

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 37 (1911)
Heft: 23

Artikel: Définition générale de l'ellipse d'élasticité des systèmes articulés
Autor: Mayor, B.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28884>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.06.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES — PARAISSANT DEUX FOIS PAR MOIS

RÉDACTION : Lausanne, 2, rue du Valentin : D^r H. DEMIERRE, ingénieur.

SOMMAIRE : *Définition générale de l'ellipse d'élasticité des systèmes articulés*, par B. Mayor, professeur. — *Chemin de fer Neuchâtel-Chaumont. Tramway et Funiculaire*, par Philippe Tripet, ingénieur (suite et fin). — Chronique : L'enseignement mathématique. — Société suisse des ingénieurs et architectes. — Circulaire du Comité central aux sections de la Société suisse des ingénieurs et architectes. — Société vaudoise des ingénieurs et des architectes : Séance ordinaire du mercredi 29 novembre 1911. — Concessions de chemins de fer. — *Bibliographie*.

Définition générale de l'ellipse d'élasticité des systèmes articulés.

Par B. MAYOR, professeur.

La notion d'ellipse d'élasticité possède un sens précis dans le cas où l'on envisage un groupe de barres appartenant à un système triangulé et libre dans son plan. Elle perd toute signification en revanche, aussi bien dans le cas d'un système constitué d'une manière arbitraire, que dans celui d'un système triangulé assujéti à des liaisons qui ne peuvent être réduites à un encastrement unique.

Il est cependant possible, comme je me propose de le montrer ici, de définir un élément géométrique qui n'est soumis à aucune de ces restrictions et qui, de plus, se confond avec l'ellipse d'élasticité dans tous les cas où la définition usuelle donne un sens à cette notion.

On parvient de la manière la plus simple à cet élément par l'emploi de coordonnées trilineaires d'un type particulier. Et comme on peut attribuer à ces coordonnées une origine qui met immédiatement en évidence leurs propriétés mécaniques ; que, d'autre part, elles se prêtent avec une grande facilité à l'étude des problèmes de la mécanique appliquée où la considération des propriétés descriptives est prépondérante, nous commencerons par en faire une étude sommaire.

I.

1. Considérons, dans un plan, trois axes u, v, w , c'est-à-dire trois droites sur chacune desquelles un sens de parcours positif ait été arbitrairement choisi. Supposons de plus, que ces droites forment un triangle qui sera dit le triangle de référence.

Une force quelconque F étant donnée dans le plan de ce triangle, imaginons qu'on la décompose en trois composantes admettant respectivement les axes u, v, w , pour lignes d'action ; convenons ensuite de désigner par X, Y et Z les intensités des composantes obtenues, chacune d'elles étant affectée du signe plus ou du signe moins, suivant que son sens concorde ou ne concorde pas avec le sens de parcours positif choisi sur l'axe correspondant. Comme la décomposition d'une force suivant trois directions non concourantes est toujours possible d'une manière

et d'une seule, à toute force F correspond ainsi un système de valeurs et un seul des trois quantités X, Y et Z . Réciproquement d'ailleurs, à tout système de valeurs de ces mêmes quantités correspond manifestement une force et une seule. En conséquence, les quantités X, Y, Z seront dites les coordonnées de la force F relativement au triangle de référence choisi.

2. Le résultat qui précède peut être interprété d'une manière un peu différente.

Tout d'abord, si l'on déplace la force F sur sa ligne d'action sans changer son intensité ni son sens, ses coordonnées ne subissent aucune modification. D'autre part, si l'on multiplie par un nombre quelconque ρ l'intensité de F , ses coordonnées se trouvent également multipliées par le même facteur ρ . D'après cela, les quantités X, Y et Z peuvent donc être considérées comme les coordonnées *homogènes* d'une droite qui se confond avec la ligne d'action de la force F .

Considérées à ce dernier point de vue, les quantités X, Y et Z forment bien un système particulier de coordonnées trilineaires : elles sont en effet proportionnelles aux distances qui séparent les sommets du triangle de référence de la droite considérée, les facteurs de proportionnalité étant respectivement égaux aux inverses des hauteurs de ce triangle.

Ajoutons encore qu'il ne résulte aucune ambiguïté du double sens que l'on peut attribuer aux quantités X, Y et Z si, du moins, on a soin de spécifier dans chaque cas la nature de l'élément auquel elles se rapportent.

3. Les coordonnées qu'on vient de définir jouissent de propriétés évidentes, mais essentielles.

Considérons, en premier lieu, des forces $F_1, F_2, \dots, F_i, F_n$ en nombre quelconque, et désignons, d'une manière générale, par X_i, Y_i, Z_i les coordonnées de F_i . Le théorème des moments montre alors immédiatement que les coordonnées X, Y, Z de la résultante de ces forces sont données par les formules

$$X = \sum_i^n X_i,$$

$$Y = \sum_i^n Y_i,$$

$$Z = \sum_i^n Z_i.$$

Considérons ensuite deux droites quelconques, l_1 et l_2 , admettant respectivement pour coordonnées homogènes X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 . Il résulte alors immédiatement de la propriété qui précède que les formules

$$\begin{aligned} X &= \lambda X_1 + \mu X_2 \\ Y &= \lambda Y_1 + \mu Y_2 \\ Z &= \lambda Z_1 + \mu Z_2 \end{aligned}$$

définissent, quelles que soient les valeurs attribuées à λ et μ , une nouvelle droite qui passe par le point de rencontre de l_1 et de l_2 . Il est visible, de plus, qu'en donnant au rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ toutes les valeurs possibles, la droite correspondante engendre complètement le faisceau déterminé par l_1 et l_2 .

4. L'intensité d'une force quelconque s'exprime facilement en fonction de ses coordonnées.

Admettons, en effet, qu'on ait fixé les sens sur les axes u, v, w , de manière que les sens de rotation qui en résultent soient tous positifs pour un point situé à l'intérieur du triangle de référence. Si l'on désigne alors par A, B et C les angles de ce triangle, un calcul élémentaire donne facilement pour le carré de l'intensité d'une force F de coordonnées X, Y, Z , l'expression

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ \cos A - 2ZX \cos B - 2XY \cos C$$

qu'on peut également, en désignant par i l'unité imaginaire, mettre sous la forme suivante

$$F^2 = (X e^{iB} + Y e^{-iA} - Z)(X e^{-iB} + Y e^{iA} - Z).$$

Les points circulaires du plan du triangle de référence peuvent être regardés comme les enveloppes des lignes d'action des forces dont les intensités sont nulles, mais dont les coordonnées conservent des valeurs finies. Ils seront donc représentés en coordonnées-lignes par l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ \cos A - 2ZX \cos B - 2XY \cos C = 0$$

qui, d'ailleurs, se décompose dans les deux suivantes :

$$\begin{aligned} X e^{iB} + Y e^{-iA} - Z &= 0 \\ X e^{-iB} + Y e^{iA} - Z &= 0 \end{aligned}$$

5. Aux coordonnées de forces ou de droites, qui viennent d'être définies, correspondent dualistiquement des coordonnées ponctuelles dont l'origine mécanique est tout aussi simple.

Considérons, en effet, une masse de nature arbitraire et d'intensité m , concentrée en un point que nous désignerons également par m et qui peut être quelconque dans le plan du triangle de référence. Convenons ensuite de désigner par x, y et z les moments statiques de cette masse relativement aux axes u, v, w , ces moments statiques étant affectés du signe qui résulte de la convention suivante : dans le cas où le sens fixé sur l'axe envisagé donne lieu à un sens de rotation positif par rapport au point m , le signe du moment statique est le même que celui de la masse considérée ; lorsque, au contraire, ce même sens de rotation devient négatif, le signe du moment statique est l'inverse de celui de la masse.

A toute masse concentrée correspond ainsi un système

de valeurs et un seul des quantités x, y, z . Réciproquement, à tout système de valeurs de ces quantités on peut faire correspondre une masse concentrée m dont l'intensité et la position sont déterminées sans ambiguïté. D'une part, en effet, les distances du point m aux côtés du triangle de référence sont entre elles dans les mêmes rapports que les quantités x, y, z , et l'on sait que ces rapports suffisent pour déterminer la position de ce point. D'autre part, enfin, la position de ce point étant déterminée, l'une quelconque des quantités x, y ou z permet ensuite de déterminer l'intensité de la masse. En conséquence, les quantités x, y, z seront dites les coordonnées de la masse m . On peut d'ailleurs remarquer immédiatement que l'intensité d'une masse s'exprime linéairement en fonction de ses coordonnées.

Prenons, en effet, comme sens positifs sur les axes u, v, w ceux qui ont été déjà choisis au paragraphe précédent. Si l'on désigne alors par a, b, c les longueurs des côtés et par S la surface du triangle de référence, on obtient immédiatement, pour l'intensité d'une masse m de coordonnées x, y et z , l'expression

$$m = \frac{ax + by + cz}{2S}$$

6. Comme dans le cas d'une force, les coordonnées d'une masse sont susceptibles d'une deuxième interprétation.

Si l'on multiplie, en effet, par un facteur arbitraire une masse sans changer son point de concentration, ses coordonnées sont évidemment multipliées par le même facteur. On en conclut que les quantités x, y, z peuvent encore être regardées comme les coordonnées *homogènes* du point de concentration de cette masse, ce qui, d'ailleurs, est évident.

D'autre part, les propriétés générales de ces nouvelles coordonnées sont entièrement analogues à celles qui caractérisent les coordonnées d'une force.

Considérons, en effet, un système de masses $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ en nombre quelconque, et désignons, d'une manière générale, par x_i, y_i, z_i les coordonnées de la masse m_i . Il résulte alors immédiatement de la théorie des moments statiques que les coordonnées x, y, z de la masse résultante du système sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \sum_i^n x_i, \\ y &= \sum_i^n y_i, \\ z &= \sum_i^n z_i. \end{aligned}$$

Si l'on désigne ensuite par x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées homogènes de deux points quelconques m_1 et m_2 , on vérifie sans aucune peine que les formules

$$\begin{aligned} x &= \lambda x_1 + \mu x_2, \\ y &= \lambda y_1 + \mu y_2, \\ z &= \lambda z_1 + \mu z_2, \end{aligned}$$

définissent, quelles que soient les valeurs de λ et de μ , un point de la droite qui réunit m_1 et m_2 . Il est visible, de plus, qu'en donnant au rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ des valeurs convenables, on peut obtenir tous les points de la droite considérée.

7. Une formule que nous allons établir met bien en évidence les relations existantes entre les coordonnées d'une force et celles d'une masse.

Considérons simultanément une masse m et une force F dont la ligne d'action sera toujours assimilée à un axe ayant le sens même de la force. Convenons ensuite de désigner sous le nom de *moment relatif* de ces deux éléments, le produit de l'intensité de la force pour le moment statique de la masse relativement à la ligne d'action de F , ce moment statique étant pris avec le signe qui résulte de la convention faite précédemment. Enfin, proposons-nous de déterminer la valeur de ce moment relatif en fonction des coordonnées X, Y, Z de la force et des coordonnées x, y, z de la masse.

Observons, à cet effet, qu'en vertu d'un théorème bien connu, la somme des moments relatifs d'un nombre quelconque de forces par rapport à une même masse est égale au moment relatif de cette masse et de la résultante des forces considérées. Et comme X, Y et Z sont précisément les composantes de la force F suivant les axes u, v, w , le moment relatif cherché, que nous désignerons par la notation (F, m) , a évidemment pour valeur

$$(F, m) = Xx + Yy + Zz.$$

8. Des conséquences essentielles découlent immédiatement de la formule qu'on vient d'établir.

Le moment relatif d'une force et d'une masse s'annule dans le cas où le point de concentration de la masse est situé sur la ligne d'action de la force. Il ne s'annule même que dans ce cas si, du moins, on suppose comme nous le ferons dans la suite, que les intensités de la force et de la masse sont différentes de zéro. En conséquence, la relation

$$Xx + Yy + Zz = 0$$

exprime la condition qui doit être remplie pour que la masse m soit concentrée en un point de la ligne d'action de F .

D'après cela, lorsqu'on regarde X, Y et Z comme les coordonnées homogènes d'une droite et x, y, z comme les coordonnées homogènes d'un point, l'équation précédente exprime que ce point et cette droite sont unis. Dès lors, si l'on convient de considérer X, Y et Z comme des variables, cette équation représente le point admettant x, y et z comme coordonnées ponctuelles; elle représente, au contraire, la droite admettant X, Y, Z pour coordonnées-lignes, lorsque x, y et z sont les variables.

9. Sans insister plus qu'il ne convient sur ce point, il n'est cependant pas inutile de remarquer que les formules de transformation des coordonnées peuvent s'obtenir très simplement.

Désignons, en effet, par X, Y et Z les coordonnées d'une force quelconque F relativement à un premier sys-

tème d'axes u, v, w qui, cela est bien entendu, doivent former un triangle. Soient ensuite X', Y' et Z' les coordonnées de la même force relativement à un deuxième système d'axes u', v', w' .

Pour obtenir les relations qui lient ces coordonnées, considérons trois forces d'intensité unité admettant pour lignes d'action les axes u', v' et w' et désignons par

$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \\ c_1, c_2, c_3 \end{aligned}$$

leurs coordonnées respectives par rapport au premier système d'axes. Les coordonnées, par rapport au même système, des composantes X', Y', Z' de la force F ont alors évidemment pour valeurs

$$\begin{aligned} X'a_1, X'a_2, X'a_3 \\ Y'b_1, Y'b_2, Y'b_3 \\ Z'c_1, Z'c_2, Z'c_3 \end{aligned}$$

d'où résultent immédiatement, en vertu du paragraphe 3, les formules

$$\begin{aligned} X &= X'a_1 + Y'b_1 + Z'c_1 \\ Y &= X'a_2 + Y'b_2 + Z'c_2 \\ Z &= X'a_3 + Y'b_3 + Z'c_3 \end{aligned}$$

qui permettent précisément de passer du premier au deuxième système d'axes. (A suivre).

Chemin de fer Neuchâtel-Chaumont Tramway et Funiculaire.

(Suite et fin¹).

Par Philippe TRIPET, ingénieur.

5. Matériel roulant.

Section du funiculaire. — Les voitures du funiculaire de Chaumont méritent une mention toute spéciale, eu égard à leur construction originale. Les dimensions principales de la caisse sont les suivantes :

longueur	8710 mm.
largeur (sans les portes) . .	2460 »
hauteur depuis les rails . .	3255 »

Elles comportent :

à l'aval : 1 coupé de 15 places debout ;
au milieu : 1 coupé de 27 places assises ;
à l'avant : 1 coupé à bagages de 5 m² de surface, pouvant contenir en cas d'affluence, 18 voyageurs debout.

La capacité totale des voitures est donc de 60 voyageurs.

Tare des voitures	7 000 kg.
En charge de 60 voyageurs .	11 500 »

Les caisses, recouvertes extérieurement de lamelles en bois de teak, reposent sur des châssis rigides en fers assemblés, de la construction ordinaire et connue de la fonderie de Berne, par l'intermédiaire de ressorts, de sorte que leur roulement est très doux, même sur les parties à

¹ Voir N° du 10 novembre 1911, page 239.