

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 29 (1903)  
**Heft:** 23

**Artikel:** Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace  
**Autor:** Mayor, B.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23522>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

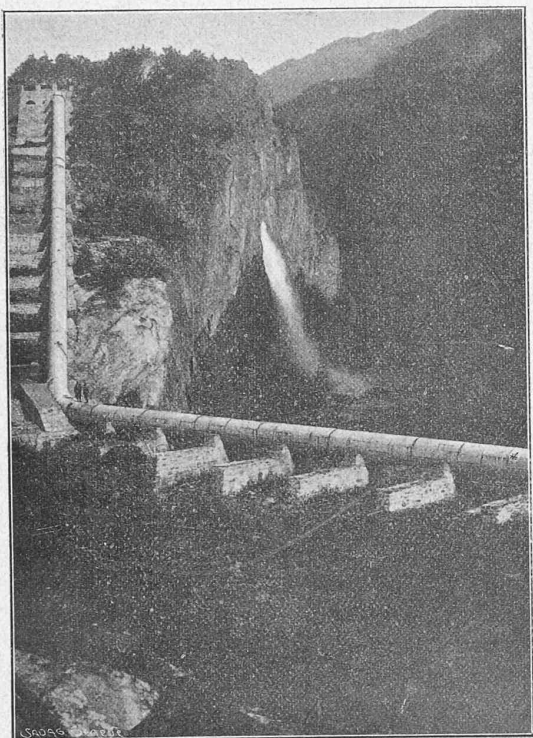


Fig. 18. — Conduite forcée de 1<sup>m</sup>,90 de diamètre intérieur.

l'entrée de tout un réseau de canalisations qui alimentent en eau sous pression les différents ateliers de l'usine électrochimique et les bouches à incendie.

La conduite est formée de viroles de 1<sup>m</sup>,665 de longueur, rivées à l'atelier les unes aux autres bout à bout en tronçons de 6<sup>m</sup>,50, lesquels ont été assemblés sur place par un rivetage.

Le coefficient maximum de travail de la tôle est de 6,25 kg. par mm<sup>2</sup> de section pleine ou 8 kg. par mm<sup>2</sup> de section nette suivant une ligne de rivets. Le métal employé est de l'acier doux des forges de St-Etienne, d'une résistance de 38 kg. par mm<sup>2</sup>, avec allongement de 26 %.

L'épaisseur des tôles varie de 6 mm. à 10 mm., suivant la charge d'eau. Les tôles de 6, 7 et 8 mm. ont été cintrées à froid, celles de 9 et 10 mm. à chaud. Toutes les rivures longitudinales des tôles de 10, 9, 8 et 7 mm. sont formées de deux rangs de rivets, celles des tôles de 6 mm. et toutes les rivures transversales ne sont formées que d'un seul rang de rivets espacés de trois diamètres. Les trous des tôles de 9 et 10 mm. ont été alésés après poinçonnage.

La conduite est placée sur toute sa longueur au-dessus du sol; elle est supportée par des piliers en maçonnerie espacés de 6 m. environ. Elle a été peinte à l'atelier intérieurement et extérieurement au minium de plomb, puis couverte à l'extérieur après le montage d'une couche de blanc de céruse.

Dans sa partie inférieure, elle est protégée contre les crues de l'Isère, comme du reste l'usine elle-même, par une digue en pierres sèches construite en gros matériaux.

L'usine hydro-électrique n'est construite que sur le tiers

de sa longueur; elle renferme neuf groupes électrogènes, pouvant donner chacun 500 chevaux électriques.

Les turbines sont centrifuges et à introduction partielle; elles sont munies de tubes d'aspiration ménagés dans la maçonnerie de fondation. Elles ont été livrées par la maison Brenier, Neyret & C<sup>ie</sup>, de Grenoble. Les dynamos directement accouplées aux turbines sortent des ateliers de MM. Schneider & C<sup>ie</sup> au Creusot. Nous ne nous étendrons pas sur cette partie de l'installation dont nous n'avons pas eu à nous occuper.

Un canal de fuite recueille l'eau à la sortie des turbines et la restitue à l'Isère; un seuil ménagé à l'aval du bâtiment empêche les turbines de se désamorcer. Ce canal n'a que 39 m. de longueur et n'offre aucune particularité de construction.

Les études relatives à l'aménagement de cette chute ont été faites en collaboration avec M. l'ingénieur Jacques Bois par le soussigné, qui en a dirigé personnellement l'exécution avec le concours intelligent et dévoué de M. Ch. Corneau, conducteur de travaux.

Les parties métalliques des vannes et passerelles de service et la charpente du bâtiment ont été fournies par la maison Ed. Lagarde & C<sup>ie</sup>; la conduite forcée et le collecteur par la maison Bonnet, Spazin & C<sup>ie</sup>, toutes deux à Lyon.

Nous ne terminerons pas cette notice sans citer les noms de M. Georges Coutagne, ingénieur des poudres et salpêtres, administrateur-délégué de *La Volta lyonnaise*, sous la haute direction duquel nous avons travaillé, et de M. Théodore Turrettini, administrateur de la même Société, aux précieux conseils duquel nous avons souvent eu recours.

Genève, octobre 1903.

## Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace.

Par M. B. MAYOR, ingénieur,

Professeur ordinaire.

Ancien élève de l'Ecole d'Ingénieurs (1884-1887).

### Introduction.

Les méthodes graphiques, dont l'usage systématique a si heureusement et si profondément modifié l'étude des conditions de résistance et de stabilité des systèmes matériels plans, n'ont pas, jusqu'ici, paru susceptibles de rendre des services aussi marqués dans l'étude des systèmes à trois dimensions. En tout cas, les tentatives faites en vue d'étendre à l'espace les méthodes générales de la statique graphique n'ont conduit à des résultats pratiquement utilisables qu'au prix d'artifices dont la diversité et le manque de généralité laissent nettement pressentir qu'on est encore fort éloigné du but qu'on se proposait d'atteindre.

On peut certainement attribuer cet insuccès aux procédés de représentation plane de l'espace utilisés jusqu'à

maintenant et dont aucun ne paraît convenir à la nature spéciale des éléments géométriques qui jouent un rôle prépondérant dans la théorie des systèmes de forces. Ces éléments dérivent tous de la ligne droite et partagent avec elle ce caractère dualistique qui distingue si nettement les conceptions de la géométrie réglée. On était donc en droit de présumer qu'un mode de représentation plane de l'espace respectant cette propriété dualistique serait, mieux que tout autre, approprié à l'extension des méthodes de la statique graphique. Au reste, j'ai montré, dans une série de notes insérées dans les comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences<sup>1</sup>, qu'il était non seulement possible de déterminer *a priori* le plus simple de tous les procédés satisfaisant à cette condition, mais encore que le procédé ainsi obtenu permettait de résoudre avec une extrême facilité les problèmes que l'on doit considérer comme les problèmes fondamentaux de la statique graphique des systèmes à trois dimensions.

C'est ce mode de représentation que je me propose de décrire et de développer ici d'une façon élémentaire. Mais, auparavant, quelques mots d'explication me paraissent nécessaires pour justifier le mode d'exposition qui va suivre.

Pour conserver à ce travail une allure élémentaire, j'ai dû laisser complètement de côté les considérations purement théoriques qui conduisent au procédé choisi et laissent entrevoir qu'il est bien approprié à son but. D'ailleurs, ces considérations exigent, pour être bien comprises, la connaissance de certaines théories qu'en général les programmes des écoles techniques laissent encore, de côté; de plus, elles ont été suffisamment développées dans les notes déjà citées et auxquelles nous ne pouvons que renvoyer le lecteur.

D'autre part, il eût été préférable, à tous égards, d'indiquer en premier lieu le mode de représentation de la ligne droite, dont le rôle est essentiel. Il est, en effet, facile et naturel d'en déduire ensuite la représentation de tous les éléments géométriques simples de l'espace, puis celle des éléments mécaniques.

Ce n'est cependant pas ainsi que nous avons procédé. Pour donner plus d'homogénéité à cet exposé, pour simplifier et introduire dès le début certaines notations, nous commençons par indiquer le mode de représentation de la force et nous en déduisons immédiatement la représentation de la droite, du point et du plan. L'ordre logique est ainsi rompu puisque la représentation du système de forces, considéré comme un tout en quelque sorte indépendant des forces qui le constituent, n'est donnée qu'en dernier lieu. Mais, au moins, cette manière de faire a l'avantage de permettre d'indiquer préalablement un procédé un peu plus général que celui qui convient aux applications de la statique graphique et qui méritait d'être signalé, ne fût-ce que pour mieux faire ressortir les caractères dualistiques de ce dernier, caractères qui, sans cela, n'eussent pas été aussi facilement aperçus.

<sup>1</sup> C.-R. 29 décembre 1902, 5 janvier 1903, 12 janvier 1903.

Il est encore nécessaire d'ajouter que, pour comprendre ce qui va suivre, le lecteur doit être familiarisé avec le système des six coordonnées homogènes d'une droite et connaître, en outre, les éléments de la théorie des complexes linéaires.

## CHAPITRE PREMIER

### Notions préliminaires.

**1. Complexe d'action d'un système de forces.** Nous désignerons sous le nom de *complexe d'action d'un système de forces* le complexe linéaire formé par les droites de moment nul relatives à ce système. Ce complexe joue, par rapport à la théorie des systèmes de forces de l'espace, le même rôle que la ligne d'action d'une force dans la théorie des systèmes plans. J'ai montré, en particulier, et nous aurons l'occasion de revenir sur ce point, qu'il permettait d'étendre immédiatement à l'espace la notion si fondamentale en statique graphique de polygone funiculaire<sup>1</sup>.

Si l'on désigne par

$$X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0$$

les coordonnées d'un système de forces quelconque ( $F_0$ ) rapporté à des axes coordonnés rectangulaires et par

$$X, Y, Z, L, M, N$$

les six coordonnées homogènes d'une droite, coordonnées qui doivent, comme on sait, vérifier la relation quadratique

$$LX + MY + NZ = 0,$$

le complexe d'action du système ( $F_0$ ) a, d'après la définition qui précède, pour équation

$$L_0X + M_0Y + N_0Z + X_0L + Y_0M + Z_0N = 0.$$

Les coordonnées d'un système de forces sont donc précisément les coefficients de l'équation de son complexe d'action. Elles peuvent donc aussi être considérées, puisque cette équation ne change pas lorsqu'on multiplie son premier membre par un facteur arbitraire, comme les coordonnées *homogènes* du complexe d'action. De là découlent immédiatement les propositions suivantes :

*Le complexe d'action d'un système ne change pas lorsqu'on multiplie par un même nombre l'intensité de chacune des forces de ce système ;*

*Des systèmes équivalents ont le même complexe d'action ;*

*Un système de forces est complètement défini par son complexe d'action et par l'intensité et le sens de sa résultante générale.*

Des propositions qui précèdent, les deux premières sont évidentes ; quant à la dernière, on en peut démontrer l'exactitude de la manière suivante :

Le complexe d'action d'un système étant supposé donné, on peut déterminer les coefficients de son équation, c'est-à-dire six nombres proportionnels aux coordon-

<sup>1</sup> C. R. 26 mai 1896.

nées du système de forces correspondant. Si donc on désigne par

$$X'_0, Y'_0, Z'_0, L'_0, M'_0, N'_0$$

ces coefficients, les coordonnées du système de forces seront exprimées à l'aide des formules suivantes, où  $\lambda$  désigne un facteur de proportionnalité encore inconnu,

$$\begin{aligned} X_0 &= \lambda X'_0, & L_0 &= \lambda L'_0, \\ Y_0 &= \lambda Y'_0, & M_0 &= \lambda M'_0, \\ Z_0 &= \lambda Z'_0, & N_0 &= \lambda N'_0. \end{aligned}$$

En désignant, d'autre part, par  $R$  l'intensité donnée de la résultante générale, on aura

$$\lambda^2 (X_0'^2 + Y_0'^2 + Z_0'^2) = R^2,$$

d'où

$$\lambda = \frac{R}{\pm \sqrt{X_0'^2 + Y_0'^2 + Z_0'^2}}$$

et il ne reste plus qu'à lever l'indétermination relative au signe du radical. Or le sens de la résultante est donné et sa direction est connue, puisque c'est celle de l'axe du complexe d'action. On peut donc déterminer, par exemple, le signe de  $X_0$  et en déduire celui du facteur  $\lambda$ , qui se trouve ainsi déterminé en grandeur et en signe.

Ajoutons encore que, dans le cas où un système est réductible à une seule résultante, son complexe d'action devient spécial et admet pour directrice la ligne d'action de cette résultante.

**2. Décomposition d'un système de forces en systèmes composants.** Soient  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_i, \dots, \Gamma_p$ , des complexes linéaires, chacun d'eux étant défini par les six coordonnées d'un système de forces admettant ce complexe pour complexe d'action et ayant, de plus, une résultante générale dont l'intensité soit égale à l'unité.  $\Gamma_i$ , par exemple, sera donné par les quantités

$$X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i,$$

liées par la relation

$$X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = 1.$$

On sait alors que les quantités

$$X, Y, Z, L, M, N,$$

données par les relations

$$X = \sum_1^p \lambda_i X_i, \quad L = \sum_1^p \lambda_i L_i,$$

$$Y = \sum_1^p \lambda_i Y_i, \quad M = \sum_1^p \lambda_i M_i,$$

$$Z = \sum_1^p \lambda_i Z_i, \quad N = \sum_1^p \lambda_i N_i,$$

où les facteurs  $\lambda_i$  peuvent recevoir des valeurs arbitraires, définissent un complexe  $\Gamma$  qui est dit appartenir au système à  $p$  termes déterminé par  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_i, \dots, \Gamma_p$ . Il est toutefois nécessaire d'ajouter, comme restriction à cette définition, que les complexes  $\Gamma_i$  ne doivent pas faire partie d'un système dont le nombre de termes soit inférieur à  $p$ . En outre, le nombre  $p$  ne doit pas être supérieur à 6 puisque le système à 6 termes comprend déjà tous les complexes de l'espace.

Ceci rappelé, cherchons dans quel cas il est possible de décomposer un système de forces ( $F$ ) en  $p$  systèmes admettant les complexes  $\Gamma_i$  pour complexes d'action.

Dans ce but, il suffit de remarquer que si l'on désigne par  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_p$ , les intensités des résultantes générales des systèmes composants, intensités qui, en vertu d'une propriété démontrée, achèvent de déterminer ces systèmes, les coordonnées de leur système résultant auront respectivement pour valeurs

$$\sum_1^p \lambda_i X_i, \quad \sum_1^p \lambda_i L_i,$$

$$\sum_1^p \lambda_i Y_i, \quad \sum_1^p \lambda_i M_i,$$

$$\sum_1^p \lambda_i Z_i, \quad \sum_1^p \lambda_i N_i.$$

Si donc on désigne par

$$X, Y, Z, L, M, N$$

les coordonnées de ( $F$ ), la décomposition sera possible lorsqu'on pourra déterminer les nombres  $\lambda_i$  de manière à vérifier les relations

$$X = \sum_1^p \lambda_i X_i, \quad L = \sum_1^p \lambda_i L_i, \text{ etc.},$$

c'est-à-dire lorsque le complexe d'action de ( $F$ ) fera partie du système à  $p$  termes défini par les complexes donnés.

On peut donc énoncer le théorème suivant que nous aurons fréquemment l'occasion d'appliquer :

*Pour qu'un système de forces ( $F$ ) puisse être décomposé d'une manière et d'une seule en  $p$  systèmes admettant des complexes d'action donnés, il faut et il suffit que le complexe d'action de ( $F$ ) appartienne au système à  $p$  termes défini par les complexes donnés.*

C'est ainsi qu'un système de forces peut toujours être décomposé, d'une manière et d'une seule, suivant six complexes quelconques, mais ne faisant pas cependant partie d'un système à cinq termes.

**3. Forces conjuguées.** Considérons un système de forces quelconque, mais fixe, ( $F_0$ ), qui, en raison du rôle qu'il jouera constamment dans la suite, sera désigné sous le nom de *système directeur*, son complexe d'action étant lui-même appelé le *complexe directeur*. Nous supposons essentiellement que ce système n'est ni en équilibre, ni réductible à une résultante unique. Par suite, ses six coordonnées

$$X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0$$

ne peuvent être nulles simultanément et l'expression

$$H_0 = L_0 X_0 + M_0 Y_0 + N_0 Z_0,$$

c'est-à-dire, la moitié de son *automoment*, est différente de zéro.

Cela posé, nous dirons que deux forces ( $F$ ) et ( $F'$ ) sont *conjuguées* par rapport au système directeur lorsque le système qu'elles constituent, quand on les envisage simultanément, admet pour complexe d'action le complexe directeur.

Il résulte immédiatement de cette définition que les

ligues d'action de deux forces conjuguées sont elles-mêmes conjuguées par rapport au complexe directeur.

Cette remarque faite, proposons-nous de déterminer les coordonnées

$$X', Y', Z', L', M', N'$$

de  $(F')$  en fonction des coordonnées

$$X, Y, Z, L, M, N$$

de  $(F)$ .

A cet effet, observons en premier lieu que ces deux systèmes de coordonnées doivent vérifier les relations quadratiques

$$(1) \quad LX + MY + NZ = 0,$$

et

$$(2) \quad L'X' + M'Y' + N'Z' = 0.$$

D'autre part, les coordonnées du système constitué par  $(F)$  et  $(F')$  ayant respectivement pour valeurs

$$X + X', Y + Y', Z + Z', L + L', M + M', N + N',$$

on aura nécessairement, en désignant par  $\lambda$  un facteur encore inconnu

$$\frac{X+X'}{X_0} = \frac{Y+Y'}{Y_0} = \frac{Z+Z'}{Z_0} = \frac{L+L'}{L_0} = \frac{M+M'}{M_0} = \frac{N+N'}{N_0} = \lambda.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} X' &= \lambda X_0 - X, & L' &= \lambda L_0 - L, \\ Y' &= \lambda Y_0 - Y, & M' &= \lambda M_0 - M, \\ Z' &= \lambda Z_0 - Z, & N' &= \lambda N_0 - N, \end{aligned}$$

et il suffit, pour achever de résoudre le problème proposé, de déterminer le facteur  $\lambda$ .

Remplaçant dans ce but les quantités  $X'$ , etc., par leurs valeurs dans la relation (2), on obtient, en tenant compte de (1), l'équation

$$\lambda^2 [L_0 X_0 + M_0 Y_0 + N_0 Z_0] - \lambda [L_0 X + M_0 Y + N_0 Z + X_0 L + Y_0 M + Z_0 N] = 0$$

qui, résolue par rapport à  $\lambda$ , donne, la racine nulle étant sans importance,

$$\lambda = \frac{L_0 X + M_0 Y + N_0 Z + X_0 L + Y_0 M + Z_0 N}{L_0 X_0 + M_0 Y_0 + N_0 Z_0}$$

Des expressions semblables à celle qui forme le numérateur du second membre de cette dernière relation, et qui est égale au moment relatif de la force  $(F)$  et du système  $(F_0)$ , se présenteront fréquemment dans la suite. Pour simplifier l'écriture nous la désignerons par l'une ou l'autre des notations symboliques

$$(F, F_0)$$

ou

$$(F_0, F).$$

Comme, d'autre part, le dénominateur du second membre de la même relation est précisément la quantité déjà désignée par  $H_0$ , la valeur de  $\lambda$  peut se mettre sous la forme

$$\lambda = \frac{(F_0, F)}{H_0}.$$

\* Dans ces conditions, on aura, pour résoudre le problème proposé, les formules fondamentales

$$\begin{aligned} X' &= \frac{(F_0, F)}{H_0} X_0 - X, & L' &= \frac{(F_0, F)}{H_0} L_0 - L, \\ (3) \quad Y' &= \frac{(F_0, F)}{H_0} Y_0 - Y, & M' &= \frac{(F_0, F)}{H_0} M_0 - M, \\ Z' &= \frac{(F_0, F)}{H_0} Z_0 - Z, & N' &= \frac{(F_0, F)}{H_0} N_0 - N. \end{aligned}$$

Un calcul en tout point semblable au précédent conduirait à un groupe de formules analogue au précédent et permettant de calculer les coordonnées de  $(F)$  en fonction de celles de  $(F')$ . Nous n'écrivons ci-dessous que la première des formules de ce nouveau groupe, les autres pouvant s'en déduire par analogie

$$(4) \quad X = \frac{(F_0, F')}{H_0} X_0 - X', \text{ etc....}$$

4. Tirons immédiatement quelques conséquences essentielles des groupes (3) et (4).

Tout d'abord, les relations qui constituent ces groupes sont linéaires par rapport aux coordonnées des deux forces  $(F)$  et  $(F')$  puisque les moments  $(F_0, F)$  et  $(F_0, F')$  sont eux-mêmes linéaires par rapport à ces coordonnées. Une force quelconque admet donc toujours une conjuguée et une seule. De plus, la symétrie de ces formules montre immédiatement que la relation qui lie deux forces conjuguées est réciproque.

De la première des formules (3) on déduit ensuite

$$H_0 (X + X') = (F_0, F) X_0,$$

tandis que la première des formules (4) donne

$$H_0 (X + X') = (F_0, F') X_0.$$

On a donc nécessairement

$$(F_0, F) = (F_0, F')$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant :

*Les moments, par rapport au système directeur, de deux forces conjuguées sont égaux entre eux.*

Si, en particulier, une force est en involution avec le système directeur, il en est de même de sa conjuguée, puisque le moment de cette force par rapport à ce système est nul. De plus, les formules (3) ou (4) montrent encore que, dans ce cas, deux forces conjuguées sont égales et directement opposées.

Considérons, enfin, deux forces quelconques  $(F_1)$ ,  $(F_2)$  définies par leurs coordonnées

$$X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1,$$

et

$$X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2,$$

et calculons leur moment relatif

$$(F_1, F_2) = X_1 L_2 + Y_1 M_2 + Z_1 N_2 + L_1 X_2 + M_1 Y_2 + N_1 Z_2.$$

A l'aide des formules (4), on trouve, en groupant convenablement les termes et en utilisant la notation symbo-

lique des moments

$$(F_1, F_2) = 2 \frac{(F_0, F_1)(F_0, F_2)}{H_0^2} H_0 + (F_1, F_2) - \frac{(F_0, F_1)}{H_0} (F_0, F_1) - \frac{(F_0, F_2)}{H_0} (F_0, F_1),$$

ou, après réductions,

$$(F_1, F_2) = (F_1, F_2).$$

Le moment relatif de deux forces quelconques est donc égal au moment relatif de leurs conjuguées.

On déduit, en particulier, de là que, lorsque les lignes d'action de deux forces se rencontrent, il en est de même pour les lignes d'action de leurs conjuguées. Du reste, cette dernière propriété résulte aussi du fait que les lignes d'action de deux forces conjuguées sont elles-mêmes conjuguées par rapport au complexe directeur.

**5. Systèmes de forces et complexes conjugués.** Considérons maintenant un système ( $F$ ) constitué par  $n$  forces quelconques ( $F_1, \dots, (F_i), \dots, (F_n)$ ). Nous appellerons conjugué de ( $F$ ) le système ( $F'$ ) constitué par les conjuguées ( $F'_i$ ) des forces ( $F_i$ ).

A l'aide des formules (3) il est bien simple de déterminer les coordonnées  $X'$ , etc... du système conjugué en fonction des coordonnées  $X$ , etc..., du système ( $F$ ).

Désignant, en effet, par  $X_i$ , etc..., et par  $X'_i$ , etc..., les coordonnées de ( $F_i$ ) et de ( $F'_i$ ), on a immédiatement

$$X'_i = \frac{(F_0, F_i)}{H_0} X_0 - X_i,$$

et, par suite,

$$X' = \sum_1^n X'_i = \frac{X_0}{H_0} \sum_1^n (F_0, F_i) - \sum_1^n X_i.$$

Or,

$$\sum_1^n X_i = X;$$

de plus, on voit sans peine que

$$\sum_1^n (F_0, F_i) = (F_0, F).$$

On peut donc écrire la formule suivante

$$X' = \frac{(F_0, F)}{H_0} X_0 - X$$

qui est identique à la première des formules (3).

Ces formules, ainsi du reste que celles du groupe (4), sont donc encore applicables aux systèmes de forces conjugués et il est inutile de les écrire à nouveau.

**6.** Une première conséquence très simple, mais essentielle, résulte de la forme même de ces formules. Elles renferment uniquement, en effet, les coordonnées des systèmes de forces considérés et non celles des forces qui nous ont permis de les définir. Par conséquent :

*Des systèmes de forces équivalents admettent des conjugués équivalents.*

D'autre part, lorsque toutes les coordonnées d'un système s'annulent simultanément, il est visible qu'il en est de même de celles de son conjugué. Donc :

*Lorsqu'un système est en équilibre, il en est de même de son conjugué.*

En raisonnant ensuite comme au paragraphe 4, on est conduit à énoncer les théorèmes suivants :

*A tout système de forces correspond toujours un système conjugué et un seul, et la correspondance qui lie deux pareils systèmes est réciproque.*

*Les moments, par rapport au système directeur, de deux systèmes conjugués sont égaux entre eux. Si, en particulier, un système est en involution avec le système directeur, il en est de même de son conjugué; en outre, dans ce cas, ces deux systèmes se font équilibre et leurs complexes d'action coïncident.*

*Le moment relatif de deux systèmes de forces quelconques est égal au moment relatif de leurs conjuguées. En particulier, l'automoment d'un système est égal à celui de son conjugué.*

De cette dernière propriété découlent les deux conséquences suivantes :

*Lorsque deux systèmes sont en involution, leurs conjugués le sont aussi;*

*Lorsqu'un système est réductible à une résultante unique, il en est de même de son conjugué.*

**7. Complexes linéaires conjugués.** Deux complexes linéaires seront dits conjugués par rapport au système ou au complexe directeur, lorsqu'ils pourront être considérés comme les complexes d'action de deux systèmes de forces qui soient eux-mêmes conjugués par rapport au système directeur.

La plupart des propriétés relatives aux systèmes conjugués s'étendent sans aucune difficulté aux complexes conjugués et il est inutile d'insister sur ce point. Signalons cependant le fait que *lorsque deux complexes linéaires sont en involution, leurs conjugués le sont aussi*, parce qu'on en peut déduire le théorème suivant :

*Les conjuguées, par rapport au complexe directeur, des droites qui forment un complexe linéaire quelconque ( $\Gamma$ ) appartiennent à son conjugué ( $\Gamma'$ ).*

Tout d'abord, en effet, à un complexe spécial correspond un complexe conjugué spécial et les directrices de ces deux complexes sont conjuguées.

Soit alors ( $g$ ) une droite du complexe ( $\Gamma$ ). On peut la considérer comme la directrice d'un complexe spécial ( $\Gamma g$ ) en involution avec ( $\Gamma$ ). Le complexe ( $\Gamma g'$ ) conjugué de ( $\Gamma g$ ) sera lui-même spécial et en involution avec ( $\Gamma'$ ). Sa directrice ( $g'$ ), qui, d'après ce qui précède, est la conjuguée de ( $g$ ) appartient donc à ( $\Gamma'$ ) et le théorème énoncé se trouve établi.

(A suivre).