Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 33 (1897)

Heft: 123

Artikel: Note sur les solutions singulières d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre

Autor: Amstein, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-265050

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

NOTE

SUR

les solutions singulières d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre,

par **H. AMSTEIN**

Les géomètres se sont beaucoup occupés de la question des solutions singulières d'une équation différentielle du premier ordre. Encore dernièrement, M. E. Picard, dans son *Traité d'analyse,* tome III, p. 44 à 60, y a consacré un chapitre magistral. Il semblerait donc qu'il n'y ait pas lieu de revenir sur un sujet si souvent et si bien traité. Aussi n'ai-je pas la prétention de modifier en quoi que ce soit les méthodes employées et les résultats obtenus jusqu'à présent, mais simplement de présenter la question sous un jour différent et peut-être nouveau. Il en découlera un procédé souvent utile pour déterminer les solutions singulières d'une équation différentielle donnée.

En déterminant un élément de contact du plan par les trois coordonnées

$$x, y, p,$$

on voit que le plan entier contient ∞^3 de ces éléments.

Une équation

$$(1) \quad f(x, y, p) = 0$$

définit, par conséquent, ∞^2 éléments de contact. Une courbe est, en général, un ensemble de ∞^1 éléments de contact tels que la ligne droite de l'élément passe par le point consécutif. (Dans certains cas elle peut contenir ∞^2 éléments de contact.) Elle sera une intégrale de l'équation (1), si en chacun de ses points x, y, la direction de sa tangente, déterminée par $p = \frac{dy}{dx}$,

satisfait à l'équation (1). L'intégrale générale de l'équation différentielle se compose de ∞^1 courbes et contient, dans son ensemble, les ∞^2 éléments de contact définis par l'équation (1). Toute intégrale qui ne fait pas partie de l'intégrale générale est dite *une solution singulière.* La solution singulière sera, dans la règle, l'enveloppe des courbes composant l'intégrale générale. Il peut arriver que ∞^1 éléments de contact satisfaisant à l'équation (1) aient un point commun; dans ce cas, ce point devra également être considéré comme une intégrale particulière ou une solution singulière ou quelquefois même l'une et l'autre.

Soit donc

$$(1) \quad f(x, y, p) = 0, \qquad p = \frac{dy}{dx}$$

l'équation différentielle donnée et

$$(1^a) \quad F(x, y, C) = 0, \qquad C = \text{const.}$$

son intégrale générale. On remarquera que des opérations absolument identiques conduisent d'une part à l'enveloppe de (1^a) et d'autre part au lieu géométrique des points où l'équation (1) fournit pour p des racines doubles, et l'on peut démontrer que les deux courbes ainsi obtenues sont, en général, identiques et forment une solution singulière de (1). Il est donc naturel de considérer (1) comme l'équation d'une famille de courbes. La quantité p y joue le rôle d'un paramètre qui conserve pour chaque courbe individuelle une valeur constante.

Il va de soi que les éléments de contact d'une courbe $f(x, y, p) = 0, p = \text{const.}$ ne font pas, en général, partie des ∞^2 éléments de contact définis par l'équation (1). Il pourrait en être autrement dans le cas où la valeur accidentelle attribuée au paramètre p se confondît avec la valeur $\frac{dy}{dx}$, tirée de l'équation $f(x, y, p) = 0, p = \text{const.}$ Mais il ne suffit pas, pour amener cette circonstance, que $\frac{dy}{dx}$ soit égal à p; encore faut-il que les trois quantités x, y, $p = \frac{dy}{dx}$ satisfassent simultanément à l'équation (1).

Ces considérations conduisent au procédé suivant: Dans l'équation différentielle donnée

$$(1) \quad f(x, y, p) = 0$$

on considère p comme constant; on en tire par différentiation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

et l'on pose $\frac{dy}{dx} = p$. Les deux courbes

$$(1) \quad f(x, y, p) = 0, \qquad p = \text{const.}$$

et

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

se coupent en un certain nombre de points dans lesquels les éléments de contact x, y, p pourront appartenir aux ∞^2 éléments donnés par l'équation (1). Si donc on élimine la quantité p entre les équations (1) et (2), on obtiendra une équation

$$\varphi(x, y) = 0$$

qui ne renferme aucune constante arbitraire et représentera, en général, une solution singulière de l'équation différentielle donnée.

Le premier membre de (2) peut se décomposer en plusieurs facteurs; dans ce cas on effectuera l'élimination indiquée isolément entre chacun des facteurs et l'équation (1). Pour savoir si une courbe ainsi obtenue est une intégrale de l'équation différentielle donnée ou non, il faudra s'assurer si elle satisfait à l'équation (1) ou non. Enfin la distinction entre les solutions singulières et les intégrales particulières se fera d'après les règles connues que l'on trouve dans les bons manuels.

En résumé, si l'on fond en une seule les règles pratiquées de préférence jusqu'à présent et celle proposée dans les lignes qui précèdent, elle pourra s'énoncer comme il suit:

Toute solution singulière de (1) satisfait simultanément aux équations

$$(1) \quad f(x, y, p) = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Réciproquement, en éliminant p *soit entre les équations (1) et (2), soit entre les équations (1) et (3), on obtient une solution singulière, à la condition toutefois que le résultat obtenu satisfasse simultanément aux équations (1), (2) et (3).*

Cet énoncé contient le criterium de Darboux.

Aux enveloppes proprement dites, il convient d'ajouter les points isolés par lesquels passent ∞^1 éléments linéaires, pourvu qu'ils satisfassent à l'équation différentielle donnée, et à la condition $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$; il n'est pas indispensable qu'ils remplissent la condition $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} p = 0$.

Remarque. — Lorsque l'équation (1) n'admet pas de solution singulière, l'élimination de p entre les équations (1) et (2) conduit à une courbe qui n'est pas une intégrale de (1), mais bien le lieu géométrique des points des courbes $f(x, y, p) = 0$, $p = \text{const.}$, où la constante p et $\frac{dy}{dx}$ ont la même valeur.

Quelques exemples simples et bien connus feront voir au lecteur l'avantage que le procédé développé plus haut pourra lui procurer.

Exemple 1. — Soit donnée l'équation différentielle

$$(1) \quad f(x, y, p) = 2p^2 y^2 + 2pxy + x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$(1^a) \quad (x - C)^2 + y^2 = 1 - C^2. \qquad C = \text{const.}$$

L'équation (1), dans laquelle on considère, pour un instant, p comme un paramètre, représente ∞^1 ellipses qui toutes passent par les points $x = \pm 1$, $y = 0$. En la différentiant dans cette hypothèse et en posant immédiatement $\frac{dy}{dx} = p$, il vient

$$4p^3 y + 2py + 2p^2 x + 2x + 2py = 0$$

ou bien

$$(2) \quad (1 + p^2)(2py + x) = 0.$$

On satisfait à cette équation en admettant soit

$$(a) \quad 2py + x = 0,$$

soit

$$(b) \quad 1+p^2=0.$$

Dans le premier cas on a

$$p=-\frac{x}{2y}$$

et l'introduction de cette valeur dans l'équation (1) donne

$$(3) \quad \frac{x^2}{2}+y^2-1=0.$$

L'équation (3) satisfait aux équations (1) et (2), de même qu'à la condition

$$\frac{\partial f}{\partial p}=4\,py^2+2\,xy=2\,y\,(2py+x)=0;$$

elle représente bien une solution singulière de l'équation différentielle donnée. L'ellipse (3) est en effet aussi bien l'enveloppe des ellipses $f(x, y, p)=0$, $p=$ const. que celle des circonférences (1^a).

Dans le second cas où $p=\pm i$, $(i=\sqrt{-1})$, l'élimination de p entre les équations (1) et (b) fournit

$$(4) \quad x^2-y^2-1\pm 2\,ixy=0,$$

équation qui se décompose en ces quatre

$$(4^a) \quad \begin{cases} y-i\,(x-1)=0, \\ y+i\,(x-1)=0, \\ y-i\,(x+1)=0, \\ y+i\,(x+1)=0. \end{cases}$$

Chacune de ces droites imaginaires satisfait à l'équation (1), mais ne remplit pas la condition $\frac{\partial f}{\partial p}=0$. Il s'ensuit que l'on peut (si toutefois on admet des intégrales imaginaires) les considérer comme des intégrales de l'équation différentielle donnée; ce ne sont, il est vrai, ni des solutions singulières, ni des intégrales particulières, mais seulement des parties d'intégrales particulières. En effet, en combinant les équations (4^a) convenablement, il vient

$$(4^b) \quad \begin{cases} (x-1)^2+y^2=0, \\ (x+1)^2+y^2=0 \end{cases}$$

et l'on reconnaît dans ces circonférences de rayon zéro des intégrales particulières obtenues en attribuant dans (1^a) à la constante C les valeurs ± 1. Il se présente ici le cas intéressant où la même intégrale peut être envisagée comme une intégrale particulière et comme une solution singulière. En effet, d'une part les circonférences (4^b) sont bien des intégrales particulières; d'autre part, elles se réduisent aux points $x = \pm 1$, $y = 0$ et doivent, de ce fait, être considérées comme des solutions singulières, car, quelle que soit la valeur de p, les points $x = \pm 1$, $y = 0$ satisfont simultanément à l'équation (1) et à la condition $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$. Bien qu'ils ne remplissent pas la condition (2), tant que p reste arbitraire, les ∞^1 éléments de contact de l'équation (1) qui passent par chacun d'eux, répondent bien à la définition, donnée plus haut, d'une intégrale singulière.

On aura déjà remarqué que ces points sont les foyers de l'enveloppe (3) et que les droites (4^a) ne sont autre chose que les tangentes émanant des points circulaires à l'infini, à cette même courbe.

Exemple 2. — Soit donnée l'équation différentielle des coniques homofocales

$$(1) \quad f(x, y, p) = (px - y)(x + py) - p = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$(1^a) \quad \frac{x^2}{1+a} + \frac{y^2}{a} = 1, \qquad a = \text{const.}$$

On en déduit les équations

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial y} = (px - y)(1 + p^2) = 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial p} = x(x + py) + y(px - y) - 1 = x^2 - y^2 - 1 + 2pxy = 0.$$

L'équation (1), lorsqu'on y envisage p comme un paramètre, représente ∞^1 hyperboles équilatères qui ont l'origine pour centre et passent toutes par les quatre points $x = \pm 1$, $y = 0$; $x = 0$, $y = \pm i$.

L'équation (2) est satisfaite

$$1^\circ) \quad \text{pour} \quad p = \frac{y}{x},$$

$$2^\circ) \quad \text{pour} \quad p = \pm i.$$

En introduisant $p = \frac{y}{x}$ dans l'équation donnée, il vient

$$-p = 0,$$

d'où l'on conclut que le premier facteur de (2) ne conduit pas à une solution singulière, mais seulement à une partie d'une intégrale particulière à savoir $y = 0$. On trouverait de même, en considérant dans l'équation donnée y comme variable indépendante et x comme fonction cherchée, que $x = 0$ est également une partie d'une intégrale particulière.

L'hypothèse $p = \pm i$, introduite dans l'équation (1), donne

$$(\pm ix - y)(x \pm iy) \mp i = 0$$

ou bien

$$(y \mp ix)^2 + 1 = 0.$$

Cette équation représente les quatre droites imaginaires

$$\left\{ \begin{array}{l} y - i(x-1) = 0, \\ y + i(x-1) = 0, \\ y - i(x+1) = 0, \\ y + i(x+1) = 0 \end{array} \right.$$

qui, satisfaisant simultanément aux équations (1), (2) et (3), constituent des solutions singulières de l'équation (1). Elles forment en effet, non seulement l'enveloppe des hyperboles équilatères $f(x, y, p) = 0$, $p = \text{const.}$, mais encore celle des coniques homofocales (1^a). Leurs six points d'intersection sont :

a) les points circulaires à l'infini ;

b) les foyers réels des coniques (1^a) : $x = \pm 1$, $y = 0$, et

c) les foyers imaginaires de ces mêmes coniques : $x = 0$, $y = \pm i$.

Les valeurs $x = \pm 1$, $y = 0$,
$x = 0$, $y = \pm i$.

satisfont aux équations (1) et (3) quel que soit p ; mais elles ne

remplissent pas la condition (2) pour une valeur arbitraire de p. Malgré cette dernière circonstance, les foyers des coniques (1^a) doivent, en vertu de la définition donnée plus haut, être considérés comme des solutions singulières de l'équation différentielle donnée.

Exemple 3. — L'équation de Clairaut

$$(1) \qquad f(x, y, p) = y - px - \varphi(p) = 0,$$

où $\varphi(p)$ désigne une fonction quelconque de p, se soustrait au procédé employé dans les deux exemples précédents. En effet, l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial y} = p - p = 0$$

est satisfaite pour n'importe quelle valeur de p. On ne peut donc pas éliminer p entre ces deux équations.

Ce fait indique que l'intégrale générale de l'équation proposée se compose de ∞^1 droites qui ne peuvent être que celles-ci:

$$(3) \qquad y = Cx + \varphi(C), \; C = \text{const.}$$

et l'on reconnaît que dans ce cas les courbes $f(x, y, p) = 0$, $p =$ const. et les courbes composant l'intégrale générale (3) sont identiques. Il s'ensuit qu'aussi les deux problèmes quelquefois différents: 1° de trouver la solution singulière de (1); 2° de trouver l'enveloppe de (3), se confondent dans le cas actuel.

Réciproquement, lorsqu'on rencontre, dans cet ordre d'idées l'équation $p - p = 0$, on en conclut que l'équation proposée est une équation de Clairaut.