

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 31 (1905)
Heft: 4

Artikel: Méthode générale de calcul de la poutre continue sur appuis élastiques
Autor: Paris, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-24842>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.06.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES. — Paraissant deux fois par mois.

Rédacteur en chef: M. P. HOFFET, professeur à l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne.

Secrétaire de la Rédaction: M. F. GILLIARD, ingénieur.

SOMMAIRE: *Méthode générale de calcul de la poutre continue sur appuis élastiques*, par M. A. Paris, ingénieur civil, privat-docent à l'Université de Lausanne. — *La traversée des Alpes bernoises. Réponses de la Commission internationale d'experts au questionnaire du Comité d'initiative pour la construction du chemin de fer du Lötschberg* (suite). — **Divers**: Tunnel du Simplon. Extrait du XXV^e rapport trimestriel sur l'état des travaux au 31 décembre 1904. — Tunnel du Ricken: Bulletin mensuel des travaux. Janvier 1905. — Lampe à incandescence à filament de tantale. — Bâtiment de la Bourse, à Bâle: Rapport du jury du concours. Projet « Börseplätzli », de MM. H. Weideli et R. Bischoff, architectes, à Stuttgart. — Monument Philibert Berthelier. — *Sociétés*: Société fribourgeoise des Ingénieurs et Architectes: Assemblée générale du 15 janvier 1905 (suite). — Association amicale des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne: Séance du 18 février 1905. — *Concours*: Hôtel des postes et télégraphes à La Chaux-de-Fonds. — Percement du tunnel du Simplon. — *Nécrologie*: H.-Ed. Juvet.

Hommage à M. le Prof.-Dr W. Ritter.

Méthode générale de calcul de la poutre continue sur appuis élastiques.

Par M. A. PARIS, ingénieur civil.
Privat-Docent à l'Université de Lausanne.

Les méthodes graphiques de calcul de la poutre continue, telles qu'elles ont été développées par le professeur Dr W. Ritter dans son ouvrage « Der kontinuierliche Balken », font appel soit à la ligne élastique de la poutre, soit aux ellipses d'élasticité de ses sections successives. Ces deux méthodes, fort différentes l'une de l'autre, ne peuvent se combiner pour permettre le calcul de cas intermédiaires, tenant des deux types principaux auxquels elles ont été appliquées.

La première s'adapte quand les déformations élastiques des piles se bornent à un changement d'orientation de la section d'appui (elastische Drehung). La seconde, qui considère des déplacements élastiques verticaux du sommet des piles, ne peut tenir compte d'un encastrement, et suppose la poutre reposant librement sur ses appuis.

La première méthode, d'un usage courant et commode, permet de résoudre, avec la sécurité voulue, le plus grand nombre des problèmes de poutres continues que la construction peut soulever, mais il n'en restait pas moins intéressant de rechercher une méthode générale, tenant compte de toutes les conditions du problème, et de se mettre en état d'appliquer, d'une manière intégrale et facile, l'élégante méthode de l'ellipse d'élasticité au cas de la poutre fléchie.

Dans le but de traiter le problème d'une façon tout à fait générale, nous avons préféré, plutôt que de nous borner à des conditions spéciales, tenir compte de l'élasticité entière des divers éléments de la construction et faire intervenir, de ce fait, des réactions obliques.

Pour résoudre la question simplement, nous considérons tour à tour chaque élément de la construction pour lui-même et ne faisons intervenir les autres éléments dans ce calcul partiel que pour les conditions d'appui qu'ils déterminent dans la pièce envisagée.

Le calcul se ramène ainsi, pour chaque élément, à celui d'une travée simple reposant sur des appuis dont l'élasti-

cité est déterminée par une ellipse correspondante.

Nous calculons en premier lieu cette travée comme reposant librement sur ses appuis. Nous déterminons ensuite les déformations relatives dans les sections d'appui et nous les annulons sans changer l'état d'équilibre général du système. Cela nous donne les moments d'encastrement engendrés par la continuité des parties.

Puis, en envisageant les réactions diverses des appuis, nous trouvons encore les actions réciproques de la travée considérée et des parties adjacentes.

Nous sommes ainsi en état de calculer tous les efforts généraux qui agissent dans la construction, qu'ils soient dus à des forces verticales ou horizontales situées dans le plan de symétrie longitudinal de la travée, à l'action de la température ou du freinage des trains, ou encore à des déplacements des appuis.

Et, pour cela, nous n'avons naturellement pas besoin de prendre comme travée l'espace total entre deux appuis. La travée peut, au besoin, être limitée par deux sections quelconques de cet intervalle, comme elle le serait dans une poutre articulée Gerber. Elle ne peut, toutefois, être plus longue, car son action verticale sur les appuis deviendrait statiquement indéterminée, dès qu'une pile se trouverait entre ses extrémités. Il est dès lors plus naturel de limiter la travée exactement sur les piles, s'il y en a.

Dans les déformations, nous considérons deux composantes essentielles:

1° *La rotation simple*, c'est-à-dire une rotation du point considéré sur lui-même, sans déplacement linéaire;

2° *Le déplacement simple*, c'est-à-dire un déplacement sans rotation, ou rotation autour d'un centre infiniment éloigné.

Nous conserverons dans la suite ces deux termes avec ces déterminations précises.

De plus, nous considérons comme négatives les forces extérieures verticales descendantes, qu'elles soient le fait de charges directes ou transmises; ainsi que les paires de forces *W* axiales lorsqu'elles compriment la travée considérée.

Nous dirons enfin que la travée *AB* est supportée, si le centre de courbure de son axe est en dessous. Nous la dirons suspendue si le centre se trouve en dessus de l'axe.

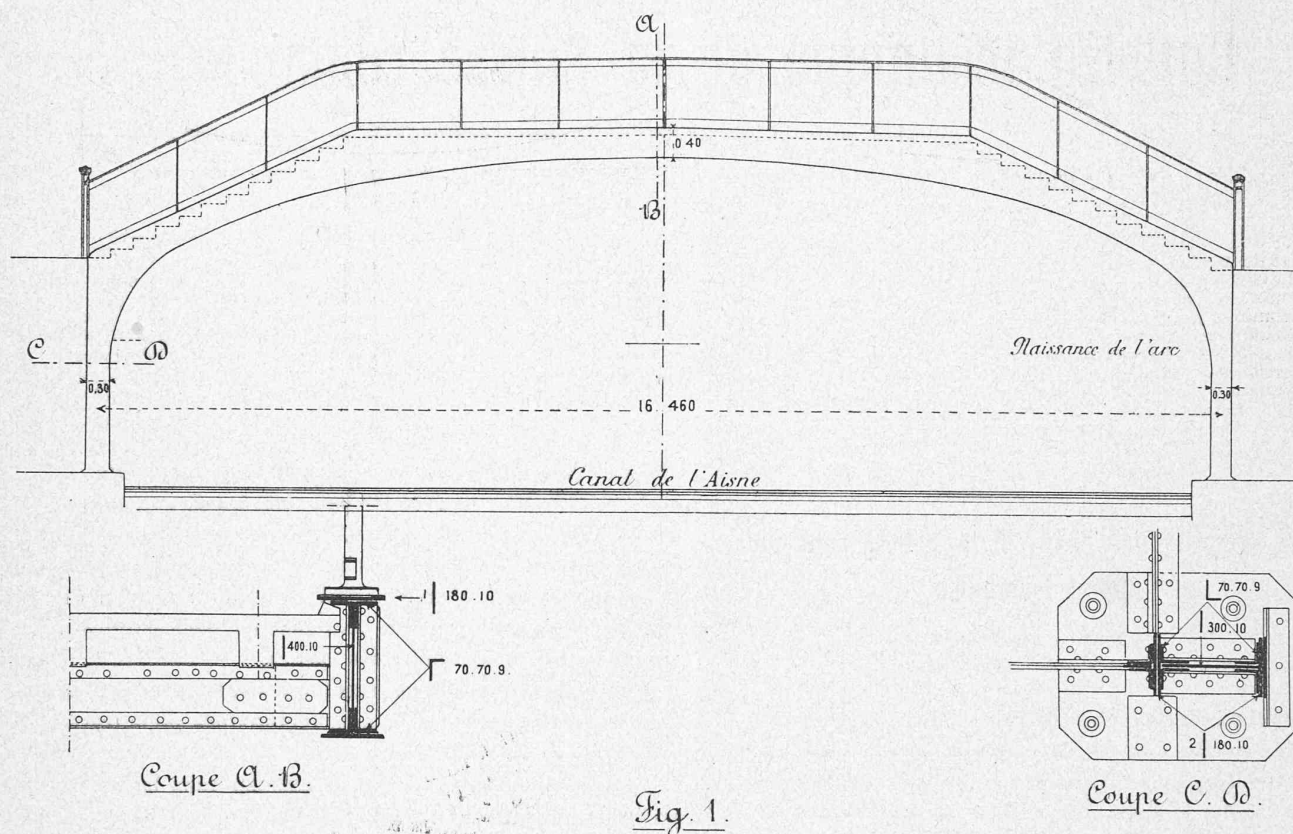
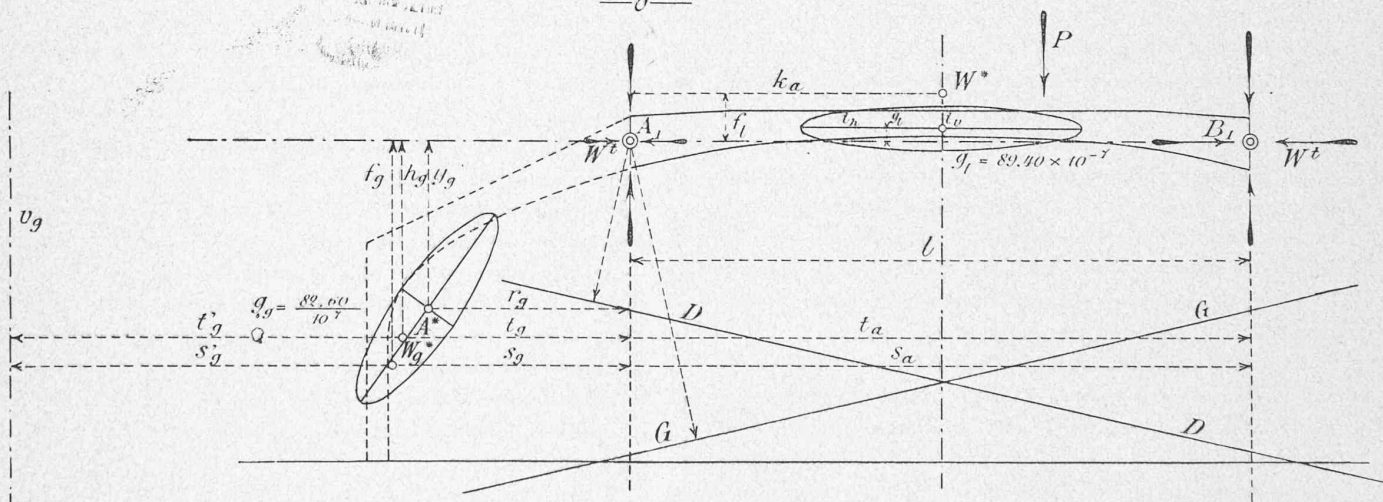


Fig. 1.



EPURE DE POUTRE CONTINUE SUR APPUIS ÉLASTIQUES

Passerelle métallique sur le canal de l'Aisne à la Marne, à Reims. — Echelle 1 : 100.

I. RÉACTIONS VERTICALES

L'épure qui accompagne cet exposé représente une travée horizontale AB encastrée sur des appuis obliques. Nous supposons connue l'ellipse d'élasticité g_l de la travée AB considérée pour elle-même, ainsi que celles de ses points d'appuis g et d . Ces deux dernières, g_g et g_d , sont les ellipses de gauche et de droite¹ de l'ensemble de la construction aboutissant à ces appuis. Dans notre cas, cet ensemble se borne à deux montants inclinés, encastrés dans le sol.

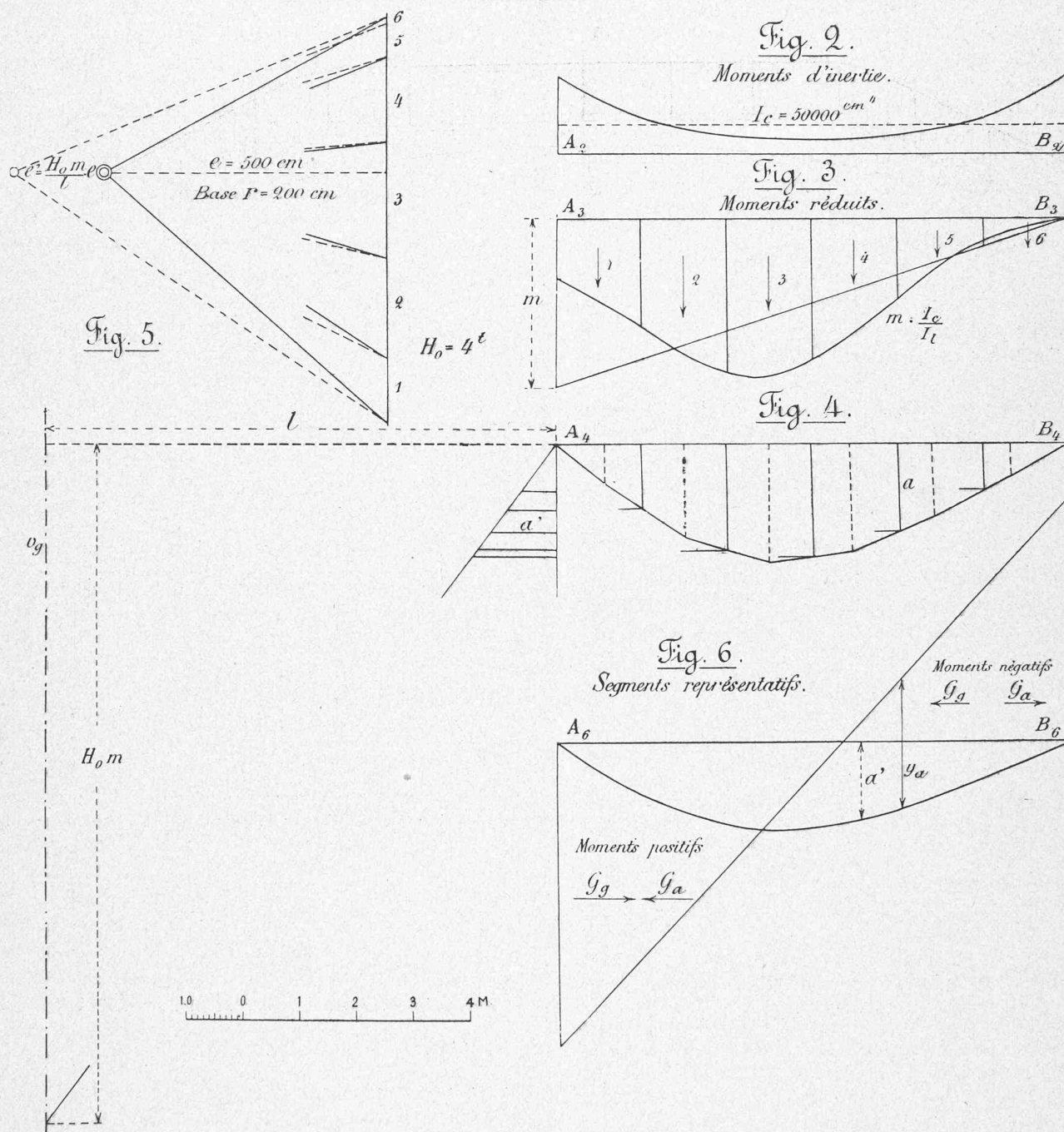
¹ Voir Henry Lossier. *L'arc continu sur appuis rigides*.

Nous supposons d'abord les encastremets A et B remplacés par des articulations. La construction se transforme alors en arc à 2 articulations, A et B , dont nous étudierons l'état d'équilibre.

Les réactions verticales A^t et B^t de la travée sont connues. Elles se déduisent des conditions d'équilibre statique. Leur expression est

$$1) \quad A^t = P^t \frac{x_b}{l} \quad B^t = P^t \frac{x_a}{l}$$

où x_a et x_b sont les abscisses du point d'application de la charge P , comptées de A et de B .



EPURE DE POUTRE CONTINUE SUR APPUIS ÉLASTIQUES
Passerelle métallique sur le canal de l'Aisne à la Marne, à Reims. — Echelle 1 : 100.

La travée AB se déforme sous l'influence des 3 forces P , A' et B' . Mais l'angle de déformation aux appuis nous intéresse seul. La flèche de la poutre elle-même est sans intérêt pour les développements ultérieurs.

Pour déterminer la ligne d'influence des angles α et β de déformation de la poutre en A et B , nous soumettons la travée AB successivement à l'action de deux surfaces triangulaires de moments $A_3 B_3$ et $A'_3 B'_3$ ¹. Ces surfaces représentent l'effet, dans notre travée articulée, de moments fléchissants agissant soit en A , soit en B .

¹ La surface $A'_3 B'_3$ se rapporte à l'appui B . Vu la symétrie de notre exemple, elle n'est pas figurée sur l'épure.

chissants agissant soit en A , soit en B . Les lignes élastiques dues à ces moments sont les lignes d'influence des angles de déformation dus à la force P .

Pour trouver ces lignes élastiques $A_4 B_4$, nous devons d'abord réduire les ordonnées des surfaces de moments $A_3 B_3$ et $A'_3 B'_3$ dans le rapport

$$\frac{I_c}{I_l},$$

où I_c est un moment d'inertie arbitraire mais constant, et I_l le moment d'inertie variable de la travée. Les courbes réduites, $m \frac{I_c}{I_l}$, sont indiquées figure 3.

Pour porter la surface réduite de moments en ordonnées dans le polygone des forces de distance polaire e (fig. 5), nous avons adopté une base de réduction r . Nos lignes élastiques $A_4 B_4$ ressortent avec un facteur d'agrandissement w que nous devons déterminer.

Si E est le coefficient d'élasticité de la matière (toutes les pièces étant réduites au même coefficient E constant) et H_0 la distance polaire des surfaces de moments, nous avons (v. Ritter III, chap. I) :

$$2) \quad w = \frac{E \cdot I_c}{H_0 \cdot r \cdot e}$$

où r et e sont des longueurs à prendre à l'échelle et en centimètres, unité prise dans I et E ; w est alors un nombre pur.

Si α est l'ordonnée, mesurée sous P , de la ligne élastique due au moment M_a (surface $A_3 B_3$) et que α soit l'angle de déformation en A sous l'influence de P^t , nous aurons, d'après le théorème de Maxwell, et en supposant $P^t = 1^t$, valeur prise pour l'épure

$$P^t \cdot \alpha = M_a \cdot \alpha.$$

Pour distinguer entre les valeurs réelles des déformations et celles portées au dessin et affectées du coefficient w , nous mettrons désormais ces dernières entre parenthèses :

$$(a) = w \cdot \alpha$$

et notre équation devient

$$P^t (a) = M_a (a).$$

Si nous posons

$$(a) = (a') : l \quad \text{et} \quad M_a = H_0 \cdot m,$$

nous aurons :

$$P^t (a) = H_0 \cdot m \cdot \frac{(a')}{l}$$

d'où :

$$(a') = \frac{P^t (a) l}{H_0 \cdot m} \quad (b') = \frac{P^t (b) l}{H_0 \cdot m}$$

où P^t est supposé égal à 1^t .

II. RÉACTIONS HORIZONTALES

A côté des deux réactions verticales trouvées, nous avons encore à déterminer, dans notre arc à deux articulations, la réaction W , dite horizontale, qui passe par les deux tourillons.

Dans deux cas, toutefois, cette réaction W fait défaut :

1° Lorsque, les ellipses d'élasticité des appuis et de la travée n'étant pas obliques entre elles, les 3 axes horizontaux sont de plus sur une même droite. Dans ce cas, les déplacements des appuis A et B sous l'influence d'une force P^t , verticale, sont aussi verticaux.

2° Lorsque l'un des appuis ne peut supporter de réaction horizontale, grâce à la présence de chariots à rouleaux. Dans ce cas, les ellipses d'appuis dégénèrent, puisqu'elles donnent des déplacements infinis pour certaines forces finies.

Nous laissons de côté ces deux cas particuliers, très fréquents du reste, surtout le second, et supposons le cas général d'ellipses obliques aux appuis. La paire de réactions opposées W^t , située dans la ligne AB , se fait équilibre

à elle-même. Elle n'est horizontale que pour autant que la droite AB l'est aussi. Pour la déterminer, nous devons considérer les 3 actions suivantes :

1° Action des forces verticales A^t et B^t sur les appuis ;

2° Action des forces W^t sur les appuis ;

3° Action des forces W^t sur la poutre.

Pour être complet, nous aurions encore dû faire intervenir, en cas de poutre courbe, l'action du groupe de forces P^t , A^t et B^t sur la longueur de la corde AB , mais, outre que cette action est négligeable, puisque nous nous occupons de poutres continues et non pas d'arcs proprement dits, de plus elle remplacerait dans l'expression de W^t la fonction linéaire par une ligne courbe. L'exactitude gagnerait trop peu à cette complication.

Toutefois, nous indiquerons brièvement la construction de cette déformation.

Si nous considérons la surface limitée par l'axe courbe de la poutre et sa corde AB , nous y trouvons la surface de moments déterminée par la paire de forces W . En réduisant

cette surface dans le rapport $\frac{I_c}{I_l}$, dont nous nous sommes servis pour les lignes élastiques $A_4 B_4$, nous obtenons une surface réduite, courbe de charge dont le polygone funiculaire représente la ligne élastique due à W , c'est-à-dire la ligne d'influence des allongements de AB sous l'action des charges verticales P^t .

Mais nous faisons abstraction de cette déformation et nous nous bornons aux trois premières.

Nommons (fig. 1)¹ A^* et B^* les antipôles des verticales A et B par rapport aux ellipses g_g et g_a ; W_g^* et W_a^* ceux de la direction AB des forces W par rapport à ces mêmes ellipses et W^* l'antipôle de W par rapport à l'ellipse g_l de la travée. Les bras de levier de ces points étant donnés dans l'épure, nous aurons :

1° Action des forces verticales A^t et B^t sur les appuis. Supposons la construction transformée en pont console par la présence d'un chariot en A en place d'une articulation, et soient ΔA et ΔB les déplacements, suivant AB , de A et B

$$\Delta A = A^t \cdot g_g \cdot r_g \cdot h_g \quad \Delta B = B^t \cdot g_a \cdot r_a \cdot h_a \quad (\text{fig. 1})$$

où A^t et B^t sont négatifs.

Le raccourcissement ΔAB de la distance AB des appuis sera

$$\Delta AB = \Delta A + \Delta B = A^t \cdot g_g \cdot r_g \cdot h_g + B^t \cdot g_a \cdot r_a \cdot h_a$$

valeur ordinairement négative.

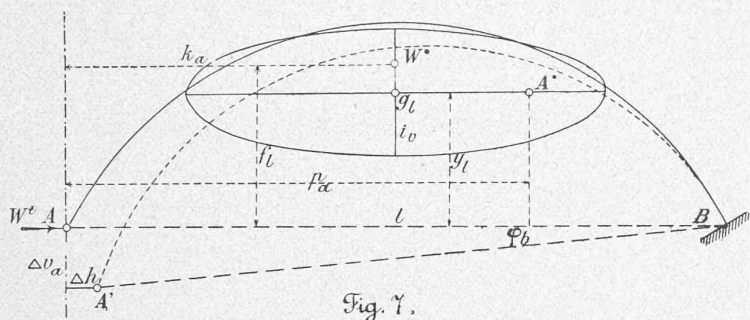
2° Action des forces W^t sur les appuis. La figure 1 nous donne pour ce déplacement

$$\Delta AB = W^t [g_g \cdot y_g \cdot f_g + g_a \cdot y_a \cdot f_a].$$

3° Action des forces W^t sur la poutre. Nous nommerons $W^t \Delta h$ cette action dont l'expression varie suivant la forme de la poutre. Nous avons les deux formules

$$3) \quad \begin{cases} \Delta h = g_l \cdot i_v^2 & \text{si l'axe est droit,} \\ \Delta h = g_l \cdot y_l \cdot f_l & \text{si l'axe est courbe.} \end{cases} \quad (\text{fig. 7})$$

¹ L'ellipse g_d n'étant pas figurée, vu la symétrie, les points B^* et W^* manquent dans l'épure.



La traversée des Alpes bernoises.

Réponses de la Commission internationale d'experts au questionnaire du Comité d'initiative pour la construction du Chemin de fer du Lötschberg. (Extrait).

(Suite)¹.

TROISIÈME QUESTION

Le projet N° 1 élaboré par MM. Hittmann et Greulich pour la ligne de Frutigen à Brigue passant sous le Lötschberg, remplit-il les conditions voulues, ou quels sont les inconvénients qu'il présente ?

Le projet N° 1 de MM. Hittmann et Greulich² traverse le Lötschberg par un tunnel de 13 520 m., dont le point culminant est à 1242,88 m. La déclivité maximum est de 27,5 ‰, le rayon minimum des courbes de 300 m., la longueur réelle de la ligne entre Frutigen et Brigue de 59 480 m. Sur la longueur totale exploitée de 59 144 m., 36 103 m. (plus du 61 ‰ du total et du 80 ‰ de la longueur des deux rampes d'accès au grand tunnel) sont en pentes de 25 à 27,5 ‰. Les courbes de 300 m. de rayon représentent presque 33 ‰ de la longueur totale et 43 ‰ de celle des rampes ; le rayon moyen de courbure est 312 m. Il y a sur la ligne 33 tunnels, non compris celui de faite, dont les longueurs sont inférieures à 2000 m., et ils représentent 22,5 ‰ des deux rampes d'accès.

Le devis, calculé avec grand soin par les auteurs, se monte à Fr. 69 500 000. Il donne toutefois lieu aux observations suivantes des experts :

Le coût de Fr. 792 par mètre, prévu pour les tunnels des lignes d'accès, n'est pas suffisant (Fr. 845 au Gothard, Fr. 945 à l'Arlberg) ; celui du grand tunnel de Fr. 1997 pour infrastructure, installations et ballastage, est trop bas, bien que l'exécution de la galerie parallèle n'y soit pas comprise.

D'après le rapport géologique de MM. von Fellenberg, Kissling et Schardt, la plus grande partie du tunnel se trouvera dans les granits et les gneiss, et, dans le massif central, on rencontrera le granit de Gastern, très difficile à percer à cause de la présence du porphyre. A partir de l'entrée Nord et avant de passer sous le Gasternboden, on traversera des calcaires où l'on peut prévoir une venue d'eau de 300 à 400 litres par seconde, qui ne tombera que dans la suite à un régime régulier de 250 litres environ.

Au Simplon, le coût du tunnel à simple voie, sans galerie parallèle, était évalué à Fr. 2272 par mètre et l'entreprise a reçu une majoration de prix de Fr. 4 000 000 pour compenser les excédents dans la dépense du percement. Il n'est donc pas exagéré de porter le coût prévu au devis à Fr. 2200 par mètre, soit au total à Fr. 2 750 000.

Par contre, en ce qui concerne le coût du matériel roulant, le devis de MM. Hittmann et Greulich peut être réduit de Fr. 1 000 000. Il est d'usage de compter pour ce poste

¹ Voir N° du 10 février 1905, page 36.

² Voir N° du 25 juin 1903, page 161.

Dans les deux expressions (3), comme dans celles sous 1° et 2°, les signes des termes sont faciles à déterminer. Le signe de W^t lui-même est donné par le fait qu'un raccourcissement $\Delta A B$ correspond à une force W^t de compression, tandis qu'un allongement provoque une force de tension. Il se peut faire, dans des cas très particuliers, que les réactions A^t et B^t , isolées, donnent à W^t des signes différents. Il n'y aura aucune difficulté à les reconnaître.

Si nous réunissons les résultats, nous trouvons

$$A^t g_g \cdot r_g \cdot h_g + B^t \cdot g_d \cdot r_d \cdot h_d = W^t (g_g \cdot y_g \cdot f_g + g_d \cdot y_d \cdot f_d + \Delta h)$$

où Δh a l'une des valeurs (3).

Si nous posons pour abréger

$$4) \quad \begin{cases} \lambda = g_g \cdot y_g \cdot f_g + g_d \cdot y_d \cdot f_d + \Delta h \\ \mu = g_g \cdot r_g \cdot h_g \quad \nu = g_d \cdot r_d \cdot h_d \end{cases}$$

nous trouvons

$$\lambda W^t = \mu \cdot A^t + \nu \cdot B^t$$

ou bien, en remplaçant A^t et B^t par leur valeur

$$W^t = \frac{\mu}{\lambda} A^t + \frac{\nu}{\lambda} B^t =$$

$$\left[\frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{x_b}{l} + \frac{\nu}{\lambda} \cdot \frac{x_a}{l} \right] P^t = P^t \cdot \zeta \quad (\text{Fig. 8})$$

ce qui donne pour W^t une fonction linéaire d' x .

Les rapports $\frac{\mu}{\lambda}$ et $\frac{\nu}{\lambda}$ sont des nombres purs. P^t étant négatif (force verticale descendante), A^t et B^t le seront aussi et ces deux rapports seront positifs si W^t doit être une compression.

La présence des réactions W^t détermine en A et B, soit aux appuis, soit à la poutre, des angles de déformation. Pour la poutre, c'est l'angle φ (fig. 7). Cet angle est égal à la rotation que doit effectuer l'extrémité B, supposée encastree, pour ramener, après la déformation, le point A' sur la droite AB.

Nous avons

$$6) \quad \varphi_b = \frac{\Delta v_a}{l} \quad \Delta v_a = W^t \cdot g_l \cdot y_l \cdot k_a.$$

Cette déformation est nulle dans le cas d'une poutre droite. Généralement la travée sera assez symétrique pour qu'on puisse, sans commettre d'erreur notable, prendre

$$k_a = k_b = \frac{1}{2} l, \text{ nous aurons dès lors}$$

$$\Delta v_a = \Delta v_b = \Delta v, \quad (A \text{ suivre}).$$