Quelques méthodes arabes de construction des carrés magiques impairs

Autor(en): **Sesiano, Jacques**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **83 (1994-1995)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-280519

Bull. Soc. Vaud. Sc. Nat. 83.1: 51-76. ISSN 0037-9603

Quelques méthodes arabes de construction des carrés magiques impairs

par

Jacques SESIANO[1]

Summary.–SESIANO J., 1994. Some Arabic methods of construction for magic squares of odd order. *Bull. Soc. vaud. Sc. nat. 83.1*: 51-76.
General methods of construction for magic squares appeared in the Islamic world during the 9th century and were fully developed in the 11th and 12th centuries. From the 13th century on, magic squares were no longer of purely mathematical interest, but were used mainly for magical and divinatory purposes. Classical methods of construction did, however, survive in some of the more elaborate later treatises, as, for example, in Muḥammad ibn Muḥammad al-Fullānī al-Kischnāwī's fragment on the construction of magic squares of odd order which is discussed here.

Key words: Islamic mathematics, magic squares.

Résumé.–SESIANO J., 1994. Quelques méthodes arabes de construction des carrés magiques impairs. *Bull. Soc. vaud. Sc. nat. 83.1*: 51-76.
Des méthodes générales de construction des carrés magiques apparurent dans le monde musulman au IX^e siècle, et la science des carrés magiques y atteignit son apogée aux XI^e et XII^e siècles. Dès le XIII^e siècle, les applications magiques et divinatoires commencèrent à prendre la place de l'étude mathématique. Des méthodes classiques de construction survécurent toutefois dans les traités postérieurs d'un certain niveau, comme dans la partie d'un ouvrage de Muḥammad ibn Muḥammad al-Fullānī al-Kischnāwī sur la construction des carrés magiques d'ordre impair, laquelle partie est étudiée ici.

[1]*Département de mathématiques, Ecole polytechnique fédérale, CH-1015 Lausanne.*

CODEN: BSVAA6

INTRODUCTION

On appelle «carré magique» un carré divisé en un nombre carré de cases dans lesquelles on inscrira une suite de nombres différents en telle façon que la somme dans chacune des lignes, des colonnes et des deux diagonales principales soit la même.

Cette somme constante est appelée «somme (ou «constante) magique». Quand le carré a n cases au côté, on parle d'un carré «d'ordre n».

Il est usuel d'inscrire dans les n^2 cases d'un carré d'ordre n les n^2 premiers nombres naturels. La somme de ces nombres étant

$$\frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

la constante magique M_n en sera la $n^{\text{ième}}$ partie, soit

$$M_n = \frac{n(n^2+1)}{2} \ .$$

On trouve ainsi par exemple que M_3=15, M_4=34, M_5=65.

Les carrés présentant la même somme dans les rangées horizontales et verticales ainsi que dans les deux diagonales sont des carrés «à magie simple». Les carrés seront «à bordures» ou «à enceinte» s'ils ont en outre la propriété que la suppression de la bordure extérieure laisse un carré jouissant de la propriété magique. Les carrés dits «à compartiments» possèdent, eux, la propriété supplémentaire d'être constitués de carrés qui ont eux-mêmes la caractéristique magique. Enfin, dans les carrés magiques «pandiagonaux» (ou «panmagiques», ou «diaboliques») la somme constante se retrouve non seulement dans les rangées et les deux diagonales, mais encore dans toute paire de diagonales complémentaires (c'est-à-dire dans tout couple de diagonales placées parallèlement de part et d'autre d'une diagonale principale et comprenant en tout n cases).

Les méthodes de construction de carrés magiques que l'on regarde comme générales sont applicables à l'une ou l'autre de trois catégories principales d'ordre, à savoir les ordres:

1. «impair», avec $n = 3, 5, 7, \ldots, 2k+1, \ldots$
2. «pairement pair», avec $n = 4, 8, 12, \ldots, 4k, \ldots$
3. «impairement pair», avec $n = 6, 10, 14, \ldots, 4k+2, \ldots$

où k représente dans chaque cas un nombre naturel.

Si des carrés des petits ordres apparaissent en Chine dans les premiers siècles de notre ère, des méthodes générales permettant la construction de carrés magiques arbitrairement grands de chacun des trois ordres semblent avoir pris naissance en Perse. Peut-être ces premières recherches eurent-elles lieu en considérant le cas particulier des nombres placés sur l'échiquier, donc le cas du carré magique d'ordre 8: on trouve dans le monde musulman, dès le IX^e siècle en tout cas, divers problèmes de sommation sur l'échiquier, qui semblent avoir suivi de peu l'introduction du jeu d'échecs venu de l'Inde un siècle auparavant. Quoi qu'il en soit, la construction des carrés magiques –appelés alors en arabe *wafq* (*al-a'dād*), «disposition harmonieuse (des nombres)»– est le sujet de nombreux traités du X^e au XII^e siècle. L'extension à des applications astrologiques et magiques devient courante, sinon prédominante, dès le XIII^e siècle, en sorte que ce sont surtout de tels textes qui continueront à entretenir la connaissance des carrés magiques.

Le lien entre carrés magiques et figures magiques ou amulettes s'explique par le lien existant en arabe entre écriture et nombre. A l'instar des Grecs, les Arabes utilisaient –outre le système à dix chiffres venu de l'Inde– un système numérique dans lequel à chacune des vingt-huit lettres de leur alphabet était associée l'une des neuf unités, des neuf dizaines, des neuf centaines ainsi que le millier; de la sorte, mots et nombres pouvaient être intimement associés. Ainsi, il était possible de faire figurer dans la rangée d'un carré, en toutes lettres, une formule religieuse ou incantatoire, quelque mot sacré ou un nom propre; le carré était ensuite complété avec des nombres appropriés de manière à posséder la caractéristique magique et une somme constante égale à la valeur numérique de l'expression considérée. Il faut toutefois remarquer que l'on trouve aussi un pouvoir magique attribué à de purs carrés numériques, remplis avec les premiers nombres naturels, auxquels, selon l'ordre, sont associées des vertus curatives, protectrices ou astrologiques précises.

Si, dans ce deuxième cas, il n'était guère besoin d'établir une théorie des carrés magiques, il fallait le faire dans le premier cas, afin que l'on fût à même de remplir les carrés. Aussi les textes tardifs, quoiqu'ils partageassent la fin magique, étaient-ils de deux espèces: ceux qui contenaient encore des fondements théoriques et ceux qui, de manière fort utilitaire, ne transmettaient que des exemples en indiquant leurs attributs.

C'est par l'intermédiaire de traités de ce deuxième type que l'Europe de la fin du Moyen Age fit sa première rencontre avec les carrés magiques. Elle reçut en effet au XIV^e siècle quelques exemples de carrés magiques, à savoir deux séries de sept carrés magiques remplis avec les premiers nombres naturels, appartenant aux ordres de 3 à 9, dont chacun était associé à l'un des corps célestes connus (FOLKERTS 1981). Le contenu des manuscrits qui les transmirent est par ailleurs à l'origine de la qualification de «magiques» qui encore actuellement caractérise ces carrés, tout comme il est à l'origine de la qualification de «planétaires», dont Fermat faisait encore usage, conjointement avec la précédente, au XVII^e siècle (FERMAT 1679, 176).

En revanche, d'autres ouvrages, même s'ils sont tardifs et eux aussi à but fondamentalement astrologique ou magique, se soucient encore, comme déjà dit, de décrire les modes généraux de construction des carrés magiques, et c'est grâce à eux que, çà et là dans le monde musulman, les connaissances anciennes survécurent. Deux de ces textes peuvent être mentionnés ici. Le premier est le traité que composa vers 1600 Muḥammad al-Schabrāmallisī, conservé dans le manuscrit arabe 2698 de la Bibliothèque Nationale de Paris (Brockelmann 1949, 480, de Slane 1889, *ad loc.*). Le second, qui mentionne fréquemment l'auteur précédent comme l'une de ses sources d'information, est le traité sur l'usage (magique) des lettres et des carrés magiques du Soudanais Muḥammad ibn Muḥammad al-Fullānī al-Kischnāwī, mort au Caire en 1741 (Brockelmann 1949, *ibid.*).

De ce dernier texte, la Bibliothèque de la School of Oriental and African Studies de Londres possède une copie (manuscrit 65496), dont elle nous a aimablement fait parvenir une reproduction photographique. Cette copie est malheureusement très incomplète, puisque, des 179 feuillets du manuscrit dans sa forme originelle, les feuillets 21-90, 101-130, 141-170 sont en déficit. De ce fait, la section enseignant la construction des carrés magiques pairs manque intégralement. En revanche, la partie concernant les carrés impairs est presque entièrement conservée (fol. 91^{r}-100^{v}). Nous y trouvons l'exposition de différentes manières de disposer les nombres dans les carrés, et avec diverses formes de magie. Si la plupart de ces constructions sont déjà connues de l'époque classique, elles sont souvent expliquées ou appliquées d'une manière plus simple; le temps a, dans une certaine mesure, servi de filtre, et les méthodes rapportées sont celles dont la simplicité ou l'élégance en ont conservé l'usage. On trouve aussi, à la fin du fragment, l'exposition d'un sujet qui est, par rapport aux traités classiques, nouveau (sans doute du fait de son usage magique): celui des carrés magiques dont une case est laissée inoccupée. Tous ces sujets sont présentés par al-Kischnāwī avec une grande clarté. Il est vrai qu'il ne semble pas avoir été le premier venu: la notice biographique que lui a consacrée l'historien al-Jabartī (1753-1825/6) dans ses «Chroniques» (al-Jabartī 1888-96, II, 39-42) abonde en louanges dithyrambiques sur ses aptitudes et mérites. Il semble même avoir fait autorité dans le domaine nouveau des carrés à trous, puisqu'il est mentionné par le même al-Jabartī, en un autre endroit, en relation avec les propriétés de ces carrés d'ordre 5 (communication de M. T. Philipp, Erlangen).

Dans l'analyse qui suit, nous avons traduit divers passages significatifs du texte et avons résumé le reste, en insérant de manière clairement distincte ou dans des *remarques* nos commentaires ou compléments au texte. A l'exception de trois figures que nous avons ajoutées (n^{os} 30, 80, 83), toutes les figures sont des transcriptions fidèles de celles du manuscrit, et conservent donc l'usage de commencer le placement des nombres à droite (nous avons du reste joint à quelques-unes des figures les copies des illustrations du manuscrit de Londres). Seul l'arrangement des carrés dans les groupes de figures 52-67 et 69-76 a été modifié, afin que la parenté des carrés qui y sont représentés en apparaisse plus manifestement.

ANALYSE DU TEXTE

I. *Carrés à magie simple*

a. *Première méthode*

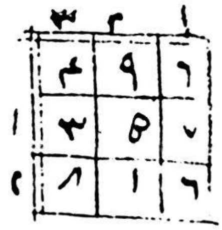
Du fait de la première lacune, l'explication de la méthode de construction manque. Elle se déduit toutefois aisément des exemples qui, eux, ont été conservés. On place 1, ou le premier nombre, dans la case située en-dessous de la case centrale, puis on descend obliquement avec les nombres suivants, que l'on place successivement dans chaque case que l'on rencontre –en se reportant, lorsque l'on atteint les bords du carré, à la case qui correspond à celle que l'on atteindrait dans un carré accolé de même ordre. Après avoir ainsi placé une série de n nombres, on se heurte à une case déjà occupée; on descendra alors de deux cases à la verticale du nombre placé en dernier, puis l'on poursuivra l'inscription des nombres selon la manière déjà utilisée.

Après avoir effectué ceci pour les carrés des trois premiers ordres (fig. 1-3), l'auteur revient au cas particulier du carré de 3. Il remarque que la forme de ce carré est unique, si l'on fait abstraction de ses trois rotations et des inversions de chacune de ces quatre figures. Ces huit aspects (*wujūh*) possibles du carré de 3 (fig. 4-11) sont en effet les seules possibilités de construction lorsque l'on tient compte des deux conditions auxquelles est soumis le carré constitué par les neuf premiers entiers, savoir que 5 doit en occuper la case centrale et 1 le milieu d'un côté.

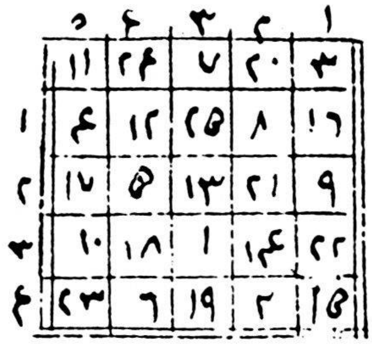
Remarque: Sans doute ces deux conditions étaient-elles discutées dans le début de la section, et il vaut la peine d'en examiner ici le fondement. Désignons par e le terme central du carré de 3. Comme la somme sur tout le carré est le triple de 15, la constante magique, la somme des quatre paires d'éléments opposés de l'enceinte devra égaler 45-e. Or, chacune de ces paires valant 15-e, la somme précédente doit aussi égaler 4(15-e). Il s'en ensuit que $3e$=15, donc que l'on doit avoir e=5. Il nous reste maintenant à placer de part et d'autre de ce terme central les paires d'opposés 1, 9; 2, 8; 3, 7; 4, 6. Remarquons d'abord que placer 1 dans un angle n'est pas approprié, puisqu'une seule des paires, savoir 6 et 8, peut former avec 1 la somme requise. Il faut donc mettre 1 au milieu de la rangée contenant 6 et 8. Mais la connaissance d'une rangée et du terme central permet de remplir la rangée opposée, et le contenu des deux cases encore inoccupées s'en déduit. Les deux conditions susmentionnées déterminent donc complètement le carré, et il apparaît de cette construction qu'il ne saurait y avoir, aux rotations et inversions près, qu'une seule forme du carré de 3 constitué par les neuf premiers entiers.

Quant à la méthode générale de placement, qui consiste à progresser selon une direction oblique depuis une case située au côté de la case centrale et à sauter deux cases pour passer d'une série à l'autre, c'est celle que l'on trouve le plus fréquemment dans les textes des pays islamiques sur les carrés magiques. C'est elle qui apparaît aussi en premier dans le monde chrétien: les carrés impairs des deux groupes de carrés transmis à l'Europe de la fin du Moyen Age étaient construits de cette façon, et il suffisait d'examiner les trois exemples d'ordres 5, 7 et 9 pour en déduire le mode général de construction.

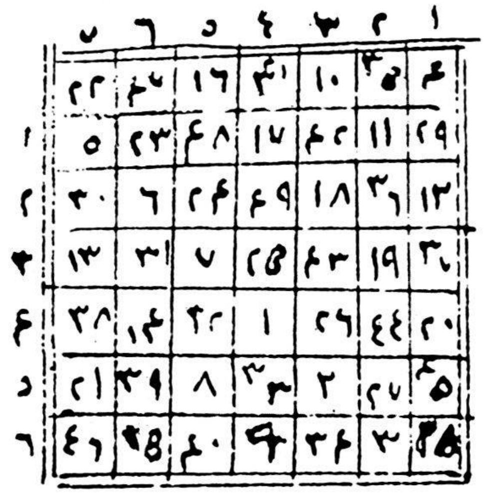
4	9	2
3	5	7
8	1	6



11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15



22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28



Figures 1-3.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Figures 4-11.

b. *Deuxième méthode*

Cette méthode est elle aussi, dit l'auteur, générale (*muṭṭarid*) pour la construction des carrés impairs. Il l'expose comme suit. *«On commence dans l'une quelconque des cases du carré, sans fixer de point de départ particulier. On avance selon un pas régulier, le déplacement se faisant dans l'une des deux directions principales* (imtidādān) *de rangée en rangée et dans l'autre de deux rangées en deux rangées. On procède ainsi jusqu'à ce que l'on ait placé des nombres en quantité égale à l'ordre* (bi-'iddat aqsā m al-ḍila')*; avec ceci se termine la première série* (al-daur al-awwal). *On se déplace ensuite vers le début de la seconde série. Pour ce déplacement et celui des séries ultérieures, il y a deux méthodes. L'une consiste à s'éloigner de la case atteinte, en restant à l'intérieur de la rangée déterminée par le déplacement de rangée en rangée, d'un nombre de cases consécutives (en comptant la case de départ) égal à la grandeur de l'ordre* (miqdār 'iddat aqsām al-ḍila') *dans la direction du déplacement de deux rangées en deux rangées. L'autre consiste à s'éloigner de la case atteinte, en restant à l'intérieur de la rangée déterminée par le déplacement de deux rangées en deux rangées, de trois (cases) dans la direction du déplacement de rangée en rangée. La case à laquelle on parvient alors par l'un de ces deux déplacements sera le point de départ de la seconde série».* L'auteur indique que l'on poursuit ensuite similairement le placement des nombres, avec la même marche du cavalier (*maschī al-faras*) à l'intérieur d'une série et le même saut lorsque la série s'arrête. Il commente ensuite l'établissement de deux carrés (fig. 12 et 13). Comme, note-t-il, d'aucuns considèrent que le passage d'une série à l'autre dans la première méthode correspond en fait à un déplacement *fixe* de cinq cases (les cases de départ et d'arrivée comprises), notre auteur construit un carré d'ordre 7 en accord avec cette directive (fig. 14).

18	10	22	14	1
12	4	16	8	25
6	23	15	2	19
5	17	9	21	13
24	11	3	20	7

13	25	7	19	1
17	4	11	23	10
21	8	20	2	14
5	12	24	6	18
9	16	3	15	22

Figures 12-13.

32	14	38	20	44	26	1
48	23	5	29	11	42	17
8	39	21	45	27	2	33
24	6	30	12	36	18	49
40	15	46	28	3	34	9
7	31	13	37	19	43	25
16	47	22	4	35	10	41

Figure 14.

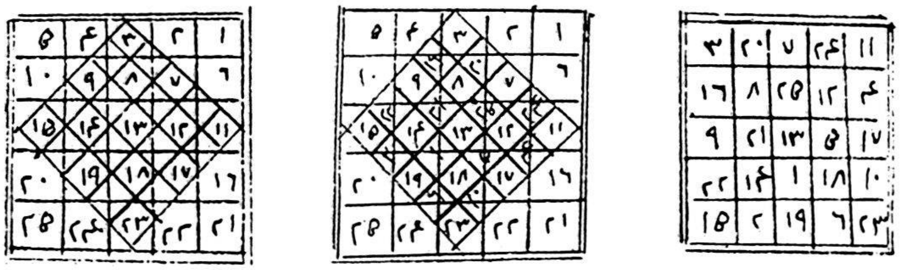
Remarque: L'usage de la marche du cavalier est fréquent dans les anciens textes arabes, tant pour construire des carrés à magie simple que –comme dans ce cas-ci pour n=5 et n=7– pour former des carrés pandiagonaux. Toutefois, un problème se pose, et l'incertitude des sources de notre auteur en est le reflet: ces méthodes ne sont pas généralement applicables, car elles failliront si l'ordre impair n est un multiple de 3.

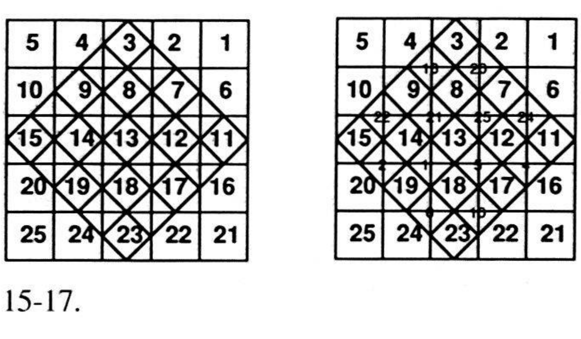
c. *Troisième méthode*

«On dessine le carré que l'on veut rendre magique. Puis on partage ses quatre côtés par deux, et l'on joint par une droite les milieux de chaque paire de côtés contigus; puis on joint les intersections des lignes dans chacune des deux directions (parallèles aux côtés). Il apparaît ainsi à l'intérieur du carré

un autre carré, semblable au carré que l'on cherche à remplir, comme le montre cette figure (omise dans le manuscrit; voir fig. 15). *Ensuite, on remplit les cases du grand carré –donc de celui que l'on a dessiné en premier– avec les nombres en succession en commençant par celui qui convient. Partant ainsi de 1 pour l'ordre naturel, on en remplit les cases l'une après l'autre, rangée après rangée, jusqu'à la dernière des rangées horizontales, comme le montre cette figure dans laquelle le début est avec 1* (fig. 15) *–car il sera dès lors question de l'ordre naturel, les autres cas* (de nombres en progression arithmétique) *étant analogues. Alors, certaines des cases du petit carré sont remplies et les cases restantes sont vides. On complète celles-ci de la manière suivante: on va vers chaque case vide, et l'on y met, des nombres situés dans le grand carré à l'extérieur du petit, celui qui occupe la case diagonalement opposée la plus éloignée* (fig. 16). *Ceci étant fait, la magie sera complétée dans le petit carré* (fig. 17) *–car c'est lui qu'il s'agissait de remplir, alors que le premier, le grand, n'a été rempli que pour lui servir d'auxiliaire* (wasīla)». Après ces explications, l'auteur illustre le déplacement des nombres des angles par quelques exemples pris sur la figure. Il note enfin que le carré magique obtenu de cette façon est semblable à celui que l'on obtient par la première méthode (à l'inversion autour de la verticale près).

Remarque: Cette construction est utilisée dans les textes anciens avec un but bien précis: elle permet de montrer le fondement de la magie obtenue par la règle déjà vue en I.a. En effet, il apparaît (fig. 16) que les *diagonales* du carré magique auquel on parvient sont les *rangées médianes* du carré formé des nombres naturels, et que tant ses *lignes* que ses *colonnes* sont constituées par les *diagonales* (principales ou brisées) du carré naturel. Or, les rangées médianes et toutes les diagonales du carré naturel impair possèdent la propriété que la somme de leurs éléments produit la constante magique. Cette justification de la méthode doit avoir été connue au X^{e} siècle. Elle fut du moins clairement expliquée par Ibn al-Haytham (env. 965-1040), dont un auteur du XII^{e} siècle a rapporté le raisonnement (SESIANO 1980, 189-90).





3	20	7	24	11
16	8	25	12	4
9	21	13	5	17
22	14	1	18	10
15	2	19	6	23

Figures 15-17.

II. *Carrés à enceinte*

Après avoir mentionné les différentes dénominations de ces carrés (*muḥallaq, muṭawwaq, mujawwaf, muqayyad, muschinnīr*), l'auteur indique que l'on trouve *«d(ifférent)es méthodes et manières de construction chez les spécialistes* (ahl al-fann), *dont les unes sont des instructions reposant sur le tâtonnement* (fawā'id istiqrā'iya) *qui sont ardues pour qui n'en a point la pratique* (riyāḍa), *et les autres sont des préceptes valables généralement* (qawā'id kulliya)». Il ajoute qu'il va considérer ici l'un et l'autre genre.

a. *Méthode utilisant le tâtonnement*

«On prend les nombres naturels (al-a'dād al-ṭabī'īya) *à partir de 1 jusqu'à la moitié du nombre des cases de l'enceinte* (ḥalaqa) *que l'on veut remplir, et l'on place ces nombres dans les cases de l'enceinte en telle façon que deux cases se faisant face ne soient ni toutes deux occupées ni toutes deux vides, que le vide laissé dans une rangée ne soit pas moindre que la moitié du nombre de ses cases diminué de 1, et que la somme du contenu d'un côté de l'enceinte dépasse la somme du contenu de son opposé par la moitié du nombre égalisateur* (al-'adad al-'idl). *Le placement des nombres selon la caractéristique indiquée est ce que l'on entend par «tâtonnement» dans ce contexte; pour faciliter le tâtonnement en ceci, on peut placer deux des nombres considérés dans les deux angles du côté supérieur, puis disposer entre eux un ou plusieurs nombres de façon à compléter l'occupation de la moitié des cases du côté arrondie par excès* (majbūran), *et en bas deux ou des nombres, en quantité telle que soit complétée l'occupation de cases en nombre égal à la moitié des parties du côté débarrassée de la fraction* (maḥdhūf al-kasra), *et tels que leur somme égale l'excès du contenu du côté supérieur sur la moitié de l'égalisateur* (al-'idl). *Ensuite, la somme du contenu des deux angles susdits avec le double de ce qui se trouve entre eux est soustraite de la somme des nombres considérés, de 1 jusqu'à la moitié du nombre des cases de l'enceinte, et l'on garde en mémoire la moitié de ce qui reste après qu'on a effectué la soustraction. On remplit alors l'un des deux côtés, droit ou gauche, à l'aide de (ce qui reste des) nombres considérés initialement, en telle façon que leur somme soit, avec le contenu de l'angle appartenant à ce côté, égal au nombre gardé en mémoire. Il importera alors que ce qui reste des nombres considérés après les (précédents) placements dans l'enceinte, ajouté à ce qui est dans l'autre angle, égale le nombre gardé en mémoire plus la moitié de l'égalisateur».*

Nous avons traduit le texte intégralement, car les principes de l'établissement d'une bordure pour un carré impair y sont tous précisément mentionnés, comme il apparaîtra de l'analyse qui suit.

L'enceinte d'un carré d'ordre n contient $4n$-4 cases, et nous nous proposons d'en remplir la moitié avec les $2n$-2 premiers nombres. Pour ceci, différentes conditions sont à satisfaire.

1.–De deux cases opposées (verticalement ou horizontalement pour les cases intérieures, diagonalement pour les cases angulaires), seule une doit être remplie.

En effet, si celle-ci contient un nombre c, on placera dans la case opposée la quantité n^2+1-c, où n est l'ordre du carré. De la sorte, la suppression de l'enceinte diminuera chaque rangée uniformément de n^2+1, et il restera un carré magique de somme constante $\frac{n-2}{2}(n^2+1)$. Remarquons déjà que n^2+1 est le «nombre égalisateur» dont il sera question par la suite.

2.–Dans une paire de côtés opposés, aucun n'aura moins de $\frac{n-1}{2}$ cases vides.

En effet, l'enceinte est formée de quatre côtés à n cases, où n est un nombre impair, en sorte qu'une répartition homogène imposera de remplir d'un côté $\frac{n+1}{2}$ cases et de l'autre $\frac{n-1}{2}$ cases.

3.–Considérons par exemple les deux lignes, et représentons par A_i les $\frac{n+1}{2}$ éléments placés d'un côté et par B_i les $\frac{n-1}{2}$ éléments placés de l'autre côté. Les compléments des B_i, de somme $\frac{n-1}{2}(n^2+1) - \sum B_i$, s'ajouteront aux A_i, et l'on devra avoir égalité entre la somme des n nombres dans la rangée des A_i et la constante magique, soit

$$\sum A_i + \frac{n-1}{2}(n^2+1) - \sum B_i = \frac{n}{2}(n^2+1),$$

donc

$$\sum A_i - \sum B_i = \frac{n^2+1}{2}$$

comme il est dit dans le texte.

4.–Considérons à présent les deux colonnes. Il ne nous faut placer que $\frac{n-1}{2}$ nombres C_i d'un côté et $\frac{n-3}{2}$ nombres D_i de l'autre, car les deux cases angulaires sont déjà occupées par deux des A_i, disons A_C sur le côté des C_i et A_D sur le côté des D_i. Avec les compléments des D_i, la rangée des C_i contiendra donc en tout

$$A_C + \sum C_i + \frac{n-3}{2}(n^2+1) - \sum D_i + (n^2+1) - A_D,$$

égal à $\frac{n}{2}(n^2+1)$, en sorte que l'on aura

$$\sum C_i - \sum D_i = \frac{n^2+1}{2} + A_D - A_C. \qquad (*)$$

Tous les nombres insérés (avant l'introduction des compléments) étant les nombres de 1 à $2n$-2, on aura

$$\sum A_i + \sum B_i + \sum C_i + \sum D_i = 1 + 2 + ... + (2n-2) = (n-1)(2n-1).$$

Or, puisque

$$\sum A_i + \sum B_i = 2 \sum A_i - \frac{n^2+1}{2}$$

et que l'on peut écrire

$$\sum A_i = A_C + A_D + \sigma$$

où σ est la somme des A_i à l'intérieur de la rangée (excluant donc les angles), la relation précédente devient

$$\sum C_i + \sum D_i = (n\text{-}1)(2n\text{-}1) + \frac{n^2+1}{2} - 2(A_C + A_D + \sigma). \qquad (**)$$

Considérant (*) et (**), on obtient par addition respectivement soustraction

$$2 \sum C_i = (n\text{-}1)(2n\text{-}1) + (n^2\text{+}1) - 3A_C - A_D - 2\sigma$$

soit

$$A_C + \sum C_i = \frac{(n-1)(2n-1)-(A_C+A_D+2\sigma)}{2} + \frac{n^2+1}{2} \ ,$$

respectivement

$$2 \sum D_i = (n\text{-}1)(2n\text{-}1) - 3A_D - A_C - 2\sigma$$

soit

$$A_D + \sum D_i = \frac{(n-1)(2n-1)-(A_C+A_D+2\sigma)}{2} \ ,$$

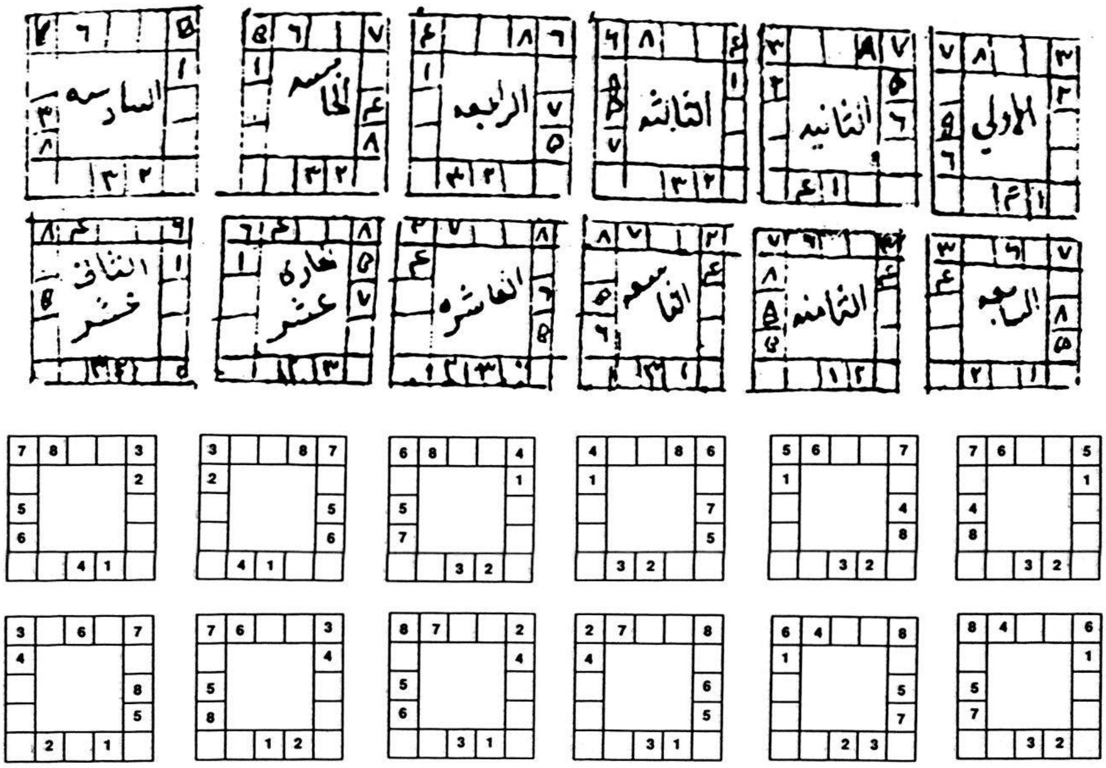
qui sont les deux relations trouvées à la fin du texte.

Ceci, note l'auteur, est valable pour tout carré impair d'ordre supérieur à 3, et la diversité des possibilités va croissant avec l'ordre. Ainsi, le carré de 5 offre déjà douze possibilités de bordure (fig. 18-29; chaque figure, *ṣūra*, est numérotée dans le manuscrit); ces bordures donneront elles-mêmes naissance à diverses espèces selon les modifications de l'ordre de succession et de la répartition des nombres à l'intérieur des rangées.

Remarque: L'auteur associant à chaque type le carré inversé relativement à l'axe vertical, ses cas réellement différents sont au nombre de six. Il a omis les deux autres possibilités remplissant ses conditions, à savoir les cas où (v. fig. 30) *a, b, c, d, e, f, g, h* sont respectivement égaux à 6, 7, 4, 2, 5, 8, 1, 3 et à 7, 4, 5, 3, 6, 8, 1, 2.

La suite du traitement est claire (là aussi, nous reproduisons l'essentiel du texte). Après avoir rempli le reste de la bordure avec les compléments à n^2+1, on passe à la bordure intérieure suivante (si n>5). On y procède de manière analogue pour placer les $2n$-6 nombres venant à la suite du dernier nombre inscrit précédemment, puis leurs compléments à n^2+1, et l'on passe à la bordure suivante. Quand on parvient au carré de 3, on le remplit selon la méthode connue. Les deux exemples d'application de l'auteur sont ceux des figures 31 –comp. avec la fig. 18– et 32.

Comme il est enfin remarqué, on peut prendre, pour la disposition, les nombres dans l'ordre inverse, en commençant donc par le plus grand, et l'on obtient aussi un carré magique à bordures; deux exemples sont destinés à illustrer ceci (fig. 33 –comp. avec la fig. 31– et 34).



Figures 18-29.

a	*b*			*c*
				d
e				
f				
		g	*h*	

Figure 30.

7	8	22	25	3
24	12	17	10	2
5	11	13	15	21
6	16	9	14	20
23	18	4	1	19

18	16	14	12	10	113	114	116	118	120	20
103	34	32	30	28	95	96	98	100	36	19
105	87	46	44	42	81	82	84	48	35	17
107	89	75	54	52	71	72	56	47	33	15
109	91	77	67	60	65	58	55	45	31	13
111	93	79	69	59	61	63	53	43	29	11
7	25	39	49	64	57	62	73	83	97	115
5	23	37	66	70	51	50	68	85	99	117
3	21	74	78	80	41	40	38	76	101	119
1	86	90	92	94	27	26	24	22	88	121
102	106	108	110	112	9	8	6	4	2	104

Figures 31-32.

19	18	4	1	23
2	14	9	16	24
21	15	13	11	5
20	10	17	12	6
3	8	22	25	7

68	70	72	74	7	6	4	2	66
15	56	58	60	21	20	18	54	67
13	27	48	50	31	30	46	55	69
11	25	35	42	37	44	47	57	71
9	23	33	43	41	39	49	59	73
77	63	53	38	45	40	29	19	5
79	65	36	32	51	52	34	17	3
81	28	24	22	61	62	64	26	1
16	12	10	8	75	76	78	80	14

Figures 33–34.

Remarque: La numérotation d'un carré à rebours, donc le remplacement du nombre i par n^2+1-i, est en effet l'une des transformations qui conservent la propriété magique. Pour certaines espèces de carrés (dits «symétriques», dans lesquels la somme de deux éléments opposés par rapport au centre du carré fait n^2+1), le carré obtenu ne diffère du carré originel que par une rotation de 180°; c'est par exemple le cas des carrés construits par la méthode I.a. Le changement n'est guère plus important dans les carrés à bordures, où la symétrie d'éléments complémentaires est axiale, sauf pour les angles où elle est centrale.

b. *Méthodes généralement applicables*

Des différents modes de construction, l'auteur annonce qu'il se limitera à l'exposition de ce qui est le plus connu (*aschhar*). Il présente quatre règles (*ḍawābiṭ*), dont chacune est expliquée avec autant de détails que l'autre, bien que trois de ces méthodes mènent aux mêmes carrés. Aussi nous contenterons-nous de traduire les directives de la première et de résumer le reste.

«On place toujours le premier des nombres au milieu du côté droit. Comptant les cases du côté (droit) depuis la case centrale jusqu'à l'angle inférieur droit en commençant avec 1, on met dans chaque case son nombre, jusqu'à ce que l'on arrive à l'angle indiqué, où l'on ne met rien: on place le nombre alors atteint dans l'angle inférieur gauche. On avance avec les nombres consécutifs qui le suivent dans les cases de la rangée inférieure se succédant après l'angle que nous avons rempli, plaçant dans chaque case le nombre que l'on atteint, jusqu'à ce que l'on parvienne à la case centrale; mais on n'y met pas le nombre atteint, que l'on place dans la case opposée de la rangée supérieure, donc en son milieu. On s'imagine ensuite que ce nombre que l'on a placé au milieu du côté supérieur se trouve au milieu du côté gauche, et l'on commence le comptage avec ce nombre comme s'il était au

centre, en avançant avec les nombres consécutifs qui suivent ce nombre dans les cases de cette rangée, jusqu'à ce que l'on parvienne à l'angle supérieur gauche; on met dans chaque case le nombre qui y est atteint, et l'on fait de même avec l'angle. On s'imagine ensuite que le contenu de l'angle supérieur gauche mentionné occupe le milieu du côté supérieur, et l'on compte les cases du côté supérieur en partant de là et en se dirigeant vers la droite, en commençant avec le nombre que l'on s'est imaginé être au centre du côté en question; on place dans chaque case le nombre qui y est atteint, mais on ne met rien dans l'angle lorsque l'on y parvient. Ceci étant fait, les nombres apparaîtront répartis dans l'enceinte en accord avec la caractéristique précédemment mentionnée (*supra*, II.a). *Ensuite, on remplit la deuxième enceinte selon cette même méthode, en commençant avec le nombre suivant le dernier des nombres placés dans la première enceinte. Ensuite, on place les nombres dans la troisième enceinte selon ce qui a été expliqué, en commençant avec le nombre suivant le dernier des nombres placés dans la deuxième enceinte. Poursuivant toujours le traitement ainsi, on remplit une enceinte après l'autre, jusqu'à ce qu'il reste au centre de la figure le carré de 3. On remplit ensuite le carré de 3 au centre comme il a été expliqué, et l'on remplit les cases vides comme on sait le faire, l'égalisateur que l'on considère étant pour les enceintes de chaque carré magique l'égalisateur du grand carré magique qui les renferme».*

A titre d'exemple, l'auteur présente un carré d'ordre 11 (fig. 35).

16	115	114	113	112	11	17	18	19	20	116
15	33	96	95	94	29	34	35	36	97	107
14	32	46	81	80	43	47	48	82	90	108
13	31	45	55	70	53	56	71	77	91	109
12	30	44	54	60	65	58	68	78	92	110
121	101	85	73	59	61	63	49	37	21	1
120	100	84	72	64	57	62	50	38	22	2
119	99	83	51	52	69	66	67	39	23	3
118	98	40	41	42	79	75	74	76	24	4
117	25	26	27	28	93	88	87	86	89	5
6	7	8	9	10	111	105	104	103	102	106

Figure 35.

La deuxième des règles n'est, comme déjà dit, pas essentiellement différente. On remarque certes de l'exemple de l'auteur (fig. 36) que l'angle inférieur droit est formé de nombres consécutifs, mais ceci provient seulement d'un changement dans la répartition des nombres. Ce détail mis à part, le carré correspond à celui que l'on obtiendrait en faisant tourner le carré de la fig. 35 autour de sa diagonale ascendante. De même, l'exemple de la troisième règle (fig. 37) –laquelle règle, tout comme les deux précédentes, est expliquée avec force détails– ne diffère que par une rotation d'un carré d'ordre 9 qui aurait été construit à l'aide de la première règle.

106	5	4	3	2	1	110	109	108	107	116
10	89	24	23	22	21	92	91	90	97	112
9	28	76	39	38	37	78	77	82	94	113
8	27	42	67	50	49	68	71	80	95	114
7	26	41	52	60	65	58	70	81	96	115
111	93	79	69	59	61	63	53	43	29	11
102	86	74	66	64	57	62	56	48	36	20
103	87	75	51	72	73	54	55	47	35	19
104	88	40	83	84	85	44	45	46	34	18
105	25	98	99	100	101	30	31	32	33	17
6	117	118	119	120	121	12	13	14	15	16

Figure 36.

Dans la quatrième règle, le placement des nombres se fait en les inscrivant alternativement dans deux côtés contigus, puis dans l'autre paire de côtés, en sorte que des rangées opposées contiennent presque uniquement des nombres de même parité (fig. 38). C'était déjà le cas dans les fig. 32 et 34 –établies en principe par tâtonnement–, où l'on reconnaît le même type d'arrangement.
Remarque: Ces deux méthodes de placement des nombres consécutifs dans les rangées, selon l'ordre naturel ou suivant la parité, étaient connues de longue date. Celle des fig. 32 & 34 apparaît déjà dans des textes du X^e siècle (SESIANO 1991, 22). Celle de la fig. 35 était certainement connue au XII^e siècle (*ibid.*), mais il n'est point douteux qu'elle ait été utilisée auparavant. On peut vérifier que toutes deux remplissent les conditions générales établies en II,a.

77	70	71	72	1	2	3	4	69
16	62	57	58	17	18	19	56	66
15	28	51	48	29	30	47	54	67
14	27	36	40	45	38	46	55	68
9	23	33	39	41	43	49	59	73
74	60	50	44	37	42	32	22	8
75	61	35	34	53	52	31	21	7
76	26	25	24	65	64	63	20	6
13	12	11	10	81	80	79	78	5

Figure 37.

12	48	46	45	6	8	10
11	20	36	35	16	18	39
9	19	24	29	22	31	41
7	17	23	25	27	33	43
47	37	28	21	26	13	3
49	32	14	15	34	30	1
40	2	4	5	44	42	38

Figure 38.

L'auteur termine en remarquant que, pour s'éviter le travail d'effectuer quantité de soustractions, il est préférable de placer les opposés eux aussi dans l'ordre, décroissant (si l'on part de n^2 sur la bordure extérieure) ou croissant (si l'on part de $\frac{n^2+1}{2}$ + 5 dans la bordure d'ordre 5).

III. *Carrés à compartiments*

«On doit savoir que l'impair ne peut être construit (comme carré) à compartiments (mulaffaq) *si son côté n'est pas composé relativement à la multiplication, comme le sont le carré de 9, le carré de 15, le carré de 21, et les autres semblables. La méthode est la suivante. On partage le grand carré en petits carrés, dont chacun a uniformément le même nombre de parties au côté, et dont la quantité globale égale le carré du nombre par lequel le côté de ces petits carrés mesure le côté du grand carré. Ainsi, le carré de 9 est partagé en 9 carrés de 3, le carré de 15 en 9 carrés de 5 ou, si l'on veut, en 25 carrés de 3, et le carré de 21 en 9 carrés de 7 ou en 49 carrés de 3, et ainsi de suite. Puis on place dans le premier des petits carrés les nombres naturels depuis 1 jusqu'au nombre des cases du petit carré, le placement étant effectué suivant l'une des méthodes permettant de remplir cette catégorie* (jins) *de carré. Ensuite, on place dans le second des petits carrés les nombres naturels en commençant par celui qui suit le dernier des nombres placés dans le premier carré. Ensuite, on place dans le troisième des petits carrés les nombres naturels en commençant par celui qui suit le dernier des nombres placés dans le second carré. Ensuite, on place les nombres naturels dans le quatrième carré en commençant par celui qui suit le dernier des nombres placés dans le troisième carré. Et l'on continue à remplir les carrés, l'un après l'autre, de cette même manière, jusqu'à ce que l'on ait rempli le grand carré. Et le premier des petits carrés est celui qui prendrait la place de 1 si l'on considérait les petits carrés comme des cases, le second celui qui prendrait la place de 2, le troisième celui qui prendrait la place de 3, le quatrième celui qui prendrait la place de 4, et ainsi de suite de manière analogue. Lorsque alors on aura suivi cette méthode, pour l'établissement des petits carrés magiques et pour leur arrangement, le grand carré sera lui aussi magique. Voici un exemple de ceci pour le carré magique de 9 par 9, complètement rempli pour servir de modèle dans d'autres cas* (fig. 39)».

31	36	29	76	81	74	13	18	11
30	32	34	75	77	79	12	14	16
35	28	33	80	73	78	17	10	15
22	27	20	40	45	38	58	63	56
21	23	25	39	41	43	57	59	61
26	19	24	44	37	42	62	55	60
67	72	65	4	9	2	49	54	47
66	68	70	3	5	7	48	50	52
71	64	69	8	1	6	53	46	51

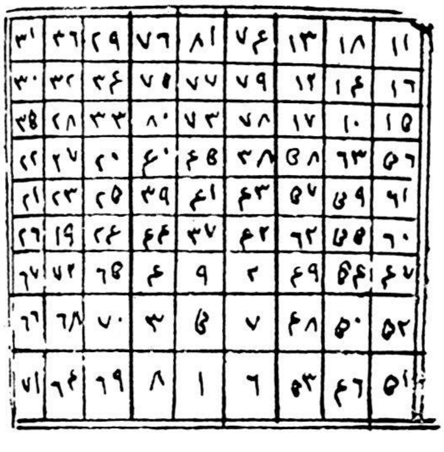


Figure 39.

Remarque: Cette section n'étant point trop longue, nous l'avons traduite intégralement. Les instructions y sont parfaitement claires, parfois un peu trop rabâchées –on ne pouvait trop attendre d'un public avide surtout de construire des amulettes. Limitons-nous donc à résumer la théorie des carrés à compartiments.

Supposons que l'ordre du grand carré soit un nombre (impair) composé, donc tel que $n=r\cdot s$ avec r et s entiers différents de 1. Le grand carré peut alors être partagé en r^2 carrés d'ordre s. Supposant ces r^2 carrés arrangés selon une disposition que l'on utiliserait pour l'ordre r, on les remplira l'un après l'autre en adoptant cet arrangement, chacun des r^2 carrés étant tour à tour rempli par s^2 nombres placés selon une disposition magique convenant à l'ordre s. De la sorte, tant le grand carré que les petits seront magiques, le grand avec la constante M_n et le $m^{\text{ième}}$ des r^2 petits carrés avec la constante

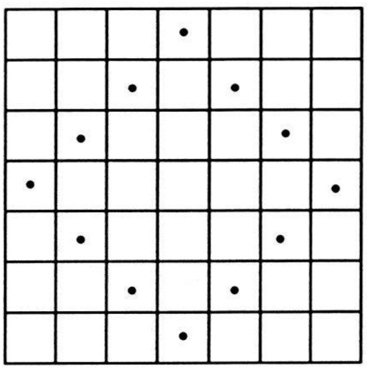
$$M_s + (m-1)s^3 = \frac{s\left[(2m-1)s^2+1\right]}{2}.$$

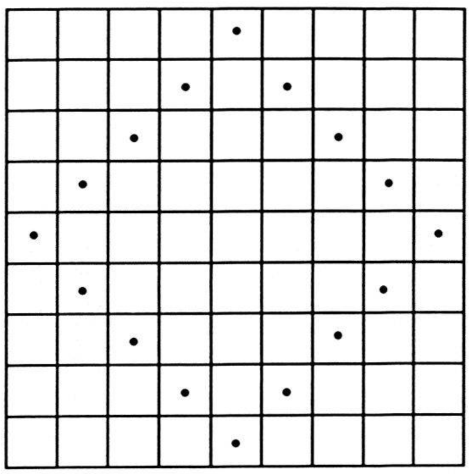
Des carrés magiques à compartiments apparaissent dans les plus anciens textes conservés, ceux du X^e siècle. A cette époque déjà, les conditions de leur construction étaient reconnues (l'ordre ne doit évidemment pas être premier, et, si n est pair, les facteurs r, s doivent être différents de 2 –puisqu'un carré d'ordre 2 n'admet pas de disposition magique).

IV. *Séparation des nombres selon la parité*

On n'avait cure, jadis, de la longueur des titres. Ainsi celui de cette section dans le texte arabe est-il notablement plus explicite que le nôtre: *«Sur le placement des nombres naturels dans les carrés impairs en une disposition magique telle que les impairs soient réunis au centre de la figure et les pairs dans les angles»*.

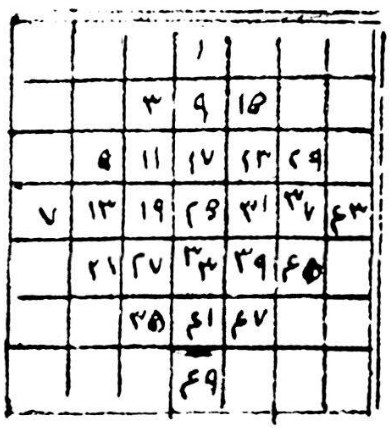
La méthode exposée peut être résumée comme suit. Partant (par exemple) de la case médiane de la rangée supérieure, on relie successivement les cases médianes latérales en avançant par un saut de la dame (*naql al-firzān*) et en mettant un point dans chaque case rencontrée. On obtient ainsi, déterminée par les cases marquées d'un point (*al-buyūt al-manqūṭa*), l'image d'un carré intérieur dont les sommets touchent les milieux des côtés du grand carré et dont les rangées diffèrent alternativement d'une case en plus et en moins (fig. 40 et 41).

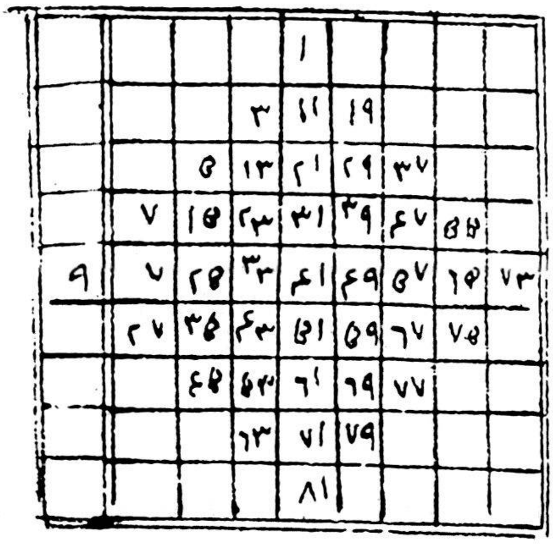




Figures 40-41.

Commençant à l'angle placé sur le côté supérieur, on inscrit les impairs pris selon l'ordre naturel dans la succession des lignes, jusqu'à ce que la figure intérieure soit complétée (fig. 42 et 43). Pour achever le carré magique, il reste à placer les pairs dans les angles. Il existe pour cela *«d(ivers)es méthodes. Restreignons-nous ici à (la présentation) des plus courtes et des plus faciles à comprendre, qui sont au nombre de deux»*.





			1			
		3	9	15		
	5	11	17	23	29	
7	13	19	25	31	37	43
	21	27	33	39	45	
		35	41	47		
			49			

				1				
			3	11	19			
		5	13	21	29	37		
	7	15	23	31	39	47	55	
9	17	25	33	41	49	57	65	73
	27	35	43	51	59	67	75	
		45	53	61	69	77		
			63	71	79			
				81				

Figures 42-43.

a. *Première méthode*

Considérant le triangle inférieur droit, on en remplit l'hypoténuse avec les premiers nombres pairs, en partant de la case située en-dessous de la case médiane du côté droit et en avançant par la marche de la dame. Après l'inscription du dernier terme (soit n-1), on passe à l'hypoténuse du triangle inférieur gauche, et l'on écrit dans sa case supérieure le prochain nombre pair, qui se trouve être le pair suivant immédiatement l'impair placé au-dessus de lui; l'auteur dit ici qu'il désignera désormais ce nombre par le vocable *uss* (= base, fondement) *«pour faciliter les références qui y seront faites»*. En analogie avec ce dernier placement, nous remplissons le reste de l'hypoténuse avec les pairs suivant immédiatement les impairs placés au-dessus. Grâce à la connaissance des éléments de ces deux diagonales, nous sommes à même de remplir tout le reste du carré: l'addition répétée de la «base» à chacun d'eux permet de déterminer le contenu du reste des colonnes, en descendant d'abord puis en se reportant, lorsque le pied de la colonne est atteint, à son sommet. Ceci est illustré par deux exemples (fig. 44 et 45). L'auteur conclut en remarquant que la «base» est dans chaque carré impair égale à $n+1$ (au *«nombre du côté augmenté de 1»*).

18	22	1	10	14
24	3	7	11	20
5	9	13	17	21
6	15	19	23	2
12	16	25	4	8

32	38	44	1	14	20	26
40	46	3	9	15	28	34
48	5	11	17	23	29	42
7	13	19	25	31	37	43
8	21	27	33	39	45	2
16	22	35	41	47	4	10
24	30	36	49	6	12	18

Figures 44-45.

b. *Deuxième méthode*

On s'imagine que les quatre parties formant les angles sont accolées en sorte de se trouver réunies autour d'un point, par exemple au coin inférieur droit. Il apparaît ainsi une figure annexée (*schakl tābi'*) à la figure contenant les impairs, dans laquelle on arrangera les pairs dans l'ordre, tout comme on l'avait fait précédemment pour les impairs. Se représentant ensuite le retour (*'aud*) de chacune des parties à sa place, on obtiendra le carré magique complété, dans la même disposition que précédemment (fig. 46).

Remarque: L'auteur avait initialement fait allusion à diverses méthodes de construction du placement des pairs dans les angles. On en connaît une autre, attribuée à un auteur des XI^{e}-XII^{e} siècles (SESIANO 1995, II, §1). Elle est toutefois moins commode que les deux méthodes ici présentées, et pourrait donc avoir été connue de notre auteur et omise à dessein.

32	38	44	1	14	20	26			
40	46	3	9	15	28	34			
48	5	11	17	23	29	42			
7	13	19	25	31	37	43			
8	21	27	33	39	45	2	8		
16	22	35	41	47	4	10	16	22	
24	30	36	49	6	12	18	24	30	36
				14	20	26	32	38	44
					28	34	40	46	
						42	48		

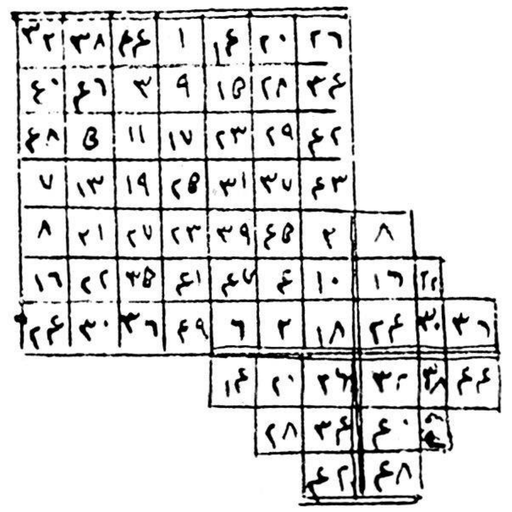


Figure 46.

V. *Carrés à trous*

a. *Carrés d'ordre impair*

La construction d'un carré magique impair à centre vide (*khālī al-wasaṭa*) n'est possible, dit l'auteur, qu'à partir de l'ordre n=5. Pour construire ces carrés, on part de la case médiane, qu'on laisse vide, puis on inscrit les nombres successifs par la marche du cavalier en partant en direction du haut ou du bas, vers la gauche ou vers la droite. Après l'inscription de n-1 nombres (*a'dād bi-qadr 'iddat aqsām al-ḍila' illā wāḥidan*), on place le début de la seconde série dans la rangée de la case dernièrement remplie, dans la $n^{\text{ième}}$ case à partir de celle-ci (inclusivement) et en comptant les cases dans le sens de la progression de la première série. Complétant ce carré selon les deux mouvements, et après un nombre de séries égal à l'ordre du carré, on obtient un carré magique (fig. 47 et 48). Par un troisième exemple (fig. 49), l'auteur montre que, pour le passage d'une série à la suivante, on peut aussi se déplacer dans l'autre direction de 3 (nous dirions: 2) cases. Or, il apparaît que dans ces carrés la somme constante, verticalement, horizontalement et diagonalement (*ṭūlan wa-'arḍan wa-quṭran*), est inférieure de n à la constante du carré magique usuel (*wafq ṭabī'ī*); si l'on veut alors retrouver la constante magique habituelle, on augmentera les termes de la dernière série de l'ordre du carré (fig. 50 et 51; nos termes en italique ne sont pas signalés d'une manière particulière dans le manuscrit).

8	20	12	4	16
2	19	6	23	10
21	13		17	9
15	7	24	11	3
14	1	18	5	22

19	2	41	24	7	46	29
11	43	33	16	6	38	21
3	35	25	8	47	30	20
44	34	17		39	22	12
36	26	9	48	31	14	4
28	18	1	40	23	13	45
27	10	42	32	15	5	37

23	5	17	4	11
2	14	21	8	15
6	18		12	24
10	22	9	16	3
19	1	13	20	7

Figures 47-49.

8	*25*	12	4	16
2	19	6	*28*	10
26	13		17	9
15	7	*29*	11	3
14	1	18	5	*27*

28	5	17	4	11
2	14	*26*	8	15
6	18		12	*29*
10	*27*	9	16	3
19	1	13	*25*	7

Figures 50-51.

«Cette méthode, avec ses deux formes, est une méthode très estimable et remarquable, qui permet de construire n'importe quel carré magique de cette espèce à centre vide pour un ordre (impair) supérieur à trois», ajoute encore l'auteur.

Remarque: Comme il a déjà été remarqué dans l'introduction, l'apparition de ces carrés à trous –par définition d'ordres impairs seulement– paraît être tardive, car ils semblent avoir surtout servi à la construction d'amulettes. Quant au principe de leur construction, il se déduit de celui des carrés étudiés en I,b. En effet, dès lors que les carrés des figures 12 et 13 sont pandiagonaux, on peut à loisir en permuter les lignes et les colonnes sans changer le caractère magique. De ce fait, chaque nombre peut être amené à occuper n'importe quelle case. Si l'on met en particulier le 1 au centre, puis que l'on diminue de 1 chaque nombre du carré, on retrouvera les deux carrés d'ordre 5 des figures 47 et 49. Notons enfin que la réalisation de ces carrés à centre vide sera assujettie aux restrictions concernant la construction des carrés pandiagonaux (v. I,b, *remarque*).

b. *Le carré d'ordre 3*

On ne peut y réaliser la disposition magique avec un centre vide en remplissant à la fois la condition des côtés et des diagonales (*ma'a ṣiḥḥat aḍlā'ihi wa-aqṭārihi jamī'an*), dit l'auteur, mais on peut opérer un rangement magique en laissant vide l'une des cases médianes latérales. La règle, dont il attribue la paternité à al-Schabrāmallisī (cf. introduction), peut être résumée ainsi. On partage la différence entre la constante magique et le nombre égalisateur, donc 5, en deux parties entières que l'on place dans deux angles voisins. On place entre eux l'égalisateur, et au centre du carré ladite différence. On peut alors compléter les deux diagonales puis les deux cases médianes restant encore à remplir (celle qui est entre les pieds des deux diagonales demeurera vide). L'auteur présente les seize figures possibles (fig. 52-67 –soit, selon ce qui a été vu en I,a, huit pour chacune des deux décompositions de 5 possibles, savoir 1+4 et 2+3).

On peut aussi obtenir comme somme un multiple de 15 en multipliant par son facteur chaque nombre dans un des carrés précédents (fig. 68; comp. avec la fig. 52).

L'auteur remarque que les huit premières des seize figures se construisent comme par la première des règles enseignées (v. I.a), mais à deux différences près: on ne place pour la première série que deux nombres, car on laisse sa case initiale inoccupée, et l'on saute une unité au début des deux séries suivantes. Si l'on omet ce second pas, le dernier terme (*mighlāq*) est 8 et la constante magique (*ḍila' al-schakl*) 12 (fig. 69-76).

Si l'on désire obtenir quelque autre somme magique dans ces huit figures, on divise cette somme par 12 et l'on multiplie chaque nombre par le quotient trouvé (fig. 77, se déduisant de la figure 69, pour la somme M=60). S'il y a un reste de la division, on procède comme avant avec la partie entière du quotient, puis on ajoute le reste aux nombres de la troisième série; si ce reste est pair, on peut aussi en répartir les moitiés entre les nombres des deuxième et troisième séries (fig. 78 resp. 79, procédant de la fig. 77, pour M=66 –somme des lettres du nom *All(a)h*, en attribuant aux lettres leurs valeurs numériques).

Il est toutefois possible, remarque l'auteur, de laisser la case centrale vide si l'on renonce à la magie usuelle: la somme magique M ne se retrouvera en effet plus dans chaque diagonale, mais dans leur somme seulement. Pour avoir une telle disposition, on représente la somme M comme somme de quatre parties, qui doivent être différentes,

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4,$$

et l'on place chacune d'elles dans un angle; les cases latérales médianes seront alors occupées par les compléments respectifs à M (fig. 80 –ajoutée par nous). Mais il faut encore que les sommes $m_1 + m_3$, $m_1 + m_4$, $m_2 + m_4$, $m_2 + m_3$ soient toutes différentes, et en outre différentes de chacune des parties, en sorte qu'il

4	10	1
2	5	8
9		6

9	2	4
	5	10
6	8	1

6		9
8	5	2
1	10	4

1	8	6
10	5	
4	2	9

1	10	4
8	5	2
6		9

4	2	9
10	5	
1	8	6

9		6
2	5	8
4	10	1

6	8	1
	5	10
9	2	4

3	10	2
4	5	6
8		7

8	4	3
	5	10
7	6	2

7		8
6	5	4
2	10	3

2	6	7
10	5	
3	4	8

2	10	3
6	5	4
7		8

3	4	8
10	5	
2	6	7

8		7
4	5	6
3	10	2

7	6	2
	5	10
8	4	3

16	40	4
8	20	32
36		24

Figures 52-68.

3	8	1
2	4	6
7		5

7	2	3
	4	8
5	6	1

5		7
6	4	2
1	8	3

1	6	5
8	4	
3	2	7

1	8	3
6	4	2
5		7

3	2	7
8	4	
1	6	5

7		5
2	4	6
3	8	1

5	6	1
	4	8
7	2	3

15	40	5
10	20	30
35		25

15	46	5
10	20	36
41		25

18	43	5
10	23	33
38		28

Figures 69-79.

m_3	m_2+m_4	m_1
m_1+m_4		m_2+m_3
m_2	m_1+m_3	m_4

Figure 80.

n'y ait aucune répétition de nombre dans le carré. Dans le premier exemple (fig. 81, avec M=66), l'auteur utilise la décomposition admissible M=66=13+9+25+19. Dans le second (fig. 82), il prend M=60=9+3+20+28.

Il est aussi possible, relève-t-il enfin, d'inscrire les cinq premiers nombres naturels, puis de compléter à M (fig. 83, ajoutée par nous, car le texte s'interrompt ici du fait de la deuxième lacune).

25	28	13
32		34
9	38	19

20	31	9
37		23
3	29	28

3	M-4	1
M-5		5
2	4	M-6

Figures 81-83.

BIBLIOGRAPHIE

BROCKELMANN C., 1943, 1949. Geschichte der arabischen Litteratur. 2 vol. E.J. Brill, Leiden. IX+676 et XIV+687 p.

FERMAT P. de, 1679. Varia opera mathematica. J. Pech, Toulouse. X+213 p.

FOLKERTS M., 1981. Zur Frühgeschichte der magischen Quadrate in Westeuropa. *Sudhoffs Archiv 65.4*: 313-338.

AL-JABARTĪ 1888-96. Merveilles biographiques et historiques, ou Chroniques (trad.). 9 vol. Imprimerie Nationale, Le Caire. X+334, 312, 277, 299, 237, 329, 431, 383 et 336 p.

SESIANO J., 1980. Herstellungsverfahren magischer Quadrate aus islamischer Zeit (I). *Sudhoffs Archiv 64.2*: 187-196.

SESIANO J., 1991. An Arabic treatise on the construction of bordered magic squares. *Historia scientiarum 42*: 13-31.

SESIANO J., 1995. Herstellungsverfahren magischer Quadrate aus islamischer Zeit (III). *Sudhoffs Archiv 79.1*.

DE SLANE Baron W. Mac Guckin, 1883-1895. 3 parties. Catalogue des manuscrits arabes de la Bibliothèque nationale. Imprimerie Nationale, Paris. 849 p.

Manuscrit reçu le 9 mai 1994