Note relative à la décomposition d'une fonction rationnelle en fractions simples

Autor(en): **Amstein, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **17 (1880-1881)**

Heft 84

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-259349

NOTE

RELATIVE A LA

DÉCOMPOSITION D'UNE FONCTION RATIONNELLE

EN FRACTIONS SIMPLES

PAR LE

Dr H. AMSTEIN
Professeur à l'Académie de Lausanne.

Supposons qu'il s'agisse de décomposer en fractions simples la fonction $\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}$, où $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ représentent des fonctions rationnelles entières. Au point de vue de la théorie, la meilleure méthode pour effectuer cette décomposition est celle qui ne se modifie pas, quelle que soit la nature des racines de l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$. Cependant, en l'appliquant on s'aperçoit bientôt que les cas où $\mathrm{F}(x) = 0$ possède des racines imaginaires multiples entraînent surtout certaines longueurs dans les calculs numériques. D'ailleurs, comme l'imaginaire doit le plus souvent disparaître des résultats, il est bon quelquefois d'éviter, autant que possible, l'introduction des nombres imaginaires dans les calculs. M. *W. Denzler*, dans un mémoire intitulé : « Ueber die Zerlegung echt gebrochener Functionen (Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellsch. in Zurich, vol. XVII, cah. 3), » indique une méthode qui s'applique avantageusement aux cas où la fonction $\mathrm{F}(x)$ renferme des facteurs de la forme $(ax^2 + 2bx + c)^m$. Elle consiste à déterminer par de simples divisions successives les constantes M et N des fractions réelles de la forme

$$\frac{Mx+N}{(ax^2+2bx+c)^m}.$$

Dans beaucoup de cas, cette méthode conduit rapidement à la décomposition cherchée.

La présente note a pour but d'appeler l'attention du lecteur sur une méthode de décomposition qui, dans quelques cas de racines imaginaires multiples, est peut-être plus expéditive que les méthodes recommandées dans les livres destinés à l'enseignement.

a) Soit à décomposer la fonction rationnelle

$$\frac{f(x)}{(x^2+\alpha^2)^m}$$

On sait que l'on peut en général écrire

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{(x^2+\alpha^2)^m} = \frac{M_0x+N_0}{(x^2+\alpha^2)^m} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+\alpha^2)^{m-1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{M_{m-1}x+N_{m-1}}{(x^2+\alpha^2)} + E(x),$$

où α, M_0, N_0 ; M_1, N_1 ; ..... M_{m-1}, N_{m-1} signifient des nombres réels, et où $E(x)$ désigne une fonction entière qui peut devenir une constante, ou zéro. En multipliant les deux membres de cette égalité par $(x^2+\alpha^2)^m$, il vient

$$(2) \qquad f(x) = (M_0x+N_0) + (M_1x+N_1)(x^2+\alpha^2) + \dots$$
$$\dots + (M_{m-1}x+N_{m-1})(x^2+\alpha^2)^{m-1} + E(x)(x^2+\alpha^2)^m.$$

Cette égalité prouve qu'il doit être possible de développer $f(x)$ suivant les puissances entières et ascendantes de $(x^2+\alpha^2)$, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours aux quantités imaginaires. En effet, la fonction entière $f(x)$ peut se mettre sous la forme

$$f(x) = (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots) + x(a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + \ldots),$$

où $a_0, a_1 \ldots$ sont des constantes réelles données.

Si l'on pose

$$x^2 + \alpha^2 = u,$$

d'où

$$x^2 = u - \alpha^2$$

et que l'on conserve la puissance première de x qui multiplie le polynome $(a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + \ldots)$, il vient

$$\begin{aligned} f(x) = {} & [a_0 + a_2(u - \alpha^2) + a_4(u - \alpha^2)^2 + \ldots] + \\ & + x[a_1 + a_3(u - \alpha^2) + a_5(u - \alpha^2)^2 + \ldots], \end{aligned}$$

et en ordonnant suivant les puissances ascendantes de u

$$\begin{aligned} (3)\ f(x) = {} & [(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4 - \ldots) + (a_1 - a_3\alpha^2 + a_5\alpha^4 - \ldots)x] + \\ & + [(a_2 - 2a_4\alpha^2 + \ldots) \quad + (a_3 - 2a_5\alpha^2 + \ldots \quad)x]u + \\ & + [(a_4 - \ldots\ldots) \quad + (a_5 - \ldots\ldots\ldots\ldots)x]u^2 + \ldots \end{aligned}$$

La comparaison du second membre de cette égalité avec le second membre de l'égalité (2) permet de déterminer les constantes M_0, N_0; M_1, N_1, etc. On trouve

$$\begin{aligned} & N_0 = a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4 - \ldots; && M_0 = a_1 - a_3\alpha^2 + a_5\alpha^4 - \ldots \\ & N_1 = a_2 - 2a_4\alpha^2 + \ldots; && M_1 = a_3 - 2a_5\alpha^2 + \ldots \\ & N_2 = a_4 - \ldots; && M_2 = a_5 - \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On remarque en même temps : 1° qu'il est inutile de pousser le développement de $f(x)$ suivant les puissances de u au-delà du terme en u^{m-1}, et 2° que l'on peut détacher la fonction entière $E(x)$ de la fonction rationnelle proposée avant ou après la décomposition de cette dernière.

Exemple. Soit à décomposer

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^5 - x^4 + 20x^3 - 15x^2 + 100x - 60}{(x^2+9)^3}.$$

Posant
$$x^2 + 9 = u$$

et développant le numérateur suivant les puissances ascendantes de u, il vient

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(x-1)(u-9)^2 + (20x-15)(u-9) + 100x - 60}{u^3} =$$

$$= \frac{x-6}{u^3} + \frac{2x+3}{u^2} + \frac{x-1}{u}.$$

b) Lorsque le dénominateur $F(x)$ est de la forme

$$(x^2 + \alpha^2)^m \varphi(x^2)$$

et que $\varphi(x^2)$ est une fonction entière et paire de x, telle que

$$\varphi(x^2) = b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \dots,$$

on peut écrire

$$\frac{f(x)}{\varphi(x^2)} = (M_0 x + N_0) + (M_1 x + N_1)(x^2 + \alpha^2) + \dots +$$
$$+ (M_{m-1} x + N_{m-1})(x^2 + \alpha^2)^{m-1} + g(x)(x^2 + \alpha^2)^m,$$

où $g(x)$ est une fonction rationnelle qui ne devient pas infinie lorsque $(x^2 + \alpha^2)$ s'annule. Dans ce cas on posera encore

$$x^2 = u - \alpha^2$$

et l'on développera $\frac{f(x)}{\varphi(x^2)}$ suivant les puissances entières et ascendantes de u. Dans ce but, au lieu d'appliquer directement le théorème de Maclaurin à la fonction $\frac{f(x)}{\varphi(x^2)}$, il est généralement plus simple de développer séparément le numérateur et le dénominateur de cette fonction suivant les puissances de u, et d'effectuer ensuite la division jusqu'au terme en u^{m-1}. Ce procédé est justifié par un théorème bien connu de la théorie des fonctions.

Exemple :

$$(1)\quad \frac{x^2+x+1}{x^4(x^2+4)^3} = \frac{A_0}{x^4} + \frac{A_1}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x} + $$
$$+ \frac{M_0x+N_0}{(x^2+4)^3} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+4)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+4}.$$

Pour déterminer les constantes A on multiplie les deux membres de cette égalité par x^4 :

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+4)^3} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots..$$

et on développe ensuite le premier membre de l'égalité ainsi obtenue suivant les puissances entières et ascendantes de x. Il vient :

$$(2)\quad \frac{1+x+x^2}{64+48x^3+\ldots} = \frac{1}{64} + \frac{1}{64}x + \frac{1}{256}x^2 - \frac{3}{256}x^3 + \ldots$$

Par conséquent

$$A_0 = \frac{1}{64},\ A_1 = \frac{1}{64},\ A_2 = \frac{1}{256},\ A_3 = -\frac{3}{256}.$$

Afin de trouver la valeur numérique des constantes M et N, on pose

$$x^2+4=u,$$

et, après avoir multiplié les deux membres de l'égalité (1) par u^3, on développe

$$\frac{x^2+x+1}{x^4}$$

suivant les puissances de u. On obtient successivement :

$$\frac{x^2+x+1}{x^4}=\frac{u-4+x+1}{(u-4)^2}=\frac{x-3+u}{16-8u+u^2} \tag{3}$$

$$\begin{array}{l|l}
x-3 \qquad + \quad u & 16-8u+u^2 \\
\cline{2-2}
x-3-\dfrac{x-3}{2}u+\dfrac{x-3}{16}u^2 & \dfrac{x-3}{16}+\dfrac{x-1}{32}u+\dfrac{3x-1}{256}u^2+\ldots \\
\cline{1-1}
\qquad \dfrac{x-1}{2}u-\dfrac{x-3}{16}u^2 & \\
\qquad \dfrac{x-1}{2}u-\dfrac{x-1}{4}u^2+\ldots & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad \dfrac{3x-1}{16}u^2-\ldots &
\end{array}$$

On a donc trouvé

$$M_0x+N_0=\frac{x-3}{16},\quad M_1x+N_1=\frac{x-1}{32},\quad M_2x+N_2=\frac{3x-1}{256}$$

et la décomposition cherchée est la suivante :

$$\frac{x^2+x+1}{x^4(x^2+4)^3}=\frac{1}{64}\frac{1}{x^4}+\frac{1}{64}\frac{1}{x^3}+\frac{1}{256}\frac{1}{x^2}-\frac{3}{256}\frac{1}{x}+$$
$$+\frac{1}{16}\frac{x-3}{(x^2+4)^3}+\frac{1}{32}\frac{x-1}{(x^2+4)^2}+\frac{1}{256}\frac{3x-1}{x^2+4}.$$

c) Tous les autres cas possibles peuvent facilement être ramenés aux deux précédents. Supposons, par exemple, que l'on ait à décomposer la fonction

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{(x^2+2ax+b)^m\,(x^2+2a_1x+b_1)^n\,(x-c)^p},$$

où
$$b-a^2>0 \quad \text{et} \quad b_1-a_1^2>0$$

et qu'il s'agisse de déterminer les numérateurs des fractions dont les dénominateurs sont des puissances de $(x^2+2ax+b)$.

En posant

$$x+a=y,$$
$$b-a^2=\alpha^2,$$

le quotient proposé prendra d'abord la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f_1(y)}{(y^2+\alpha^2)^m (y^2+2a_2y+b_2)^n (y-c_1)^p}.$$

Afin de n'avoir plus que des puissances paires de y dans le dénominateur, on multipliera le numérateur et le dénominateur de cette expression par

$$[(y^2+b_2)-2a_2y]^n (y+c_1)^p,$$

ce qui donne

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f_1(y)[(y^2+b_2)-2a_2y]^n (y+c_1)^p}{(y^2+\alpha^2)^m [(y^2+b_2)^2-4a_2^2y^2]^n (y^2-c_1^2)^p}.$$

Cette dernière forme rentre complètement dans le cas précédent. On pourra dans tous les autres cas opérer comme dans ce cas particulier.

Observation 1. Cette méthode n'abrège vraiment les calculs numériques que dans les cas *a)* et *b)*, et en outre dans tous ceux où $f(x)$ est, soit une constante, soit une fonction entière d'un degré peu élevé.

Observation 2. S'il s'agit de l'intégrale

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx$$

et qu'on ne veuille pas employer des formules de réduction pour effectuer les intégrales de la forme

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+\alpha^2)^m}\,dx,$$

la méthode des coefficients indéterminés paraît être la plus simple. On posera, en conséquence

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+\alpha^2)^m}\,dx = \frac{A_0x+B_0}{(x^2+\alpha^2)^{m-1}} + \frac{A_1x+B_1}{(x^2+\alpha^2)^{m-2}} + \dots +$$

$$+ \frac{A_{m-2}x+B_{m-2}}{x^2+\alpha^2} +$$

$$+ A_{m-1}\log \text{nép.}(x^2+\alpha^2) + A_m \operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha} + \text{Const.}$$

Les constantes A_0, B_0, ..., A_{m-1} et A_m se déterminent en différentiant les deux membres de cette égalité et en comparant ensuite les termes analogues.

Exemple :

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}=\frac{P}{(x-1)}+\frac{M_0x+N_0}{(x^2+1)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}.$$

D'abord $$P=\left[\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\right]_{x=1}=\frac{1}{2}.$$

Pour trouver M_0, N_0, M_1 et N_1, il faut développer

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x+1)\,(x+1)}{(x-1)\,(x+1)}=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$$

suivant les puissances entières et ascendantes de $(x^2+1)=u$. Il vient

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\frac{u-1+2x+1}{u-2}=\frac{2x+u}{-2+u}=-x-\frac{x+1}{2}u\ldots;$$

donc $$M_0x+N_0=-x,$$

$$M_1x+N_1=-\frac{x+1}{2}$$

et $$\frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x-1)}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x^2+1}.$$

L'intégrale de cette fonction prend la forme

$$\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x-1)}dx=\int\left[\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x^2+1}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\log\text{ nép.}\,(x-1)+\frac{Ax+B}{x^2+1}+$$

$$+\;C\log\text{ nép.}\,(x^2+1)+D\operatorname{arctg}x+\text{Const.}$$

Si l'on différentie cette égalité

$$\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+$$

$$+\frac{(x^2+1)A-(Ax+B)2x}{(x^2+1)^2}+\frac{2Cx}{x^2+1}+\frac{D}{x^2+1}$$

ou

$$-\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{-Ax^2+A-2Bx}{(x^2+1)^2}+\frac{2Cx+D}{x^2+1}=$$

$$=\frac{-A(x^2+1)+2(A-Bx)}{(x^2+1)^2}+\frac{2Cx+D}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{A}{x^2+1}+\frac{2(A-Bx)}{(x^2+1)^2}+\frac{2Cx+D}{x^2+1}=$$

$$=\frac{2(A-Bx)}{(x^2+1)^2}+\frac{2Cx+D-A}{x^2+1}$$

et que l'on compare les termes analogues dans les deux membres, on trouve

$$2(A-Bx)=-x,$$

$$2Cx+D-A=-\frac{x+1}{2},$$

d'où l'on tire

$$A=0,\quad B=\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{4},\quad D=-\frac{1}{2},$$

ensorte que finalement

$$\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}\,dx=\frac{1}{2}\log\text{nép}\,(x-1)+\frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}-$$

$$-\frac{1}{4}\log\text{nép.}\,(x^2+1)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\text{Const.}$$

*