Zeitschrift: Bulletins des séances de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 5 (1856-1858)
Heft: 40

Artikel: Théorie des intérêts composé infinitésimaux, suivi de quelques remarques sur les intérêts composés ordinaires et sur les intérêts simple
Autor: Dutoit, A.-L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-284095

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 26.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

MÉMOIRES.

Théorie des intérêts composés infinitésimaux, suivie de quelques remarques sur les intérêts composés ordinaires et sur les intérêts simples.

I

Des intérêts composés infinitésimaux.

A peu près tous les ouvrages d'algèbre traitent la question des intérêts composés, mais aucun d'eux, à notre connaissance du moins, n'a encore examiné le côté le plus intéressant de cette théorie[1]; nous voulons parler des intérêts composés envisagés au point de vue infinitésimal.

Quelques auteurs, il est vrai, font bien remarquer ce que savent au reste tous les banquiers et les hommes d'affaires, c'est que plus les règlements de compte sont rapprochés les uns des autres, plus aussi il y a avantage pour le créancier. En effet, il est facile de comprendre que si la capitalisation des intérêts au lieu de se faire chaque année se fait chaque semestre par exemple, il doit y avoir une différence en faveur du prêteur, puisque l'intérêt de la somme pendant les six premiers mois de l'année porte lui-même intérêt pendant les six derniers mois.

Si les règlements de compte (en continuant le même raisonnement) au lieu de se faire tous les semestres, se faisaient tous les trimestres, puis tous les mois, toutes les semaines, etc., l'avantage pour le créancier deviendrait de plus en plus grand à mesure que les règlements de compte se rapprocheraient les uns des autres. Mais comme il est facile de le prévoir, cet accroissement ne pourrait pas dépasser une certaine limite vers laquelle devraient nécessairement

[1] Voyez la note à la fin de ce travail.

tendre les différents résultats à mesure qu'on diviserait l'année en périodes de temps de plus en plus courtes.

Ces considérations préliminaires étant posées, il est naturel maintenant que nous nous proposions de résoudre les questions suivantes.

Problème I.

Que deviendrait le taux annuel d'une somme placée à intérêts composés, en supposant que les règlements de compte se fissent à des époques infiniment rapprochées les unes des autres, c'est-à-dire que la capitalisation des intérêts fût INCESSANTE ET CONTINUE.

Cette question a un rapport intime de similitude avec beaucoup d'autres questions que nous présente la nature. L'accroissement que nous voulons déterminer peut en effet très-bien être comparé à un mouvement uniformément accéléré comme à celui d'un corps tombant dans le vide, par exemple; le taux représenterait dans ce cas la force constante ou la pesanteur. Nous allons essayer de résoudre cette question au moyen de considérations élémentaires et sans avoir recours à l'intégration.

Pour cela représentons par r la fraction $\frac{t}{100}$, c'est-à-dire la centième partie du taux, ou l'intérêt simple de un franc pendant un an; de plus, désignons par m le nombre de règlements de compte faits pendant l'année. L'intérêt de un franc pendant chacune des périodes de temps sera de $\frac{r}{m}$; de sorte que la valeur de un franc avec ses intérêts capitalisés m fois pendant l'année s'exprimera par $\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$. En développant cette expression suivant la formule du binôme nous aurons la série suivante :

$$1+\frac{m}{1}\cdot\frac{r}{m}+\frac{m(m-1)r^2}{1.\ 2.\ m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)r^3}{1.\ 2.\ 3.\ m^3}+\text{etc.}$$

qui peut se mettre sous cette forme :

$$1+\frac{r}{1}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)r^2}{1.\ 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)r^3}{1.\ 2.\ 3}+\text{etc.}$$

Or, si les règlements de compte sont infiniment rapprochés les uns des autres, m devient infini et les fractions $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, etc., tendent toutes vers zéro; de sorte qu'à la limite, la série ci-dessus se change en celle-ci :

$$1+\frac{r}{1}+\frac{r^2}{1.2}+\frac{r^3}{1.2.3}+\frac{r^4}{1.2.3.4}+\frac{r^5}{1.2.3.4.5}+\text{etc.}\quad [A]$$

En retranchant le capital un franc et en multipliant par 100 on aura le taux effectif demandé :

$$t_1 = 100\left[r + \frac{r^2}{1.2} + \frac{r^3}{1.2.3} + \frac{r^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right]$$

Comme r est toujours une fraction assez petite, cette série est très-convergente; ainsi, il suffit de prendre les quatre premiers termes pour avoir au moins six figures exactes à la partie décimale lorsque le taux ne dépasse pas le 6 %. En calculant les dix premiers termes on trouve :

Pour le 3 %, $t_1 = 3{,}045453395351685561 24\ldots$
» 4 %, $t_1 = 4{,}081077419238822675 7\ldots$
» 5 %, $t_1 = 5{,}127109637602403969 7\ldots$
» 6 %, $t_1 = 6{,}183654654535962222\ldots$

Nous supprimons les chiffres qui ne sont pas exacts.

La série [A] étant la même que celle qui donne le développement d'un nombre en fonction de son logarithme népérien, nous pouvons la représenter par e^r (e désignant la base du système népérien). Il est facile, au reste, de s'assurer directement que si e représente la valeur de la série numérique $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}$ on aura $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = e^r$, *lorsque m devient infini*. En effet, si l'on développe les deux expressions $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$ et $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mr}$, on trouve 2 séries identiques, donc $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mr} = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^r =$

$$= \left[1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}\right]^r = e^r;$$

nous aurons par conséquent $t_1 = 100\,(e^r - 1)$, ou $r_1 = e^r - 1$.

Nous pouvons maintenant résoudre le problème inverse, c'est-à-dire *déterminer le taux* (r) *annuel infinitésimal connaissant le taux* (r_1) *annuel ordinaire* [1]. L'équation $r_1 = e^r - 1$ nous donne $e^r = 1 + r_1$; en prenant les logarithmes des deux membres (dans un sytème quelconque) nous avons : $r \log. e = \log. (1 + r_1)$, d'où $r = \frac{\log. (1 + r_1)}{\log. e}$. Si nous faisons usage des logarithmes hyperboliques ou népériens nous aurons : $r = \log. \text{hyp}. (1 + r_1)$.

[1] Nous désignerons par r_1 le taux annuel ordinaire, chaque fois qu'il sera question en même temps du taux infinitésimal correspondant, avec lequel il est lié par la relation $r_1 = e^r - 1$; dans tous les autres cas nous le désignerons par r seulement.

A l'aide des deux relations que nous venons d'obtenir, savoir :

$$r_1 = e^r - 1 = \frac{r}{1} + \frac{r^2}{1.2} + \frac{r^3}{1.2.3} + \frac{r^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}, \text{ et}$$

$$r = \text{log. hyp. } (1 + r_1) = \frac{r_1}{1} - \frac{r_1^2}{2} + \frac{r_1^3}{3} - \frac{r_1^4}{4} + \text{etc.},$$

il nous sera très-facile de passer du taux infinitésimal au taux ordinaire, et *vice-versâ*.

Problème II.

Quelle serait au bout de n années la valeur (S) *d'un capital* C, *s'il était placé à intérêts composés infinitésimaux et à raison de r pour un franc l'an?*

Soit toujours m le nombre de règlements de compte faits pendant l'année. La valeur de un franc avec ses intérêts capitalisés sera à la fin de la n^{me} année de $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$; mais en faisant $m = \infty$, nous aurons $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mrn} = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{rn} = e^{rn}$;

et par conséquent

$$S = C.\ e^{rn}$$

Telle est la formule fondamentale des *intérêts composés infinitésimaux*. Nous aurons plus loin des remarques très-intéressantes à faire sur le résultat que nous venons d'obtenir.

La quantité e^r, trouvée plus haut, nous aurait aussi conduit à la la formule ci-dessus en posant les proportions $1 : e^r :: e^r : x$, $1 : e^r :: x : x'$, etc. Si nous n'avons pas suivi cette marche, c'est qu'il aurait pu rester dans l'esprit du lecteur quelques doutes sur l'*uniformité et la continuité* de l'accroissement du capital; car, on pourrait croire au premier abord que l'accroissement va par sauts puisqu'on suit la même marche que dans les intérêts composés annuels; mais il faut observer que ce n'est pas la proportion $1 : 1 + r :: 1 + r : x$ que l'on emploie, mais bien celle-ci, $1 : 1 + r_1 :: 1 + r_1 : x$, c'est-à-dire qu'on se sert, pour établir la continuité de l'accroissement, du taux auxiliaire r_1 dont nous avons déjà déterminé la valeur. En d'autres termes, *placer une somme à intérêts composés infinitésimaux à raison de r pour un franc l'an, revient à la placer (pendant le même temps) à intérêts composés ordinaires ou annuels, mais à raison de* r_1 *soit* $e^r - 1$, *pour un franc l'an.* C'est sous une autre forme l'énoncé du premier problème.

En désignant par a l'augmentation du capital primitif nous aurons les deux équations suivantes :

$$S = C.\ e^{rn}$$
$$S = C + a,$$

lesquelles combinées entre elles donnent quinze formules (les deux ci-dessus comprises); mais en laissant de côté celles qui ne donnent lieu qu'à une simple addition ou à une simple soustraction, ainsi que celles qui renferment des quantités qui peuvent s'éliminer directement par la même voie, il nous reste huit formules qu'il ne sera pas sans intérêt de placer en regard des formules analogues, soit des intérêts simples, soit des intérêts composés annuels.

Formules pour les intérêts

SIMPLES.	COMPOSÉS ANNUELS.	COMPOSÉS INFINITÉSIMAUX.	
$S = C(1 + rn)$	$S = C(1 + r)^n$	$S = C.\ e^{rn}$	[1]
$S = \frac{a(1 + rn)}{rn}$	$S = \frac{a(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$	$S = \frac{a.\ e^{rn}}{e^{rn} - 1}$	[2]
$C = \frac{S}{1 + rn}$	$C = \frac{S}{(1 + r)^n}$	$C = \frac{S}{e^{rn}}$	[3]
$C = \frac{a}{rn}$	$C = \frac{a}{(1 + r)^n - 1}$	$C = \frac{a}{e^{rn} - 1}$	[4]
$a = C\,rn$	$a = C\left((1 + r)^n - 1\right)$	$a = C(e^{rn} - 1)$	[5]
$a = \frac{S\,rn}{1 + rn}$	$a = \frac{S\left((1 + r)^n - 1\right)}{(1 + r)^n}$	$a = \frac{S(e^{rn} - 1)}{e^{rn}}$	[6]
$r = \frac{a}{Cn}$	$r = \sqrt{\frac{S}{C}} - 1$	$r = \frac{\log. S - \log. C}{n \log. e}$	[7]
$n = \frac{a}{Cr}$	$n = \frac{\log. S - \log. C}{\log.(1 + r)}$	$n = \frac{\log. S - \log. C}{r \log. e}$	[8]

Les sept dernières formules donnent encore lieu à autant de problèmes différents dont nous nous dispensons de donner la traduction en langage ordinaire. Nous ne donnerons pas non plus d'exemples particuliers, car les applications numériques ne sauraient présenter de difficultés pour ceux qui sont déjà familiarisés avec les questions des intérêts composés annuels. Comme e est une quantité constante, mais incommensurable, on en déterminera une fois pour toutes la valeur avec le degré d'approximation qu'on jugera convenable. Cette quantité jouant d'ailleurs un très-grand rôle dans l'analyse infinitésimale, les analystes en ont poussé l'approximation très-loin; nous ne donnerons ici que les vingt premières figures :

$$e = 2{,}71828182845904523536\ldots$$

En voici le logarithme vulgaire :

$$\log.\ e = 0{,}43429448190325182765\ldots$$

Cette approximation est suffisante et bien au-delà pour évaluer le temps par exemple à plus d'un millionième de seconde près, ainsi que pour tenir compte d'une fraction minime de centime, la somme qu'on aurait à calculer allât-elle, même dans les billions. Il va sans dire que dans ces sortes de questions on peut se contenter d'une approximation moindre.

Remarquons avant d'aller plus loin que partout où l'expression $(1+r)^n$ se trouve dans les formules des intérêts composés annuels, elle est remplacée dans celles des intérêts composés infinitésimaux par e^{rn}; ce qui conduit pour la détermination de r à une équation [7] exponentielle. Mais si l'on fait attention qu'en se servant dans le cas qui nous occupe des logarithmes hyperboliques au lieu de se servir des logarithmes vulgaires, on n'aura que la différence de deux logarithmes à diviser par n, puisque log. hyp. $e = 1$; c'est précisément l'opération qu'on doit effectuer dans la méthode ordinaire où l'on a la racine n^{me} à extraire.

La même observation quant à l'emploi des logarithmes hyperboliques s'applique aussi aux autres formules et tout particulièrement à la formule [8] qui devient alors bien plus facile à calculer que l'analogue dans les intérêts composés annuels. Le problème suivant qui ne rentre pas directement dans une des huit formules ci-dessus va au reste nous fournir l'occasion de mettre en pratique cette observation.

Problème III.

En combien de temps un capital dont on connaît le taux deviendrait-il p fois plus grand par l'accumulation de ses intérêts composés infinitésimaux (p pouvant être entier ou fractionnaire, mais > 1).

Remplaçons dans la formule [1] S par p. C, et divisons les deux membres par C, nous aurons $p = e^{rn}$, d'où

$$n = \frac{\log. p}{r. \log. e} = \frac{\log. \text{hyp}. p}{r} \qquad [9]$$

Comme application soit $p = 2$, et faisons successivement :

$r = 0{,}03$, nous aurons $n = \frac{100}{3} \log. \text{hyp}. 2 = 23{,}10490601866 48...$

$r = 0{,}04$, » $n = \frac{100}{4}$ » $2 = 17{,}32867951399 86...$

$r = 0{,}05$, » $n = \frac{100}{5}$ » $2 = 13{,}86294361119 89...$

$r = 0{,}06$, » $n = \frac{100}{6}$ » $2 = 11{,}55245300933 24...$

Le calcul, comme on le voit, est des plus simples, puisqu'on n'a qu'un simple déplacement de virgule et une division par 3, par 4, etc., à effectuer. L'opération serait la même pour des taux intermédiaires. En réduisant en nombres complexes les quatre fractions ci-dessus et en comptant l'année à 365 jours seulement, on trouve qu'une somme quelconque placée à intérêts composés infinitésimaux doublerait de valeur :

Pour le	3 °/₀,	en	23	ans,	38	jours,	6	heures,	58	min., 36ˢ204..
»	4 °/₀,	en	17	»	119	»	23	»	13	» 57,153..
»	5 °/₀,	en	13	»	314	»	23	»	23	» 9,722..
»	6 °/₀,	en	11	»	201	»	15	»	29	» 18,102..

Les chiffres ci-dessus nous montrent une chose remarquable, c'est que le temps est inversement proportionnel au taux, et cela doit avoir lieu non seulement lorsque le capital double de valeur, mais toutes les fois que le rapport $\frac{S}{C}$ ou le nombre p est constant, ce qu'indique déjà la formule [9], mais ce que nous allons démontrer encore comme suit :

Soient $S = C\ e^{rn}$ et $S' = C'\ e^{r'n'}$ les valeurs définitives de deux placements ; nous aurons $\frac{S}{C} = e^{rn}$, et $\frac{S'}{C'} = e^{r'n'}$; mais de ce que $\frac{S}{C} = \frac{S'}{C'}$ nous tirons $e^{rn} = e^{r'n'}$ et par conséquent $rn = r'n'$, d'où $n : n' :: r' : r$ ce que nous voulions démontrer.

On peut démontrer de la même manière que cette proportion a lieu dans les intérêts simples lorsque p est constant, ce qui doit d'autant plus étonner que la même chose n'a pas lieu dans les intérêts composés annuels. En effet, si l'on calcule combien de temps mettrait une somme pour doubler de valeur, on trouve en faisant usage de la formule $n = \frac{\log. 2}{\log. (1 + r)}$:

Pour le 3 %, 23 ans, 164 jours, 4 heures à peu près.
» 6 %, 11 » 326 » 22 » »

Il est facile de voir que ce dernier résultat dépasse la moitié du premier. Nous allons prouver d'ailleurs d'une manière générale que tant que les taux seront différents (c'est-à-dire qu'on aura deux placements distincts), la proportion $n : n' :: r' : r$ ne pourra jamais avoir lieu.

Soient les deux équations $S = C (1 + r)^n$ et $S' = C' (1 + r')^{n'}$; par suite de l'égalité $\frac{S}{C} = \frac{S'}{C'}$ nous aurons $(1 + r)^n = (1 + r')^{n'}$ ou la proportion $n : n' :: \log. (1 + r') : \log. (1 + r)$; mais pour avoir $n : n' :: r' : r$ [a], il faudrait qu'on eût aussi la proportion $r : r' :: \log. (1 + r) : \log. (1 + r')$ [b]. Voyons si elle peut exister[1]. Si nous développons ces deux logarithmes, respectivement en fonction de r et de r' nous aurons :

$$r : r' :: k\left(\frac{r}{1} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \text{etc.}\right) : k\left(\frac{r'}{1} - \frac{r'^2}{2} + \frac{r'^3}{3} - \text{etc}\right) \quad [c]$$

ou bien $1 : 1 :: \left(1 - \frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} - \text{etc.}\right) : \left(1 - \frac{r'}{2} + \frac{r'^2}{3} - \text{etc.}\right)$

proportion qui ne peut évidemment avoir lieu qu'en tant que r et r' sont identiques, il en sera donc de même des proportions [c] et [b], ainsi que de la proportion [a]; c'est ce que nous voulions démontrer.

Au reste, les remarques que nous venons de faire résultent de ce que le taux joue exactement le même rôle que le temps, soit dans les formules des intérêts simples, soit dans celles des intérêts composés infinitésimaux, tandis qu'il en est tout autrement dans celles des intérêts composés ordinaires, car il faudrait pour que cela eût lieu qu'on pût mettre indifféremment r à la place de n et *vice-versâ*.

[1] Il est facile de voir que cette proportion ne peut avoir lieu que pour deux taux infiniment petits, ce qui n'est pas le cas ici, puisque r et r' ont toujours des valeurs déterminées d'avance. On n'a $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\log. (1 + \alpha)}{(\log. 1 + \beta)}$ que lorsque α et β tendent vers zéro.

Problème IV.

Une personne emprunte A francs à intérêts composés infinitésimaux à raison de r pour un franc l'an, et s'engage à rembourser cette somme en m versements égaux, effectués à égale distance les uns des autres de manière à éteindre complètement sa dette en n années : quel doit être le montant de chaque versement?

Les espaces de temps compris entre le moment de l'emprunt et le premier versement, entre le premier versement et le deuxième, entre le deuxième et le troisième, etc., seront tous égaux à $\frac{n}{m}$; de sorte qu'en désignant par a le montant de chaque versement, nous aurons l'équation suivante :

$$a + a.e^{\left(\frac{rn}{m}\right)} + a.e^{\left(\frac{2rn}{m}\right)} + a.e^{\left(\frac{3rn}{m}\right)} + \ldots a.e^{\left(\frac{(m-1)rn}{m}\right)} = \mathrm{A}\, e^{rn};$$

en faisant la somme des termes du premier membre de cette équation nous avons $\dfrac{a\,(e^{rn}-1)}{e^{\left(\frac{rn}{m}\right)}-1} = \mathrm{A}\, e^{rn}$, d'où nous tirons :

$$a = \frac{\mathrm{A}\, e^{rn}\left[e^{\left(\frac{rn}{m}\right)}-1\right]}{e^{rn}-1} \qquad [10]$$

Dans le cas particulier des annuités comme on a $m = n$, la formule ci-dessus se change en celle-ci :

$$a = \frac{\mathrm{A}\, e^{rn}\,(e^{r}-1)}{e^{rn}-1} = \frac{\mathrm{A}\, e^{rn}\, r_1}{e^{rn}-1} \qquad [11]$$

Les problèmes que nous venons de résoudre sont suffisants, croyons-nous, pour donner une idée générale de la théorie des intérêts composés infinitésimaux. Nous ferons seulement observer ici que le taux pourrait être fixé relativement à un espace de temps quelconque, pourvu qu'il fût bien déterminé ; ainsi, au lieu de prendre le taux annuel pour point de départ, on pourrait prendre le taux journalier, la quantité n exprimerait dans ce cas des jours et non pas des années, cela va sans dire. Il ne faut d'ailleurs considérer l'unité de temps relativement à la quantité r que comme un simple rapport indiquant la puissance de l'accroissement et servant par conséquent à déterminer la relation qui doit exister entre un

élément de temps infiniment petit (formant la période de capitalisation) et l'intérêt qui doit lui correspondre. A la vérité, il serait difficile d'assigner une valeur déterminée à l'intérêt correspondant à une durée de temps qui, sans être zéro, doit cependant rester au-dessous de toute quantité positive assignable d'avance, quelque petite qu'elle puisse être. Ne pouvant pas fixer le taux relatif à la période de capitalisation, nous l'avons établi au moyen d'un rapport exprimé par ces mots : *à raison de r pour un franc l'an.*

II

Paradoxe que présente la formule des intérêts composés ordinaires, lorsque l'exposant n *est fractionnaire.*

En faisant attention au rôle que jouent le taux et le temps dans les différentes formules que nous avons données à la page 5, et en se reportant à ce que nous avons dit de la proportion $n : n' :: r' : r$, il nous sera facile de conclure qu'il n'y a, mathématiquement parlant, que deux méthodes logiques et naturelles pour calculer les intérêts, savoir la méthode des intérêts simples et celle des intérêts composés infinitésimaux; quant à celle des intérêts composés ordinaires, c'est-à-dire à capitalisation par saccades, elle ne peut être considérée que comme un simple procédé de convention et non comme une méthode naturelle; nous croyons même qu'elle pourrait être remplacée sans inconvénient, si ce n'est avec avantage, par celle dont nous avons donné la théorie générale dans la première partie de ce travail. Nous ne voulons pas nous arrêter ici à développer cette idée, ni à réfuter d'avance les objections qu'elle pourrait soulever, soit au point de vue économique et commercial, soit au point de vue pratique; comme nous aurons plus loin l'occasion de proposer un changement dans la manière de fixer le taux de l'intérêt simple, et que ce changement nous paraît plus utile encore que celui dont nous venons de parler, nous désirons porter essentiellement l'attention sur ce point.

Mais, avant d'aborder ce sujet, nous allons faire connaître un fait singulier que présente l'application de la formule des intérêts composés ordinaires, lorsque la quantité n (quelle que soit l'unité de temps) [1] est fractionnaire. Ce fait, qui n'a pas encore été remar-

[1] Comme c'est presque toujours l'année qui est prise pour unité de temps, nous ne parlerons, dans tout ce qui va suivre, que des intérêts composés annuels. Au reste, ce que nous allons dire des intérêts à capitalisation annuelle peut s'appliquer également à toute espèce d'intérêt à capitalisation par saccades; seulement, plus l'unité de temps ou la période de capitalisation sera petite, et moins l'écart que nous allons constater sera considérable.

qué, que nous sachions, mérite de fixer pendant quelques instants notre attention : il consiste en ce que la formule $S = C(1+r)^n$ des intérêts composés (dans le cas où n est plus petit que l'unité), donne pour la valeur de S, un résultat inférieur à celui que donne la formule des intérêts simples, ce qui, à première vue, a tout à fait l'air d'un paradoxe.

Supposons par exemple qu'on veuille calculer la valeur de un franc (ou de toute autre somme) rentrant au bout d'un jour avec son intérêt au 5 %; on pourrait croire au premier abord que puisque l'intérêt ne peut lui-même porter intérêt qu'au bout d'une année, le résultat doit être le même que celui que donne la méthode des intérêts simples, c'est-à-dire qu'on aura $1 + \frac{1}{20} \times \frac{1}{365} = 1{,}0001369...$ et cependant en faisant usage de

la formule générale on trouve $\left(1+\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{365}} = 1{,}0001336...$

soit une différence de $0{,}0000033...$

Si on fait le calcul pour 125 jours, on trouve :

dans le premier cas . . . . $1 + \frac{1}{20} \times \frac{125}{365} = 1{,}0171232...$

dans le second cas . . . . . $\left(1+\frac{1}{20}\right)^{\frac{125}{365}} = 1{,}0168493...$

c'est-à-dire une différence de $0{,}0002739...$

dans le même sens que celle ci-dessus, mais beaucoup plus grande. Faisons encore $r = 0{,}05$ et $n = {}^1/_2$, soit 182 $^1/_2$ jours, nous aurons :

dans le premier cas . . . . $1 + \frac{1}{20} \times \frac{1}{2} = 1{,}0250000$

dans le second cas . . . . . $\left(1+\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{2}} = 1{,}0246951$

soit une nouvelle différence de $0{,}0003049...$

plus grande encore que les deux premières. Nous aurions de la même manière une différence en prenant tout nombre de jours, inférieur à 365.

En effet, soit q ce nombre, nous aurons d'une manière générale :

par la méthode des intérêts simples . . . . $1 + \frac{rq}{365}$, et

» » composés . $\left(1+r\right)^{\frac{q}{365}}$; or,

cette dernière expression développée en série donne :

$$1 + \frac{qr}{365} + \frac{q(q-365)r^2}{1.\ 2.\ 365^2} + \frac{q(q-365)(q-2\times365)r^3}{1.\ 2.\ 3.\ 365^3} + \text{etc.}$$

c'est-à-dire la première (formée des deux premiers termes), plus une suite infinie de termes; il est donc impossible que les deux méthodes conduisent au même résultat. Il est même facile de voir que la dernière expression doit avoir une valeur inférieure à celle de la première, puisque le troisième terme de son développement est négatif par suite du facteur $(q - 365)$. Le taux restant le même, la différence sera d'autant plus grande que q sera plus rapproché de $^{365}/_{2}$, soit en sus, soit en sous, comme on peut s'en assurer en cherchant quelle valeur il faut donner à q pour rendre maximum la valeur arithmétique de $q\,(q - 365)$[1]; de sorte que le plus grand écart qu'on puisse avoir entre les deux résultats aura lieu lorsqu'on aura $q = 182\,^{1}/_{2}$; il diminuera d'ailleurs à mesure qu'on descendra de $182\,^{1}/_{2}$ à 1, ou qu'on montera de $182\,^{1}/_{2}$ à 364; enfin, si l'on fait $q = 0$, ou $q = 365$, la différence sera nulle. Il est aussi facile de voir que pour une même valeur de q, plus le taux sera élevé et plus aussi sera grande la différence. Ainsi pour le 6 %, l'écart maximum (toujours sur un franc de capital) est de 0,000437, c'est-à-dire de 0,000132 plus grand que pour le 5 %.

Lorsque le nombre de jours surpasse 365 sans être un multiple de ce dernier nombre, une divergence analogue se reproduit encore, et c'est surtout ici qu'elle mérite d'être remarquée, car si on n'applique pas la formule $S = C\,(1 + r)^n$ lorsqu'on a $n < 1$, on l'applique au contraire lorsqu'on a $n > 1$.

Cherchons, par exemple, quelle serait au bout de 4 ans 312 jours, la valeur de un franc avec ses intérêts composés à raison de $4\,^{1}/_{2}$ p^{r} % l'an. On pourrait croire (d'après la définition même des intérêts composés annuels) qu'on aura la valeur de un franc avec ses intérêts capitalisés quatre fois, c'est-à-dire $(1{,}045)^4$, plus *l'intérêt simple* sur cette dernière valeur pendant les 312 jours restants; on aurait ainsi

$$(1{,}045)^4 + \frac{(1{,}045)^4 \times 312 \times 0{,}045}{365} = 1{,}238389..;$$

et cependant d'après la formule générale,

on a seulement . . . . . $(1{,}045)^{4 + \frac{312}{365}} = 1{,}238242...$

soit une différence en moins de $0{,}000147...$

Ainsi, sur un million de capital, l'écart serait de 147 fr. à peu près.

Soit d'une manière générale $n = v + \frac{q}{365}$, nous aurons :

[1] Nous supposons ici pour simplifier le raisonnement que tous les termes à la suite du 3^{me}, peuvent être négligés; ce qui n'est tout à fait exact que pour un taux infiniment petit. On verra, du reste, à la page 16, que la valeur de q, correspondant au maximum de l'écart, et qui varie d'ailleurs pour chaque taux, s'écarte très-peu de $182\,^{1}/_{2}$.

dans le 1^er^ cas $(1+r)^v + \frac{(1+r)^v rq}{365} = (1+r)^v\left(1+\frac{rq}{365}\right)$ [A]

dans le 2^me^ cas $(1+r)^{v+\frac{q}{365}} = (1+r)^v\left(1+r\right)^{\frac{q}{365}}$ [B]

Ces deux expressions ayant un facteur commun, et le second facteur de la première étant plus grand que le second facteur de la seconde, nous en concluons sans peine

$$(1+r)^v\left(1+\frac{rq}{365}\right) > (1+r)^v\,(1+r)^{\frac{q}{365}}$$

Toutes les remarques que nous avons faites plus haut relativement à q et à r, trouvent encore ici leur application; seulement il faut observer que la différence entre les seconds facteurs étant multipliée par le premier facteur $(1+r)^v$; plus v sera grand, et plus aussi sera grande la différence entre les deux expressions ci-dessus.

Ainsi en faisant $v = 20$, $r = 0{,}06$ et $q = 182$, nous nous plaçons dans des conditions très-défavorables, et l'écart que nous obtiendrons entre les deux résultats sera bien plus grand que dans l'exemple numérique que nous avons déjà donné; en effet nous avons :

$$(1{,}06)^{20}\left(1+\frac{182\times 0{,}06}{365}\right) = 3{,}303085\ldots,$$

et $\quad (1{,}06)^{20}\,(1{,}06)^{\frac{182}{365}} = 3{,}301684\ldots$

soit une différence de 0,001401 à peu près;

ce qui représente une *somme de* 1401 *francs sur un capital d'un million de francs.* Si v était plus grand, nous le répétons, l'écart serait plus grand encore.

Cette divergence que nous venons de constater se reproduira, il est évident, dans toutes les questions où en faisant usage des intérêts composés annuels, le nombre d'années sera fractionnaire. Parmi les exemples nombreux que nous pourrions donner, nous choisirons les deux suivants.

Vérifions d'abord, en nous servant de l'expression [A], si une somme placée à intérêts composés ordinaires et au 3 °/₀, double réellement de valeur en 23 ans 164 jours ¹/₆ à peu près, comme nous l'avons indiqué à la page 8.

Val^r^ de fr. 1 avec ses intér. capit. 23 fois, soit $(1{,}03)^{23}$ = fr. 1,973586
Intérêt simple sur fr. 1,973586 pendant 164 jours ¹/₆ = » 0,026630
Total, fr. 2,000216

Cette différence de + 0,000216, nous montre que le temps donné par la formule $n = \frac{\log.\,2}{\log.\,(1+r)}$ est trop grand. Si nous calcu-

lons combien de temps il faut à fr. 1,973586 pour rapporter (fr. 2 — fr. 1,973586) d'intérét au 3 °/₀ nous trouvons 162 jours $^5/_6$ à peu près, soit une différence de 1 jour $^1/_3$.

Enfin, comme dernier exemple, nous allons montrer que dans la question des amortissements basée sur les intérêts composés annuels une divergence analogue à celles que nous venons de signaler, a lieu, non-seulement lorsque n est fractionnaire, mais chaque fois qu'on sort du système d'amortissement par annuités[1], ou plutôt chaque fois que la distance entre deux versements consécutifs n'est pas exprimée par un nombre entier d'années. Prenons pour abréger le problème IV, traité dans la première partie, et changeons seulement la nature du taux; nous aurons l'équation suivante :

$$a + a(1+r)^{\left(\frac{n}{m}\right)} + \ldots a(1+r)^{\left(\frac{(m-1)n}{m}\right)} = (1+r)^n \qquad [C]$$

qui nous donnera :

$$a = \frac{A(1+r)^n\left[(1+r)^{\frac{n}{m}} - 1\right]}{(1+r)^n - 1} \qquad [D]$$

et dans le cas particulier des annuités,

$$a = \frac{A(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1} \qquad [E]$$

Si n était une fraction ou un nombre fractionnaire les formules [D] et [E] donneraient l'une et l'autre des résultats divergents suivant le point de vue où l'on se placerait relativement aux expressions [A] et [B], le fait est trop évident pour que nous nous y arrêtions. Si au contraire n était un nombre entier, l'application de la formule [E] ne donnerait lieu à aucun écart; quant à la formule [D] on ne pourrait l'appliquer sans avoir d'écart que dans le seul cas où n serait un multiple de m : en effet, il est facile de voir en examinant l'équation [C] que si les différentes puissances de $(1+r)$ étaient fractionnaires, — plus grandes ou plus petites que l'unité, peu importe, — les facteurs multipliant a seraient (en se reportant à l'expression [A] discutée plus haut) évidemment trop petits; la quantité a serait par conséquent trop grande, puisque le second membre de l'équation [C] est constant.

Appuyons ce que nous venons de dire par un exemple particulier. Faisons $A = 1000000$; $n = 3$; $m = 4$, et $r = 0{,}05$. La formule [D] nous donnera après réduction :

[1] Est-ce cette circonstance qui empêche les auteurs qui traitent la question des intérêts composés de résoudre d'une manière générale la question des amortissements, comme nous le faisons ici? Nous ne le pensons pas, car tous les auteurs que nous avons consultés ne font pas mention de cette circonstance.

$$a = \frac{1157625 \times 0{,}0372703}{0{,}157625} = 273720. —$$

à quelques centimes près. Pour vérifier ce résultat nous n'avons qu'à dresser une espèce de compte courant et à voir si capital et intérêts se balancent de part et d'autre. Si nous faisions usage dans cette vérification de l'expression [B] nous trouverions le compte parfaitement balancé, cela va sans dire; mais, si nous avons recours à l'expression [A] nous aurons d'une part :

montant du 1er versement avec ses intérêts,	fr.	305548 50
» 2e » » »	»	294591 15
» 3e » » son intérêt,	»	283984 50
» 4e » sans intérêt,	»	273720 —
	fr.	1157844 15
de l'autre : fr. 1000000 avec ses intérêts,	»	1157625 —
c'est-à-dire une différence de	fr.	219 15

dans le même sens que nous avons indiqué plus haut.

Pour trouver la valeur de chaque versement, afin qu'une vérification analogue à celle que nous venons de faire donne une différence nulle, nous n'avons qu'à faire usage de l'expression [A], laquelle nous donne dans le cas particulier qui nous occupe :

$$a + a\left(1 + \frac{3r}{4}\right) + a(1+r)\left(1 + \frac{r}{2}\right) + a(1+r)^2\left(1 + \frac{r}{4}\right) =$$

$= A(1+r)^n$, d'où nous tirons $a = \frac{4.\,A\,(1+r)^n}{r^3 + 8r^2 + 18r + 16}$; et en substituant aux quantités A, r et n, leur valeur numérique, nous aurons $a = \frac{4 \times 1157625}{16{,}920125} = 273668\ 20$ à très-peu de chose près.

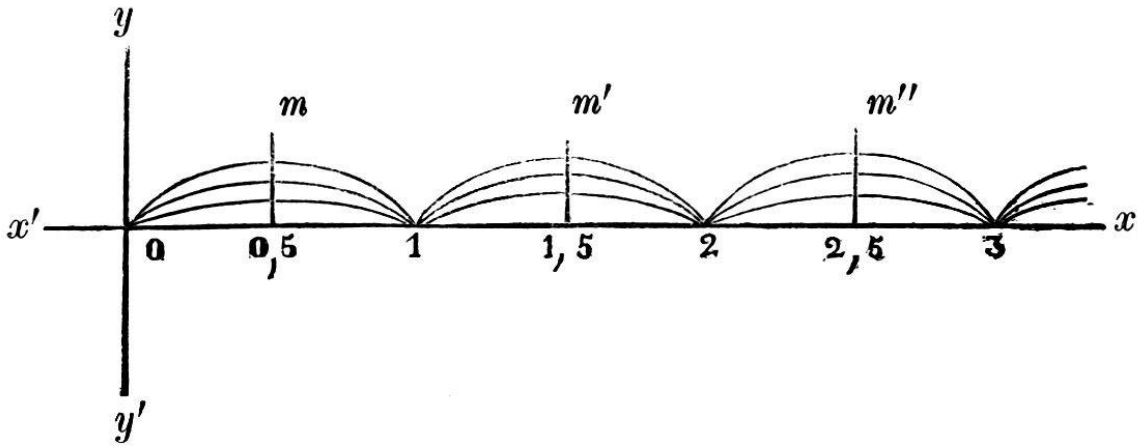
Nous avons ainsi fr. 51 80 de moins sur chaque versement ce qui fait une différence de fr. 207 20. Si nous ne retrouvons pas 219 15, cela provient tout simplement de la différence des intérêts qui doivent nécessairement changer par suite du changement même de chaque versement.

Si nous voulons résumer ce que nous venons de développer, un peu trop longuement peut-être, il nous sera facile de le faire au moyen d'une construction graphique; car, en désignant par y la différence entre les deux expressions [A] et [B], et en posant pour abréger $q/_{365} = x$ nous aurons l'équation suivante :

$$y = (1+r)^v\,[1 + rx - (1+r)^x]$$

qui nous fournira les éléments nécessaires pour construire la courbe représentant l'écart dont nous venons de parler. En faisant d'abord $v = o$, puis en donnant successivement à x des valeurs très-rapprochées comprises entre zéro et l'unité, et en calculant les valeurs correspondantes de y, nous déterminerons la première branche de la courbe qui partira de l'origine des coordonnées pour s'élever

insensiblement, descendre ensuite et arriver à l'axe des abscisses; en faisant $v = 1$, et en donnant encore à x des valeurs comprises entre zéro et l'unité, nous déterminerons une deuxième branche semblable à la première à part une courbure un peu plus prononcée; et ainsi de suite pour une troisième, quatrième branche, etc. En un mot, il y aura autant de branches composées de deux parties à peu près symétriques, que n (soit $v + x$) renfermera d'unités. Chaque taux aura d'ailleurs une courbe distincte, dont la courbure sera d'autant plus grande que celui-ci sera lui-même plus élevé. C'est ce que nous représente la figure suivante : nous avons seulement exagéré les valeurs de y portées sur l'axe des ordonnées, relativement aux valeurs correspondantes de n portées sur l'axe des abscisses, afin de rendre plus sensibles les détails que nous venons de donner[1].



Nous venons de dire que chaque branche de la courbe est composée de deux parties à peu près symétriques : c'est ce qui résulte en effet de la détermination du point culminant. Voici les chiffres que nous avons trouvés pour ce qui concerne la première branche seulement :

TAUX.	VALEUR MAXIMUM DE y.	VALEUR DE x CORRESPONDANT AU MAXIMUM	
		exp. en fract. d'année	exprim. en jours.
$\frac{1}{8}$ %	0,000000000000000...	0,5000000	182,50
1 %	0,000012437896462...	0,5004145	182,65
2 %	0,000049506298607...	0,5008251	182,80
3 %	0,000110844163317...	0,5012316	182,95
4 %	0,000196099376199...	0,5016342	183,10
5 %	0,000304928444646...	0,5020329	183,24
6 %	0,000436996204315...	0,5024278	183,38

[1] Quoique notre dessin n'ait pas été rendu très-fidèlement par le graveur, entre autres parties, les courbes m, m', m'', qui doivent s'infléchir légèrement à droite (du côté des x positifs), il fera cependant comprendre d'une manière générale ce que nous avions en vue.

En multipliant successivement les valeurs maximum de y données ci-dessus, par la 1^{re}, 2^{me}, 3^{me} .... n^{me} puissance de $(1+r)$, on aura les valeurs maximum de y, pour la 2^{me}, 3^{me}, ... $(n+1)^{me}$ branche. En un mot, la courbure de chaque branche (de la même courbe) croîtra proportionnellement aux puissances de $(1+r)$; de sorte que pour le 6 %, par exemple, celle de la 12^{me} branche sera, à très-peu près, double de celle de la première. Enfin, en donnant à r, à partir de zéro, des valeurs très-rapprochées, le lieu géométrique de tous les points culminants des courbes ainsi formées, donnera pour chaque branche une nouvelle courbe que nous désignons par m.

Il semblerait jusqu'ici que l'écart dont nous venons de parler dût porter le nom d'erreur plutôt que celui de paradoxe : c'est même ainsi que nous étions tout d'abord porté à le qualifier; mais, après un examen un peu plus approfondi, et surtout grâce à la méthode des intérêts composés infinitésimaux, qui jette un nouveau jour sur cette question, nous avons changé d'opinion à cet égard.

Ce qui empêche de comprendre cette différence, très-remarquable d'ailleurs, c'est qu'il est difficile de se représenter ce que doit être une capitalisation fractionnaire. Pour nous en rendre compte, tâchons de relier d'une manière uniforme la capitalisation entière à la capitalisation fractionnaire, au moyen d'une capitalisation continue. Déterminons pour cela le taux infinitésimal correspondant au taux ordinaire, et mettons-le à la place de ce dernier dans la formule $S = C(1+r_1)^n$; nous aurons (voir la fin du premier problème) $S = C(e^r)^n = C.\ e^{rn}$, ou en remettant à la place de r sa valeur :

$$S = C(1+r_1)^n = C.\ e^{n.\ \text{log. hyp. } (1+r_1)}$$

Ainsi, il sera toujours possible, sans que la valeur de S change, de passer de la méthode ordinaire à la méthode infinitésimale, quelle que soit d'ailleurs la valeur de n.

Afin de mieux fixer les idées, vérifions sur un exemple particulier ce que nous venons de démontrer; faisons $C = 1000$, $r_1 = 0{,}05$ et $n = 15\ ^1/_2$. Les deux formules ci-dessus nous donnent :

$$S = 1000\ (1{,}05)^{\frac{31}{2}} = 2136{,}26$$

$$S = 1000.\ e^{\frac{31}{2}\ \text{log. hyp. } 1{,}05} = 1000.\ e^{\frac{31}{2} \times 0{,}04879016..} = 2136{,}26$$

or, comme ce dernier résultat, fourni par une capitalisation continue, est identique au premier, il est évident que la capitalisation entière des intérêts composés ordinaires se rattache d'une manière uniforme à la capitalisation fractionnaire, ce qui légitime en quelque sorte cette dernière. Ceci nous explique aussi parfaitement bien la différence entre les deux expressions [A] et [B]; car, dès le moment qu'en plaçant un capital à intérêts composés annuels et au 5 %, on

retire, au bout d'un *espace de temps quelconque,* exactement la même somme que si ce capital était placé à intérêts composés infinitésimaux à raison de 4,879 pour cent l'an, il est évident que si l'on compte, pour la période de temps fractionnaire, l'intérêt simple au 5 %, on aura une somme trop forte, puisque le taux ne sera égal au 5 % qu'à la fin de l'année seulement, alors qu'il aura été *chemin faisant* et pendant l'année entière, mis au bénéfice de la capitalisation continue. Nous pourrions, à ce point de vue, suivre les variations de la différence; mais, comme ce sujet a déjà été traité longuement un peu plus haut, nous n'y reviendrons pas.

Ce que nous venons de dire nous porte à croire que l'interprétation la plus naturelle qu'on puisse donner de cette différence, c'est que la formule des intérêts composés annuels pose pour condition que les intérêts ne peuvent être touchés qu'à la fin de l'année, puisqu'ils ne sont aptes à porter intérêt qu'au bout de ce temps. De sorte que si l'on veut retirer un capital dans le courant de l'année, le débiteur sera bien tenu de rembourser la somme telle qu'elle était à la fin de la dernière capitalisation; mais, quant à l'intérêt simple sur cette somme pendant la partie fractionnaire de l'année, il aura le droit de déduire une espèce d'escompte pour cause d'anticipation de paiement. Il serait même intéressant de passer de l'expression [A] à l'expression [B] au moyen des considérations que nous venons de présenter; mais cela nous entraînerait un peu loin, car la nature de cet escompte n'est pas aussi facile à déterminer qu'on pourrait le croire au premier abord.

Quoique nous venions de justifier la formule des intérêts composés ordinaires à exposant fractionnaire, relativement à l'écart que nous avons signalé, elle n'en reste pas moins défectueuse, en ce sens qu'elle n'indique pas clairement par elle-même, et sans le secours de la méthode infinitésimale, ce qu'il faut entendre par une capitalisation fractionnaire; de sorte qu'elle a pu faire et qu'elle peut faire encore des dupes très-facilement.

III

Du taux annuel et du taux journalier. Avantages que présenterait ce dernier au point de vue du commerce proprement dit.

Le taux de l'intérêt n'a pas toujours été fixé à raison de tant pour cent l'an, comme il est généralement fixé aujourd'hui; car, il y a à peu près une centaine d'années, on prêtait au denier 20, 25, etc., c'est-à-dire que l'intérêt restait fixe et que le capital variait suivant la rareté ou l'abondance des capitaux, ou, pour nous servir d'une

expression de banque, l'intérêt formait le certain, et le capital l'incertain, dans le rapport qui déterminait le taux de l'intérêt. Aujourd'hui même, l'intérêt de tous les fonds publics est encore fixé de cette manière, car la rente reste fixe, et le capital varie suivant le crédit plus ou moins grand dont jouissent les gouvernements; il en est de même de beaucoup d'autres valeurs qui se négocient journellement dans les bourses de commerce.

Nous n'avons rien à dire sur la nouvelle manière de fixer le taux de l'intérêt, qui nous paraît d'ailleurs préférable à l'ancienne; mais, ce que nous regrettons vivement, c'est qu'on n'ait pas adopté le jour pour unité de temps, au lieu d'adopter l'année, comme on l'a fait; en d'autres termes, nous eussions préféré de beaucoup le taux journalier au taux annuel, pour tout ce qui concerne le commerce proprement dit. En effet, pourquoi adopter ce dernier taux pour l'escompte des effets de commerce, le règlement des comptes courants, etc., etc., alors que le temps relatif aux sommes dont on a à calculer les intérêts est presque constamment au-dessous de l'année? n'est-il pas évident que lorsque le temps est fractionnaire, les calculs deviennent plus longs et ce qu'il y a de plus fâcheux encore, prêtent souvent à l'arbitraire?

Pour mieux faire ressortir ces deux inconvénients, voyons d'abord comment les choses se passent dans le commerce. On calcule ordinairement les intérêts en faisant usage de ce qu'on appelle la table des diviseurs, dont nous allons voir tout à l'heure l'origine. Lorsque le temps est exprimé en jours, et c'est ce qui arrive toujours dans le commerce, l'intérêt a d'une somme s'obtient en faisant usage de la formule suivante :

$$a = \frac{C \times n \times t}{365 \times 100} \quad ;$$

on multiplie d'abord le capital par le nombre de jours, et le produit porte le nom de nombre; puis, pour ne pas avoir à multiplier ce produit par le taux et à diviser ensuite le nouveau produit par 36000, 36500, 36600, suivant *la longueur qu'on veut bien donner à l'année,* on fait disparaître le taux en divisant haut et bas par t; le quotient de la division de 36000, 36500 ou 36600, par le taux, porte le nom de *diviseur;* et comme il reste constant pour tous les calculs où l'on fait usage du même taux, on n'a qu'à le déterminer une fois pour toutes et à le consulter chaque fois qu'on en a besoin.

Voici du reste quelques-uns de ces diviseurs dont l'usage nous paraît être hors de saison, surtout dans un temps de progrès comme le nôtre :

Taux.	36000	36500	36600
2	18000	18250	18300
2 1/2	14400	14600	14640
3	12000	12166..	12200
3 1/2	10285..	10428..	10457..
4	9000	9125	9150
4 1/2	8000	8111..	8133..
5	7200	7300	7320
5 1/2	6545..	6636..	6654..
6	6000	6083..	6100

En jetant un coup-d'œil sur ces chiffres, on peut s'assurer que dans beaucoup de cas (surtout lorsqu'on compte l'année telle qu'elle est, c'est-à-dire de 365 ou de 366 jours), l'opération qu'on doit effectuer est plus longue que si l'on multipliait les nombres par le taux pour diviser ensuite le produit par 360, 365 ou 366 (nous supprimons le nombre 100, parce qu'il est facile d'en tenir compte en retranchant deux chiffres à la droite des nombres, comme on le fait souvent dans le règlement des comptes courants). Si nous avions donné les diviseurs pour les taux 2 1/4, 2 3/4, 3 1/4, 3 3/4, etc., la remarque que nous venons de faire serait plus frappante encore.

Mais l'inconvénient le plus grave, selon nous, qui naisse de ce système d'intérêt, basé sur le taux annuel, c'est l'espèce d'anarchie qui règne dans la détermination du diviseur; car, il faut bien le reconnaître, ici comme ailleurs malheureusement,

... La raison du plus fort est toujours la meilleure.

Ainsi beaucoup de banques, et à leur tête la Banque nationale de Turin et la Banque de France, si nous ne nous trompons, comptent dans leurs escomptes les mois à 28, 30 et 31 jours, et ne comptent l'année qu'à 360 jours seulement. En se servant de l'année dite commerciale, comme étant en effet beaucoup plus commode que l'année civile, à cause de ses diviseurs, il faudrait au moins compter tous les mois de 30 jours. C'est ce que font généralement les banquiers genevois, qui sont en cela bien plus logiques que leurs confrères d'autres pays; mais, pour être tout à fait logique, il faudrait se servir de l'année civile et non pas de l'année commerciale, qui devrait bientôt avoir fini son temps.

Les deux inconvénients que nous venons de passer en revue disparaîtraient complètement si l'on substituait au taux annuel le taux journalier. Il est évident, en effet, que si l'on adoptait ce dernier taux, il n'y aurait jamais à s'inquiéter du nombre de jours qu'il y a dans l'année, car une fois l'intérêt journalier d'une somme trouvé, on n'aurait qu'à le multiplier par le nombre de jours (plus grand ou plus petit que 365, peu importe) pour avoir l'intérêt de cette somme pendant un temps déterminé.

Il nous reste maintenant à examiner comment on pourrait fixer ce taux.

Il ne serait pas possible, comme il est facile de s'en convaincre, de conserver le nombre 100 pour capital fixe, soit pour terme de comparaison; car, l'unité de temps étant 365 fois plus petite, le taux serait réduit dans la même proportion, de sorte qu'il resterait constamment fractionnaire, ce qui ne changerait en rien la disposition des calculs dont nous avons parlé plus haut. Mais, si l'on prenait pour capital fixe, le nombre 100000, qui est le plus rationnel qu'on puisse choisir, son intérêt d'un jour pourrait se fixer très-facilement : le nombre exprimant le taux journalier serait au nombre exprimant le taux annuel actuel, dans le rapport de 1000 à 365, ou de 1 à 0,365. Ainsi, au lieu de calculer l'intérêt à raison de *tant pour cent l'an*, on le calculerait à raison de **tant pour cent mille le jour;** et

le 1 p^r^ c/m le jour correspondrait au 0,36 ½ p^r^ % l'an;
le 2 » » 0,73 »
. . . . . .
le 8 » » 2,92 »
le 9 » » 3,28 ½ »
le 10 » » 3,65 »
le 11 » » 4,01 ½ »
le 12 » » 4,38 »
le 13 » » 4,74 ½ »
le 14 » » 5,11 »
le 15 » » 5,47 ½ »
le 16 » » 5,84 »
le 17 » » 6,20 ½ »
etc., etc.

Rien n'empêcherait d'ailleurs de prendre des taux intermédiaires, quoiqu'il soit très-probable qu'une fois la transition opérée on pût s'en dispenser dans la majorité des cas; car, les taux entiers journaliers offriraient une échelle à peu près aussi variée que les taux annuels marchant par tiers. Quant au nombre 100000, qui paraît d'abord un peu considérable, il n'a rien cependant qui doive effrayer les négociants, beaucoup plus habitués de nos jours à compter par millions que par dizaines.

Supposons que la Banque de France et la Banque d'Angleterre prennent l'initiative de la réforme que nous proposons; elles annoncent au public qu'à partir d'un tel jour, le taux annuel sera remplacé par le taux journalier; ce jour arrive et la substitution se fait sans difficulté, car la chose est bien moins difficile à exécuter qu'un changement d'unité monnétaire ou de mesure quelconque; tous les banquiers et les négociants se mettent au pas; quelque temps se passe, et l'on est alors tout étonné de n'avoir pas pensé plus tôt à ce changement, moins radical d'ailleurs que celui qui s'est opéré il y a à peu près un siècle, et dont nous avons dit quelques mots en commençant cet article.

Arrivons maintenant à l'application, et voyons les avantages de ce changement. Une simple règle de trois nous donne la formule suivante :

$$a = \frac{C \times n \times t}{100000}$$

laquelle, traduite en langage ordinaire, nous indique que *pour trouver l'intérêt d'une somme C placée au t pour c/m le jour, pendant n jours, il faut multiplier le nombre* (produit du capital par le nombre de jour) *par le taux, puis séparer cinq chiffres du produit à partir de la droite.* De sorte que dans les comptes courants, les bordereaux d'escompte, etc., rien ne serait changé dans les nombres; seulement, au lieu d'avoir à diviser la somme ou la différence de ces nombres par le diviseur avec lequel nous avons déjà fait connaissance, on la multiplierait par le taux, opération évidemment beaucoup plus simple que la première. Quant à la division par 100000, nous n'en parlons pas, puisqu'une simple virgule suffit. Ainsi, nous le répétons, les calculs seraient rendus plus simples; mais, ce qu'il y aurait de plus satisfaisant encore, c'est qu'il n'y aurait qu'une seule manière de compter l'intérêt, et partant, un seul résultat possible.

Les huit formules des intérêts simples (voir page 5) que nous avons placées en regard de celles des intérêts composés annuels et de celles des intérêts composés infinitésimaux, pourraient être appliquées directement, en remplaçant seulement r par $\frac{t}{100000}$; la quantité n représenterait alors des jours et non pas des années.

Afin qu'on ne se méprenne pas sur notre pensée, nous rappelons encore que le changement que nous proposons concerne essentiellement le taux de l'escompte et en général les questions d'intérêt se rapportant au commerce proprement dit, parce que dans ces cas-là le temps reste presque constamment au-dessous de l'année. Quant aux prêts à longues échéances ou à échéances indéterminées, dont les intérêts se paient régulièrement chaque année, rien n'empêcherait de conserver le taux annuel.

NOTE.

J'ai eu l'occasion, l'hiver dernier, de demander à M. Duhamel, membre de l'Institut de France, si la question des intérêts composés infinitésimaux n'avait encore été traitée nulle part; il m'a répondu qu'il croyait que Bezout l'avait traitée dans son ouvrage d'algèbre et que M. Binet devait en avoir fait l'objet d'un mémoire remis à l'Institut. J'ai parcouru l'ouvrage de Bezout sans trouver ce que j'y cherchais, car je n'y ai vu en fait d'intérêt, que la théorie des intérêts composés ordinaires. Quant au mémoire de M. Binet, je n'en ai pas pris connaissance; j'ignore même s'il a été publié.

Depuis que mon travail a été terminé, on m'a fait voir une solution du problème II (de la 1re partie), tirée d'un ouvrage italien dont on ne m'a pas indiqué le titre; mais elle n'est donnée qu'en passant pour ainsi dire et comme un simple exercice de calcul intégral; elle n'a d'ailleurs rien de commun avec celle que j'ai donnée, si ce n'est le résultat, qui est le même.

Au reste, la question des intérêts composés infinitésimaux est trop naturelle pour qu'elle ne se soit pas présentée plus d'une fois à l'esprit des auteurs d'ouvrages d'analyse; ce qui m'étonne seulement, c'est qu'on n'en donne pas la théorie générale dans tous les traités d'algèbre un peu complets. Ce serait une intéressante application des séries et une excellente introduction au calcul infinitésimal.

Lausanne, février 1857.

A.-L. Dutoit.