Détermination de la valeur de l'intégrale

Autor(en): **Amstein, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **39 (1903)**

Heft 146

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-267013

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Vol. XXXIX. N° 146. 1903

DÉTERMINATION DE LA VALEUR DE L'INTÉGRALE

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta}.$$

PAR

H. AMSTEIN

Cette intégrale définie dans laquelle a et b signifient des constantes positives quelconques et p un nombre entier positif, a fait l'objet d'une question dans le tome VIII, n° 12 (décembre 1901), de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*.

L'évaluation de cette intégrale n'offre aucune difficulté ; il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy relatif à l'intégrale prise le long du contour limitant une certaine aire, pour obtenir la formule désirée. Celle-ci, vu son élégance et son utilité, me paraît mériter de figurer dans ce Bulletin. Après l'avoir communiquée à l'*Intermédiaire*, je me suis appliqué à effectuer aussi l'intégrale indéfinie correspondante dont la portée est évidemment plus grande, puisque l'intégrale définie n'en est qu'une application particulière. Or il se trouve que les calculs nécessaires, tout en étant un peu longs peut-être, sont très faciles et en quelque sorte élémentaires. C'est cette partie de mon travail qu'on va lire. Sans faire intervenir le théorème de Cauchy, on passera alors de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie proposée.

Soit à évaluer

$$V = \int \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta} .$$

On a successivement

$$V = \int \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta} = \int \frac{\dfrac{d\theta}{\cos^{2p}\theta}}{a^2 \operatorname{tg}^{2p}\theta + b^2} = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\theta)^p \, d\theta}{a^2 \operatorname{tg}^{2p}\theta + b^2} =$$

$$= \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\theta)^{p-1} \, d \operatorname{tg}\theta}{a^2 \operatorname{tg}^{2p}\theta + b^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\theta)^{p-1} \, d \operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}^{2p}\theta + \dfrac{b^2}{a^2}} ,$$

et en posant

$$\operatorname{tg}\theta = x , \qquad \frac{b}{a} = c ,$$

$$a^2 V = \int \frac{(1 + x^2)^{p-1}}{x^{2p} + c^2} \, dx .$$

La fonction à intégrer étant rationnelle, on la décomposera en fractions simples. A cet effet on déterminera les racines de l'équation

$$x^{2p} + c^2 = 0$$

ou de l'équation

$$x^{2p} = - c^2 = c^2 \, e^{(2k+1)\pi i} .$$

Elles sont

$$x_k = c^{\frac{1}{p}} \, e^{\frac{2k+1}{2p}\pi i} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots 2p - 1)$$

ou, en les ordonnant de manière à faire ressortir les racines conjuguées x_k et x'_k

$$\left\{ \begin{aligned} x_k &= c^{\frac{1}{p}} \, e^{\frac{2k+1}{2p}\pi i} , \\ x'_k &= c^{\frac{1}{p}} \, e^{-\frac{2k+1}{2p}\pi i} \end{aligned} \right. \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots p - 1) .$$

Si pour un instant et pour abréger l'écriture, on pose

$$\frac{2k+1}{2p} = \lambda ,$$

les racines en question sont

$$\begin{cases} x_k = c^{\frac{1}{p}} e^{\lambda\pi i}, \\ x'_k = c^{\frac{1}{p}} e^{-\lambda\pi i} \end{cases}$$

et la décomposition de la fonction à intégrer en fractions simples sera, par conséquent, de la forme

$$\frac{(1+x^2)^{p-1}}{x^{2p}+c^2} = \sum_{k=0}^{p-1}\left[\frac{A_k}{x - c^{\frac{1}{p}} e^{\lambda\pi i}} + \frac{B_k}{x - c^{\frac{1}{p}} e^{-\lambda\pi i}}\right].$$

Les constantes A_k et B_k qui sont des nombres complexes conjugués, à savoir les résidus de la fonction du premier membre relativement aux pôles simples x_k et x'_k, se déterminent au moyen du procédé classique; c'est-à-dire si la fonction rationnelle que l'on veut décomposer en fractions simples est de la forme $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des polynômes, et qu'un de ses pôles simples soit a, le numérateur A de la fraction simple correspondante, $\frac{A}{x-a}$, est donné par la formule

$$A = \left|\frac{f(x)}{\varphi'(x)}\right|_{x=a},$$

où $\varphi'(x)$ signifie la dérivée de $\varphi(x)$.

Dans notre cas il vient

$$A_k = \left|\frac{(1+x^2)^{p-1}}{2p\,x^{2p-1}}\right|_{x=x_k} = \left|\frac{x(1+x^2)^{p-1}}{2p\,x^{2p}}\right|_{x=x_k} = \left|\frac{x(1+x^2)^{p-1}}{-2p\,c^2}\right|_{x=x_k} =$$

$$= -\frac{1}{2pc^2} c^{\frac{1}{p}} e^{\lambda\pi i}\left(1 + c^{\frac{2}{p}} e^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}$$

et

$$B_k = -\frac{1}{2pc^2} c^{\frac{1}{p}} \overline{e}^{\lambda\pi i}\left(1 + c^{\frac{2}{p}} \overline{e}^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}.$$

On a donc identiquement

$$\frac{(1+x^2)^{p-1}}{x^{2p}+c^2} =$$

$$= -\frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pc^2}\sum_{k=0}^{p-1}\left[\frac{e^{\lambda\pi i}\left(1+c^{\frac{2}{p}} e^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}}{x - c^{\frac{1}{p}} e^{\lambda\pi i}} + \frac{\overline{e}^{\lambda\pi i}\left(1+c^{\frac{2}{p}} \overline{e}^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}}{x - c^{\frac{1}{p}} \overline{e}^{\lambda\pi i}}\right].$$

On remarquera qu'en vertu d'un théorème bien connu sur la décomposition d'une fonction rationnelle en fractions simples, on a

$$\sum_{k=0}^{p-1}(A_k + B_k) = 0.$$

Ce fait entraîne les égalités

$$\sum_{k=0}^{p-1}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi = 0, \quad \sum_{k=0}^{p-1}\cos\frac{3(2k+1)}{2p}\pi = 0, \quad \sum_{k=0}^{p-1}\cos\frac{5(2k+1)}{2p}\pi = 0,$$

$$\ldots \sum_{k=0}^{p-1}\cos\frac{(2m+1)(2k+1)}{2p}\pi = 0 \qquad (m \leqq p-1), \ldots$$

$$\ldots \sum_{k=0}^{p-1}\cos\frac{(2p-1)(2k+1)}{2p}\pi = 0$$

qui d'ailleurs se démontrent directement sans aucune difficulté.

Afin d'éviter dans l'intégrale des logarithmes d'argument imaginaire, il suffit de réduire au même dénominateur les deux fractions sous le signe Σ; par là toutes les quantités en jeu, de même que les intégrales respectives, deviennent réelles.

Il vient

$$-\frac{2pc^2}{c^{\frac{1}{p}}}\,\frac{(1+x^2)^{p-1}}{x^{2p}+c^2}=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{M_k x-c^{\frac{1}{p}}N_k}{x^2-2c^{\frac{1}{p}}\cos\lambda\pi+c^{\frac{2}{p}}},$$

où

$$\left\{\begin{aligned} M_k &= e^{\lambda\pi i}\left(1+c^{\frac{2}{p}}e^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}+e^{-\lambda\pi i}\left(1+c^{\frac{2}{p}}e^{-2\lambda\pi i}\right)^{p-1},\\ N_k &= \left(1+c^{\frac{2}{p}}e^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}+\left(1+c^{\frac{2}{p}}e^{-2\lambda\pi i}\right)^{p-1}.\end{aligned}\right.$$

Pour mettre M_k et N_k sous forme réelle, on considérera l'expression

$$K=e^{x\pi i}\left(1+c^{\frac{2}{p}}e^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}+e^{-x\pi i}\left(1+c^{\frac{2}{p}}e^{-2\lambda\pi i}\right)^{p-1}$$

qui donne M_k pour $x=\lambda$ et N_k pour $x=0$.

On a

$$K=e^{x\pi i}\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\,c^{m\frac{2}{p}}e^{m.2\lambda\pi i}+e^{-x\pi i}\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\,c^{m.\frac{2}{p}}e^{-m.2\lambda\pi i},$$

où $(p-1)_m$ signifie le m^ième^ coefficient du binôme, à savoir

$$(p-1)_m=\frac{(p-1)\,(p-2)\,(p-3)\,\ldots\,(p-m)}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\ldots\;m},\quad (p-1)_0=1\,.$$

On peut écrire ensuite

$$K=\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\,c^{m\frac{2}{p}}\left[e^{(2m\lambda+x)\pi i}+e^{-(2m\lambda+x)\pi i}\right]=$$

$$=2\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\,c^{m.\frac{2}{p}}\cos\,(2m\lambda+x)\pi\,.$$

On obtient donc : pour $x=\lambda$

$$M_k=2\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\,c^{m.\frac{2}{p}}\cos\,(2m+1)\,\lambda\pi$$

et pour $x = 0$

$$N_k = 2 \sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m \, c^{m \cdot \frac{2}{p}} \cos 2m\lambda\pi .$$

L'on sait que l'intégrale

$$\int \frac{M_k x - c^{\frac{1}{p}} N_k}{x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}} \, dx$$

est de la forme

$$\int \frac{M_k x - c^{\frac{1}{p}} N_k}{x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}} \, dx = A \log \left(x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}\right) +$$

$$+ B \int \frac{dx}{x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}} .$$

Les constantes A et B s'obtiennent en différentiant cette égalité et en comparant dans les numérateurs les coefficients des mêmes puissances de x. Il vient

$$A = \frac{1}{2} M_k , \quad B = c^{\frac{1}{p}} (M_k \cos \lambda\pi - N_k).$$

Quant à l'intégration qui reste encore à effectuer, on sait que

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}} = \int \frac{dx}{(x - c^{\frac{1}{p}} \cos \lambda\pi)^2 + c^{\frac{2}{p}} \sin^2 \lambda\pi} =$$

$$= \frac{1}{c^{\frac{1}{p}} \sin \lambda\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - c^{\frac{1}{p}} \cos \lambda\pi}{c^{\frac{1}{p}} \sin \lambda\pi} ,$$

de sorte que

$$\int \frac{M_k x - c^{\frac{1}{p}} N_k}{x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}} dx = \frac{1}{2} M_k \log \left(x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}\right) +$$

$$+ \frac{M_k \cos \lambda\pi - N_k}{\sin \lambda\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - c^{\frac{1}{p}} \cos \lambda\pi}{c^{\frac{1}{p}} \sin \lambda\pi}$$

et par suite

$$\int \frac{(1 + x^2)^{p-1}}{x^{2p} + c^2} dx = -\frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pc^2} \sum_{k=0}^{p-1} \left[\frac{1}{2} M_k \log \left(x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{M_k \cos \lambda\pi - N_k}{\sin \lambda\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - c^{\frac{1}{p}} \cos \lambda\pi}{c^{\frac{1}{p}} \sin \lambda\pi} \right] + \text{const.}$$

Si dans cette formule on remplace x par $\operatorname{tg} \theta$, λ par sa valeur $\frac{2k+1}{2p}$, on a finalement

$$V = \int \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta} =$$

$$- \frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pa^2c^2} \sum_{k=0}^{p-1} \left[\frac{1}{2} M_k \log \frac{\sin^2\theta - 2c^{\frac{1}{p}} \cos \frac{2k+1}{2p}\pi \sin\theta \cos\theta + c^{\frac{2}{p}} \cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{M_k \cos \frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin \frac{2k+1}{2p}\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin\theta - c^{\frac{1}{p}} \cos \frac{2k+1}{2p}\pi \cos\theta}{c^{\frac{1}{p}} \sin \frac{2k+1}{2p}\pi \cos\theta} \right] + \text{const.}$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} M_k &= 2 \sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m \, c^{m\frac{2}{p}} \cos \frac{(2m+1)(2k+1)}{2p}\pi \\ N_k &= 2 \sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m \, c^{m\frac{2}{p}} \cos \frac{m(2k+1)}{p}\pi . \end{aligned} \right.$$

Dans cette intégrale on introduira maintenant la limite inférieure $\theta = 0$. A cet effet on remarquera 1° que

$$\frac{1}{2} M_k \left| \log \frac{\sin^2\theta - 2c^{\frac{1}{p}} \cos\frac{2k+1}{2p}\pi \sin\theta\cos\theta + c^{\frac{2}{p}}\cos^2\theta}{\cos^2\theta} \right|_{\theta=0} =$$

$$= \frac{1}{2} M_k \log c^{\frac{2}{p}} = M_k \log c^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\sum_{k=0}^{p-1} M_k \log c^{\frac{1}{p}} = \log c^{\frac{1}{p}} . \sum_{k=0}^{p-1} M_k = 0,$$

car

$$M_k = A_k + B_k$$

et

$$\sum_{k=0}^{p-1} M_k = \sum_{k=0}^{p-1} (A_k + B_k) = 0 ;$$

2° que

$$\left| \operatorname{arctg} \frac{\sin\theta - c^{\frac{1}{p}}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi\cos\theta}{c^{\frac{1}{p}}\sin\frac{2k+1}{2p}\pi . \cos\theta} \right|_{\theta=0} = \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{cotg}\frac{2k+1}{2p}\pi\right) =$$

$$= -\operatorname{arctg}\left(\operatorname{cotg}\frac{2k+1}{2p}\pi\right) = -\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\frac{2k+1}{2p}\pi\right)\right] =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2k+1}{2p}\pi\right).$$

Il vient donc

$$(1) \qquad \int_0^\theta \frac{d\theta}{a^2\sin^{2p}\theta + b^2\cos^{2p}\theta} =$$

$$= -\frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pb^2}\sum_{k=0}^{p-1}\left[\frac{1}{2} M_k \log \frac{\sin^2\theta - 2c^{\frac{1}{p}}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi\sin\theta\cos\theta + c^{\frac{2}{p}}\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \right.$$

$$+\frac{M_k\cos\frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sin\theta - c^{\frac{1}{p}}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi\cos\theta}{c^{\frac{1}{p}}\sin\frac{2k+1}{2p}\pi\,.\cos\theta}+$$

$$+\frac{M_k\cos\frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2k+1}{2p}\pi\right)\Bigg].$$

Afin de rendre cette formule aussi maniable que possible, on évaluera encore les deux sommes

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{M_k\cos\frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi},\qquad \sum_{k=0}^{p-1}\frac{2k+1}{2p}\,\frac{M_k\cos\frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}.$$

On a déjà vu que

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}M_k &= \sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\, c^{m\cdot\frac{2}{p}}\cos\frac{(2m+1)(2k+1)\pi}{2p}\\ \frac{1}{2}N_k &= \sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\, c^{m\cdot\frac{2}{p}}\cos\frac{m(2k+1)\pi}{p}\end{aligned}\right|\begin{aligned}&\cos\frac{2k+1}{2p}\\ &-1\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}M_k\cos\frac{2k+1}{2p}\pi-\frac{1}{2}N_k=$$

$$\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\, c^{m\cdot\frac{2}{p}}\left[\cos\frac{(2m+1)(2k+1)\pi}{2p}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi-\cos\frac{m(2k+1)}{p}\pi\right]$$

$$\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m c^{m\cdot\frac{2}{p}}\left[\frac{1}{2}\cos\frac{(m+1)(2k+1)\pi}{p}+\frac{1}{2}\cos\frac{m(2k+1)}{p}\pi-\cos\frac{m(2k+1)}{p}\pi\right]=$$

$$\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m c^{m\cdot\frac{2}{p}}\left[\frac{1}{2}\cos\frac{(m+1)(2k+1)\pi}{p}-\frac{1}{2}\cos\frac{m(2k+1)\pi}{p}\right]=$$

$$= - \sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m c^{m \cdot \frac{2}{p}} \sin \frac{(2m+1)(2k+1)\pi}{2p} \sin \frac{2k+1}{2p} \pi =$$

$$= - \sin \frac{2k+1}{2p} \pi \sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m c^{m \cdot \frac{2}{p}} \sin \frac{(2m+1)(2k+1)\pi}{2p} ;$$

puis

$$\frac{\frac{1}{2} M_k \cos \frac{2k+1}{2p} \pi - N_k}{\sin \frac{2k+1}{2p} \pi} = - \sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m c^{m \cdot \frac{2}{p}} \sin \frac{(2m+1)(2k+1)\pi}{2p} .$$

Pour effectuer la sommation relative à la lettre k, on peut écrire

$$(2) \quad - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\frac{1}{2} M_k \cos \frac{2k+1}{2p} \pi - \frac{1}{2} N_k}{\sin \frac{2k+1}{2p} \pi} = \sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m c^{m \cdot \frac{2}{p}} \left[\sin \frac{2m+1}{2p} \pi + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{(2m+1)3\pi}{2p} + \sin \frac{(2m+1)5\pi}{2p} + \ldots + \sin \frac{(2m+1)(2p-1)\pi}{2p} \right] .$$

Or la somme de sinus figurant dans cette expression, s'obtient facilement. On a, en effet,

$$\sin \frac{2m+1}{2p} \pi + \sin \frac{(2m+1)3\pi}{2p} + \sin \frac{(2m+1)5\pi}{2p} + \ldots + \sin \frac{(2m+1)(2p-1)\pi}{2p} =$$

$$= \frac{1}{2i} \left[e^{\frac{2m+1}{2p} \pi i} + e^{\frac{(2m+1)3}{2p} \pi i} + e^{\frac{(2m+1)5}{2p} \pi i} + \ldots + e^{\frac{(2m+1)(2p-1)}{2p} \pi i} \right.$$

$$\left. - \bar{e}^{\frac{2m+1}{2p} \pi i} - \bar{e}^{\frac{(2m+1)3}{2p} \pi i} - \bar{e}^{\frac{(2m+1)5}{2p} \pi i} - \ldots - \bar{e}^{\frac{(2m+1)(2p-1)}{2p} \pi i} \right] =$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{\frac{(2m+1)(2p+1)}{2p} \pi i} - e^{\frac{2m+1}{2p} \pi i}}{e^{\frac{2m+1}{p} \pi i} - 1} - \frac{\bar{e}^{\frac{(2m+1)(2p+1)}{2p} \pi i} - \bar{e}^{\frac{2m+1}{2p} \pi i}}{\bar{e}^{\frac{2m+1}{p} \pi i} - 1} \right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{-e^{\frac{2m+1}{2p}\pi i} - e^{\frac{2m+1}{2p}\pi i}}{e^{\frac{2m+1}{p}\pi i} - 1} - \frac{-e^{-\frac{2m+1}{2p}\pi i} - e^{-\frac{2m+1}{2p}\pi i}}{e^{-\frac{2m+1}{p}\pi i} - 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{i}\left[-\frac{e^{\frac{2m+1}{2p}\pi i}}{e^{\frac{2m+1}{p}\pi i} - 1} + \frac{e^{-\frac{2m+1}{2p}\pi i}}{e^{-\frac{2m+1}{p}\pi i} - 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{i}\left[-\frac{1}{e^{\frac{2m+1}{2p}\pi i} - e^{-\frac{2m+1}{2p}\pi i}} + \frac{1}{e^{-\frac{2m+1}{2p}\pi i} - e^{\frac{2m+1}{2p}\pi i}}\right] =$$

$$= \frac{1}{i}\left[-\frac{1}{2i\sin\frac{2m+1}{2p}\pi} - \frac{1}{2i\sin\frac{2m+1}{2p}\pi}\right] = \frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2p}\pi}.$$

La somme cherchée est donc

$$(3) \qquad -\sum_{k=0}^{p-1} \frac{\frac{1}{2}\mathrm{M_k}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi - \frac{1}{2}\mathrm{N_k}}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi} = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(p-1)_m\, c^{m\cdot\frac{2}{p}}}{\sin\frac{2m+1}{2p}\pi} =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2p}} + \frac{(p-1)_1\, c^{\frac{2}{p}}}{\sin\frac{3\pi}{2p}} + \frac{(p-1)_2\, c^{2\cdot\frac{2}{p}}}{\sin\frac{5\pi}{2p}} + \ldots + \frac{(p-1)_{p-1}\, c^{(p-1)\frac{2}{p}}}{\sin\frac{2p-1}{2p}\pi}.$$

En s'appuyant sur les calculs qui ont abouti à la formule (2), on reconnaît que la seconde somme est donnée par

$$-\sum_{k=0}^{p-1} \frac{2k+1}{2p}\cdot\frac{\mathrm{M_k}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi - \mathrm{N_k}}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi} =$$

$$= 2\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\, c^{m\cdot\frac{2}{p}}\left[\frac{1}{2p}\sin\frac{(2m+1)\pi}{2p} + \frac{3}{2p}\sin\frac{(2m+1)3\pi}{2p} + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{2p}\sin\frac{(2m+1)5\pi}{2p} + \ldots + \frac{2p-1}{2p}\sin\frac{(2m+1)(2p-1)\pi}{2p}\right].$$

Afin de déterminer la somme entre crochets on considérera d'abord cette autre somme

$$\cos\frac{x}{2p}+\cos\frac{3x}{2p}+\cos\frac{5x}{2p}+\ldots+\cos\frac{(2p-1)x}{2p}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(e^{\frac{x}{2p}i}+e^{\frac{3x}{2p}i}+e^{\frac{5xi}{2p}}+\ldots+e^{\frac{(2p-1)xi}{2p}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(e^{-\frac{x}{2p}i}+e^{-\frac{3x}{2p}i}+e^{-\frac{5x}{2p}i}+\ldots+e^{-\frac{(2p-1)x}{2p}i}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{\frac{2p+1}{2p}xi}-e^{\frac{x}{2p}i}}{e^{\frac{x}{p}i}-1}+\frac{e^{-\frac{2p+1}{2p}xi}-e^{-\frac{x}{2p}i}}{e^{-\frac{x}{p}i}-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{2p-1}{2p}xi}-e^{-\frac{x}{2p}i}-e^{\frac{2p+1}{2p}xi}+e^{\frac{x}{2p}i}+e^{-\frac{2p-1}{2p}xi}-e^{\frac{x}{2p}i}-e^{-\frac{2p+1}{2p}xi}+e^{-\frac{x}{2p}i}}{\left(e^{\frac{x}{p}i}-1\right)\left(e^{-\frac{x}{p}i}-1\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\left(e^{\frac{2p-1}{2p}xi}+e^{-\frac{2p-1}{2p}xi}\right)-\left(e^{\frac{2p+1}{2p}xi}+e^{-\frac{2p+1}{2p}xi}\right)}{e^{\frac{x}{2p}i}\left(e^{\frac{x}{2p}i}-e^{-\frac{x}{2p}i}\right)e^{-\frac{x}{2p}i}\left(e^{-\frac{x}{2p}i}-e^{\frac{x}{2p}i}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{2\cos\frac{2p-1}{2p}x-2\cos\frac{2p+1}{2p}x}{2i\sin\frac{x}{2p}\,(-2i)\sin\frac{x}{2p}}=\frac{\cos\frac{2p-1}{2p}x-\cos\frac{2p+1}{2p}x}{4\sin^2\frac{x}{2p}}=$$

$$=\frac{\sin x\sin\frac{x}{2p}}{2\sin^2\frac{x}{2p}}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2p}}\,.$$

Dérivant par rapport à x les deux membres de cette égalité

$$\cos\frac{x}{2p} + \cos\frac{3x}{2p} + \cos\frac{5x}{2p} + \ldots + \cos\frac{(2p-1)x}{2p} = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2p}},$$

il vient

$$-\left[\frac{1}{2p}\sin\frac{x}{2p} + \frac{3}{2p}\sin\frac{3x}{2p} + \frac{5}{2p}\sin\frac{5x}{2p} + \ldots + \frac{2p-1}{2p}\sin\frac{(2p-1)x}{2p}\right] =$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2p}\cos x - \frac{1}{2p}\sin x\cos\frac{x}{2p}}{2\sin^2\frac{x}{2p}}.$$

Or il suffit de faire $x = (2m+1)\pi$ dans cette formule pour avoir immédiatement la somme cherchée, à savoir

$$\frac{1}{2p}\sin\frac{(2m+1)\pi}{2p} + \frac{3}{2p}\sin\frac{(2m+1)3\pi}{2p} + \frac{5}{2p}\sin\frac{(2m+1)5\pi}{2p} + \ldots +$$

$$+ \frac{2p-1}{2p}\sin\frac{(2m+1)(2p-1)\pi}{2p} = \frac{1}{2\sin\frac{(2m+1)\pi}{2p}}.$$

On a ainsi

$$(4)\qquad -\sum_{k=0}^{p-1}\frac{2k+1}{2p}\,\frac{\mathrm{M}_k\cos\frac{2k+1}{2p}\pi - \mathrm{N}_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}} = \sum_{m=0}^{p-1}\frac{(p-1)_m c^{m\cdot\frac{2}{p}}}{\sin\frac{2m+1}{2p}\pi}.$$

On peut constater que, dans la formule (1), l'expression provenant de la limite inférieure

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\mathrm{M}_k\cos\frac{2k+1}{2p}\pi - \mathrm{N}_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2k+1}{2p}\pi\right) \quad \text{est} = 0,$$

car on a d'après (3) et (4)

$$\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\mathrm{M_k}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi-\mathrm{N_k}}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}-\pi\sum_{k=0}^{p-1}\frac{2k+1}{2p}\,\frac{\mathrm{M_k}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi-\mathrm{N_k}}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}=$$

$$=-\pi\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(p-1)_m\,c^{m\cdot\frac{2}{p}}}{\sin\frac{2m+1}{2p}\pi}+\pi\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(p-1)_m\,c^{m\cdot\frac{2}{p}}}{\sin\frac{2m+1}{2p}\pi}=0.$$

L'intégrale (1) prend ainsi la forme plus simple

$$\int_0^\theta\frac{d\theta}{a^2\sin^{2p}\theta+b^2\cos^{2p}\theta}= \tag{5}$$

$$=-\frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pb^2}\sum_{k=0}^{p-1}\left[\frac{1}{2}\mathrm{M_k}\log\frac{\sin^2\theta-2c^{\frac{1}{p}}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi\sin\theta\cos\theta+c^{\frac{2}{p}}\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{M_k}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi-\mathrm{N_k}}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sin\theta-c^{\frac{1}{p}}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi\cos\theta}{c^{\frac{1}{p}}\sin\frac{2k+1}{2p}\pi\cos\theta}\right].$$

Pour terminer et afin d'obtenir l'intégrale définie demandée dans l'*Intermédiaire*, on fera encore, dans cette formule, $\theta=\frac{\pi}{2}$. Les termes logarithmiques disparaîtront. Ils deviennent infinis, il est vrai, mais tous de la même manière, de sorte que la somme $\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2}\mathrm{M_k}$ qui est nulle, peut se mettre en évidence. Or

$$\left|\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sin\theta-c^{\frac{1}{p}}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi\cos\theta}{c^{\frac{1}{p}}\sin\frac{2k+1}{2p}\cos\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\ ;$$

il s'ensuit que l'intégrale en question devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta} = -\frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pb^2} \cdot \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{M_k \cos \frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin \frac{2k+1}{2p}\pi} =$$

$$= \pi \frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pb^2} \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(p-1)_m\, c^{m \cdot \frac{2}{p}}}{\sin \frac{2m+1}{2p}\pi}$$

ou, en remplaçant c par sa valeur

$$(6) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta} = \frac{\pi}{2pb^2} \sum_{m=0}^{p-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2m+1}{p}} \frac{(p-1)_m}{\sin \frac{2m+1}{2p}\pi}$$

où

$$(p-1)_m = \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-m)}{1 \,.\, 2 \,.\, \ldots\, m}, \quad (p-1)_0 = 1.$$

Les formules (5) et (6) résolvent différents problèmes. Elles donnent, entre autres, l'aire des courbes dont l'équation en coordonnées polaires est de la forme

$$r = \frac{C}{\sqrt{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta}}$$

ou en coordonnées parallèles rectangulaires

$$a^2 y^{2p} + b^2 x^{2p} = C (x^2 + y^2)^{p-1}$$

et les moments d'inertie polaires par rapport à l'origine des courbes

$$r = \frac{C}{\sqrt[4]{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta}}$$

ou bien

$$a^2 y^{2p} + b^2 x^{2p} = C (x^2 + y^2)^{p-2}.$$