu'on a identifié au courant créé par l'électron.

Nous nous bornons à ces remarques, en renvoyant le lecteur à quelques mémoires récents de M. A. Proca[1].

La théorie de Dirac pose des problèmes qui ne sont pas encore résolus, il se pourrait que la théorie générale esquissée au chapitre III de cette étude fût de quelque utilité pour l'interprétation des résultats paradoxaux obtenus jusqu'ici, mais tant qu'on n'aura pas formulé d'hypothèses précises et plausibles concernant l'action exercée sur le champ par les particules et les ondes qui leur sont associées, les difficultés rencontrées jusqu'ici resteront entières.

[1] *J. de Phys.* (VII), (1932), tome III, fascicule 4.

Manuscrit recu le 22 octobre 1932.
Dernières épreuves corrigées le 20 mars 1933.