Note sur la résolution numérique des équations

Autor(en): **Amstein, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **20 (1884-1885)**

Heft 90

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-260132

NOTE

SUR LA

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS

PAR LE

Dr H. AMSTEIN
professeur à l'Académie de Lausanne.

La solution d'un grand nombre de problèmes dépend en dernier lieu de la résolution d'une équation algébrique ou transcendante. Aussi, de tout temps et à juste titre, les mathématiciens se sont-ils préoccupés des méthodes pouvant servir à la résolution numérique des équations. Aujourd'hui on en possède plusieurs qui toutes peuvent fournir de bons résultats, à tel point qu'il paraît presque oiseux d'en chercher encore d'autres. Cependant, en appliquant les diverses méthodes existantes on s'aperçoit bientôt que chacune d'elles présente, à côté d'avantages réels, certains inconvénients qui, dans beaucoup de cas, en rendent l'application extrêmement laborieuse. Il est probable que ces inconvénients ne pourront jamais être évités entièrement, mais, tant qu'ils subsisteront, toute méthode nouvelle capable d'abréger le travail purement mécanique sera accueillie favorablement par les intéressés.

Après avoir jeté un coup d'œil rapide sur les principales méthodes actuellement en usage, pour en signaler les avantages et les inconvénients, nous offrons au lecteur, dans cette note, une autre méthode que nous appellerons la *méthode des trois points*, et qui mérite peut-être une modeste place à côté de celles qui sont déjà connues. Est-elle nouvelle? Nous l'ignorons et nous en doutons même, tant l'idée qui y a conduit paraît simple. Mais, comme elle nous a rendu service en mainte occasion, nous désirons qu'elle soit utile à d'autres et c'est le seul motif qui nous engage à la soumettre au lecteur compétent.

1. *La regula falsi.* La méthode dite la *regula falsi* est sans contredit la plus connue. Non-seulement elle a dû se présenter tout naturellement à l'esprit, mais elle est facile à retenir et son application est simple.

L'équation à résoudre est

$$y = f(x) = 0$$

Soient x_1 et x_2 deux valeurs approximatives de l'une de ses racines réelles, ensorte que la vraie valeur de la racine se trouve comprise entre x_1 et x_2, et soient y_1 et y_2 les valeurs correspondantes, l'une positive, l'autre négative, de la fonction $f(x)$; alors on peut écrire

$$x_3 = x_1 - y_1 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$$

ou

$$x_3 = x_2 - y_2 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$$

ou encore en faisant la demi-somme

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$$

et cette relation fournit en général une meilleure valeur pour x. L'on voit que, interprétée géométriquement et en coordonnées rectangulaires, la *regula falsi* consiste à substituer au point d'intersection de la courbe $y = f(x)$ avec l'axe des X le point d'intersection avec le même axe de la corde joignant les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de la courbe. Répété un nombre suffisant de fois, ce procédé permet évidemment de pousser l'approximation aussi loin qu'on voudra. Mais l'application en est souvent rendue laborieuse par la nécessité où l'on se trouve de calculer y pour chaque nouvelle valeur de x, calcul indispensable, soit pour contrôler la valeur trouvée, soit pour préparer une nouvelle application de la formule, et d'autant plus pénible que la valeur de x devient plus approchée. Le mérite de cette méthode, d'ailleurs si utile et si commode, est encore diminué par la circonstance qu'elle ne permet pas d'apprécier d'avance le degré d'exac titude obtenue par chaque application de la formule.

2. *La méthode de Newton.* Soient $f(x) = 0$ l'équation proposée, $x = x_0$ une valeur approchée de la racine cherchée et h la correction, alors le théorème de Taylor donne

$$f(x_0 + h) = 0 = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + \ldots$$

d'où, en négligeant les termes qui, par rapport à h, sont d'un ordre supérieur au premier, on tire

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Cette formule exige la connaissance d'une seule valeur approchée de la racine et en même temps elle offre le moyen d'apprécier l'approximation. Car on peut aisément se rendre compte de l'influence que peut avoir le premier terme négligé $f''(x_0)\frac{h^2}{2}$. Par contre, la formule nécessite le calcul non-seulement de la fonction $f(x)$, mais encore de sa dérivée première $f'(x)$, et il serait facile de citer des cas où l'évaluation de $f'(x_0)$ est beaucoup plus longue que celle de $f(x_0)$.

Géométriquement, la méthode de Newton revient à remplacer la courbe $y = f(x)$ par sa tangente au point (x_0, y_0). De ce fait il ressort immédiatement que dans certains cas, faciles à reconnaître, les valeurs successives de x, au lieu de tendre peu à peu vers leur limite, s'en écartent de plus en plus.

3. *La méthode de Horner* est une modification très ingénieuse de la précédente. Elle s'applique seulement aux équations algébriques; mais dans ce cas elle se recommande surtout par la simplicité du procédé qu'elle emploie et par la facilité d'exercer un contrôle sur l'approximation atteinte.

4. La méthode de Newton a encore été perfectionnée au moyen de la série de Maclaurin qui permet l'inversion de la fonction $f(x)$. On obtient sans difficulté la formule

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)]} - \frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3}\,\frac{[f(x_0)]^2}{2} +$$
$$+ \frac{f'(x_0)f'''(x_0) - 3[f''(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^5}\,\frac{[f(x_0)]^3}{6}\cdots$$

et il serait aisé d'augmenter le nombre des termes de cette série. Chaque nouveau terme contrôle la valeur de x obenue par les termes précédents. Plus on prendra de termes, plus l'approximation sera grande. Mais en général on se bornera aux trois ou quatre premiers termes, vu que les calculs deviennent de plus en plus pénibles. La circonstance que cette formule renferme plusieurs dérivées successives de la fonction $f(x)$ est un inconvénient qui souvent en diminue la valeur pratique.

Géométriquement, cette méthode substitue à la courbe $y=f(x)$ ou $x=\varphi(y)$ la courbe osculatrice

$$x-x_0=\varphi'(y_0)\frac{y-y_0}{1}+\varphi''(y_0)\frac{(y-y_0)^2}{1.2}+\varphi'''(y_0)\frac{(y-y_0)^3}{1.2.3}$$

qui, au point (x_0, y_0), possède en général quatre points consécutifs communs avec la première.

Telles sont les méthodes que l'on préfère employer de nos jours. Beaucoup d'autres ont encore été inventées; les unes ne traitent que des équations algébriques, les autres n'ont presque plus qu'un intérêt historique, comme par exemple celle de Lagrange. Il n'entre pas dans nos vues de les énumérer toutes. D'ailleurs, ce qui vient d'être dit sur la *regula falsi* et la méthode de Newton suffira pour faire connaître les services que pourra rendre la méthode qui va suivre.

5. *La méthode des trois points.* Comme on vient de le voir, l'idée géométrique qui est à la base de toutes les méthodes pour le calcul approché des racines réelles d'une équation est au fond toujours la même, à savoir la substitution à la courbe $y=f(x)$ dans le voisinage de la racine cherchée d'une autre ligne dont le point d'intersection avec l'axe des X est facile à trouver. Ainsi, la *regula falsi* remplace la courbe donnée par une corde, la méthode de Newton y substitue une tangente, et la méthode de Newton modifiée une parabole osculatrice du deuxième ou du troisième ordre.

Afin d'éviter et l'approximation lente de la *regula falsi* et les longueurs de la méthode de Newton, il paraît naturel d'avoir recours à une section conique ayant trois points communs avec la courbe $y=f(x)$. Dès lors, la marche géométrique à suivre est très simple. On choisit dans le plan de la courbe $y=f(x)$ deux points arbitraires (x', y') et (x'', y'') qui, joints par des lignes droites aux trois points donnés (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) de cette courbe déterminent deux faisceaux de rayons projectifs dont les points (x', y') et (x'', y'') sont les centres. En considérant comme rayons correspondants deux droites passant par le même point de la courbe $y=f(x)$, la projectivité est bien établie et les deux faisceaux engendrent la section conique en question. Pour ne pas introduire des racines carrées dans les calculs, il faut que x soit une fonction uniforme de y. A cet effet, il suffit de choisir pour (x', y'), (x'', y''), par exemple, les points à l'infini des axes X et Y. Alors l'équation de la section conique prend la forme

$$xy + Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

De cette façon on substitue à la courbe $y = f(x)$ une hyperbole équilatère. Celle-ci devant passer par les points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), on a, pour déterminer les constantes A, B, C, les trois équations

$$\begin{aligned} x_1 y_1 + Ax_1 + By_1 + C &= 0 \\ x_2 y_2 + Ax_2 + By_2 + C &= 0 \\ x_3 y_3 + Ax_3 + By_3 + C &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Mais il s'agit seulement du rapport $\frac{C}{A}$, car l'équation (1) donne pour le point d'intersection de l'hyperbole avec l'axe des X, c'est-à-dire pour la valeur approchée de la racine cherchée de l'équation $f(x) = 0$,

$$y = 0, \quad x = -\frac{C}{A}.$$

Or, les équations (2) fournissent

$$x = -\frac{C}{A} = -\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3 y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 y_1 & y_1 & 1 \\ x_2 y_2 & y_2 & 1 \\ x_3 y_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

ou en développant numérateur et dénominateur

$$x = \frac{x_1 y_2 y_3 (x_2 - x_3) + x_2 y_3 y_1 (x_3 - x_1) + x_3 y_1 y_2 (x_1 - x_2)}{y_2 y_3 (x_2 - x_3) + y_3 y_1 (x_3 - x_1) + y_1 y_2 (x_1 - x_2)}.$$

De là on tire finalement

$$\text{I.}\quad x - x_3 = \frac{(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)\, y_3 (y_1 - y_2)}{y_2 y_3 (x_2 - x_3) + y_3 y_1 (x_3 - x_1) + y_1 y_2 (x_1 - x_2)}.$$

Telle est la formule que nous proposons et qui, dans beaucoup de cas, pourra donner de bons résultats. Afin d'en tirer le meilleur parti possible, on choisira pour x_1 et x_2 deux valeurs approchées de x ne différant entre elles que d'une unité d'un certain ordre décimal et en outre telles que la vraie valeur de x soit comprise entre x_1 et x_2 ; et pour x_3 on prendra la valeur intermédiaire fournie par la *regula falsi*

$$x_3 = x_1 - y_1 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}.$$

Cette méthode partage dans une certaine mesure l'inconvénient essentiel de la *regula falsi*, elle laisse le calculateur dans le doute sur l'approximation acquise par chaque application de la formule I. A cet égard, on peut cependant faire la remarque suivante : — En considérant la plus grande des différences $h = x_3 - x_1$ ou $h = x_2 - x_3$ comme un infiniment petit relatif du premier ordre, l'hyperbole devient une courbe osculatrice de la courbe $y = f(x)$. Il s'ensuit que la différence entre la valeur fournie par la formule I et la valeur exacte de x ne portera ordinairement que sur des quantités du troisième ordre de h.

Observation 1. L'hyperbole (1) n'est d'ailleurs pas la seule section conique pouvant remplacer avantageusement la courbe $y = f(x)$. En effet, la parabole

$$x = A + By + Cy^2 \tag{3}$$

se trouve exactement dans les mêmes conditions. Si l'on pose dans l'équation (3) $y = 0$, on obtient comme valeur approximative de x

$$x = A,$$

pourvu que les constantes A, B, C satisfassent aux équations

$$\begin{aligned} x_1 &= A + By_1 + Cy_1^2 \\ x_2 &= A + By_2 + Cy_2^2 \\ x_3 &= A + By_3 + Cy_3^2 \end{aligned} \tag{4}$$

qui donnent

$$x = \mathrm{A} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & y_1^2 \\ x_2 & y_2 & y_2^2 \\ x_3 & y_3 & y_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & y_3 & y_3^2 \end{vmatrix}} =$$

$$= -\frac{x_1 y_2 y_3 (y_2 - y_3) + x_2 y_3 y_1 (y_3 - y_1) + x_3 y_1 y_2 (y_1 - y_2)}{(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)(y_1 - y_2)}.$$

Enfin il vient

$$\text{II.} \quad x - x_3 = y_3 \frac{(x_2 - x_3) y_1 (y_1 - y_3) + (x_3 - x_1) y_2 (y_2 - y_3)}{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)}.$$

On reconnaît aisément dans cette formule les traces de la formule d'interpolation de Lagrange. Il suffit, en effet, d'échanger entre elles les variables x et y dans cette dernière et de poser ensuite $y = 0$ pour arriver immédiatement à la formule qui vient d'être donnée. Mais, tandis que les manuels et autres livres ne se servent ordinairement de la formule de Lagrange que pour déplacer la difficulté en substituant, par exemple, à une équation transcendante une équation algébrique non moins difficile à résoudre, la formule II conduit d'une manière sûre et facile à la racine cherchée.

Observation 2. Il n'est peut-être pas superflu de rappeler que toutes les formules indiquées cessent d'être applicables lorsque la dérivée première de la fonction $f(x)$ s'annule pour la racine en question.

Afin de mettre en lumière les avantages et les défauts de la méthode des trois points, cette note sera terminée par quelques exemples d'équations résolues au moyen de la formule I.

Exemple 1. Soit à déterminer la racine réelle de l'équation

$$f(x) = y = x^3 - 4x - 5 = 0.$$

D'abord on reconnaît facilement que la racine demandée est comprise entre 2,4 et 2,5. Soit donc

$$x_1 = 2{,}4\,, \qquad x_2 = 2{,}5\,,$$

alors les valeurs correspondantes de y sont

$$y_1 = -\,0{,}776\,, \qquad y_2 = 0{,}625.$$

Ensuite la *regula falsi* fournit

$$x_3 = 2{,}4 + \frac{0{,}776\,.\,0{,}1}{1{,}401} = 2{,}455$$

et la valeur correspondante de y est

$$y_3 = -\,0{,}023653625.$$

En introduisant ces valeurs

$$\begin{array}{lll} x_1 = 2{,}4\,, & y_1 = -\,0{,}776\,; & x_2 - x_3 = 0{,}045, \\ x_2 = 2{,}5\,, & y_2 = 0{,}625\,; & x_3 - x_1 = 0{,}055, \\ x_3 = 2{,}455\,, & y_3 = -\,0{,}023653625\,; & x_2 - x_1 = 0{,}1, \\ & & y_1 - y_2 = -\,1{,}401 \end{array}$$

dans la formule I, il vient

$$x - 2{,}455 = \frac{-\,0{,}045.0{,}055.1{,}401.y_3}{0{,}776.0{,}625.0{,}1 + y_3\,[0{,}625.0{,}045 - 0{,}776.0{,}055]} =$$
$$= 0{,}00167918.$$

La nouvelle valeur approchée de x est ainsi

$$x = 2{,}45667918$$

tandis que la valeur exacte jusqu'au 8^{me} ordre décimal est

$$x = 2{,}45667834.$$

La différence D entre la valeur donnée par la formule I et la valeur exacte est donc

$$D = +\,0{,}000\,000\,84.$$

Exemple 2. $y = x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0.$

$x_1 = 4{,}24, \qquad y_1 = -0{,}165376$

$x_2 = 4{,}25, \qquad y_2 = 0{,}015625$

$x_3 = 4{,}249137, \qquad y_3 = -0{,}000064296413985647$

Valeur trouvée $x = 4{,}2491405381345$

Valeur exacte $x = 4{,}2491405381295$

$D = +0{,}0000000000050$

Exemple 3. $y = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x - \frac{1}{32} = 0.$

$x_1 = 0{,}978, \qquad y_1 = -0{,}000192003873632$

$x_2 = 0{,}979, \qquad y_2 = 0{,}001113684570899$

$x_3 = 0{,}9781471, \qquad y_3 = -0{,}0000006517900178222\,3705$

Valeur trouvée $x = 0{,}9781476007346$

Valeur exacte $x = 0{,}9781476007338$

$D = +0{,}0000000000008$

Exemple 4. $y = x^3 - 5x + 4 = 0.$

$x_1 = 1{,}5615, \qquad y_1 = -0{,}000122266625$

$x_2 = 1{,}5616, \qquad y_2 = 0{,}000109264896$

$x_3 = 1{,}561552808, \qquad y_3 = -0{,}000000011134084491$

Valeur trouvée $x = 1{,}561552812808830\,32$

Valeur exacte $x = 1{,}561552812808830\,27$

$D = +0{,}000000000000000\,05$

Exemple 5. $y = x - 10 \log_{10} x = 0.$

$x_1 = 1{,}3, \qquad y_1 = 0{,}160566477$

$x_2 = 1{,}4, \qquad y_2 = -0{,}061280357$

$x_3 = 1{,}372, \qquad y_3 = -0{,}001541114$

$$\begin{array}{ll} \text{Valeur trouvée} & x = 1{,}371288539 \\ \text{Valeur exacte} & \underline{x = 1{,}371288574} \\ & D = - \, 0{,}000000035 \end{array}$$

Exemple 6. $y = x - \operatorname{tang} x = 0.$

$$x_1 = 4{,}49, \quad y_1 = 0{,}067749552419$$
$$x_2 = 4{,}50, \quad y_2 = -\,0{,}137332054552$$
$$x_3 = 4{,}49330, \quad y_3 = 0{,}002208894682$$

$$\begin{array}{ll} \text{Valeur trouvée} & x = 4{,}4934094596 \\ \text{Valeur exacte} & \underline{x = 4{,}4934094579} \; * \\ & D = + \, 0{,}0000000017 \end{array}$$

Exemple 7. $y = x - \cos x = 0.$

$$x_1 = 0{,}739, \quad y_1 = -\,0{,}00014247729462$$
$$x_2 = 0{,}740, \quad y_2 = 0{,}00153144127039$$
$$x_3 = 0{,}7390851, \quad y_3 = -\,0{,}00000005558930$$

$$\begin{array}{ll} \text{Valeur trouvée} & x = 0{,}73908513321516_{57} \\ \text{Valeur exacte} & \underline{x = 0{,}73908513321516_{08}} \\ & D = + \, 0{,}00000000000000_{49} \end{array}$$

* Dans son mémoire, « Application de la méthode de Fourier à la résolution des équations transcendantes », M. Stern trouve

$$x = 4{,}49340964,$$

tandis que Euler, dans son « Introd. in anal. inf. », L. II, § 539, indique la valeur

$$x = 4{,}49340834.$$

De son côté, l'auteur de la présente note, en calculant les tangentes au moyen de la série

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \frac{2x^9}{93555} - \ldots$$

jusqu'aux chiffres du 12^{me} ordre décimal, trouve pour la racine cherchée

$$x = 4{,}4934094579_{09}.$$

Pour mieux faire ressortir l'influence des valeurs initiales avec lesquelles on entre dans la formule I, le même exemple (de Fourier) sera encore traité quatre fois, en partant de valeurs qui diffèrent entre elles respectivement d'une unité du 1er, 2me, 3me et 4me ordre décimal.

Exemple 8. $y = x^3 - 2x - 5 = 0.$

a) x_1 *et* x_2 *diffèrent d'une unité du premier ordre décimal.*

$$x_1 = 2{,}0, \qquad y_1 = -1$$
$$x_2 = 2{,}1, \qquad y_2 = 0{,}061$$
$$x_3 = 2{,}094, \qquad y_3 = -0{,}006153416$$

Valeur trouvée $x = 2{,}09455154$

Valeur exacte $x = 2{,}09455148$

$D = +\ 0{,}00000006$

b) x_1 *et* x_2 *diffèrent d'une unité du deuxième ordre décimal.*

$$x_1 = 2{,}09, \qquad y_1 = -0{,}050671$$
$$x_2 = 2{,}10, \qquad y_2 = 0{,}061$$
$$x_3 = 2{,}09454, \qquad y_3 = -0{,}000128149691336$$

Valeur trouvée $x = 2{,}094551481607$

Valeur exacte $x = 2{,}094551481542$

$D = +\ 0{,}000000000065$

c) x_1 *et* x_2 *diffèrent d'une unité du troisième ordre décimal.*

$$x_1 = 2{,}094, \qquad y_1 = -0{,}006153416$$
$$x_2 = 2{,}095, \qquad y_2 = 0{,}005007375$$
$$x_3 = 2{,}0945513, \qquad y_3 = -0{,}000002026273165879303$$

Valeur trouvée $x = 2{,}094551481542337$

Valeur exacte $x = 2{,}094551481542326$

$D = +\ 0{,}000000000000011$

d) $\mathbf{x}_1$ *et* $\mathbf{x}_2$ *diffèrent d'une unité du quatrième ordre décimal.*

$x_1 = 2{,}0945\,,\qquad y_1 = -\ 0{,}000574591375$

$x_2 = 2{,}0946\,,\qquad y_2 = \ 0{,}000541550536$

$x_3 = 2{,}094551480\,,\qquad y_3 = -\ 0{,}0000000172145821897982080000$

Valeur trouvée $x = \ 2{,}09455148154232659236$

Valeur exacte $x = \ 2{,}09455148154232659148$

$D = +\ 0{,}00000000000000000088$

Remarque. — Des exemples précédents, on peut déduire la règle empirique suivante : Si par l'application de la formule I il se trouve que x_3 est exact jusqu'au chiffre du $n^{\text{ième}}$ ordre décimal, la valeur fournie par cette formule sera en général exacte jusqu'au chiffre du $2n^{\text{ième}}$ ordre décimal.