Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 38 (1912)

Heft: 23

Artikel: Définition générale de l'ellipse d'élasticité des systèmes articulés

Autor: Mayor, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29510

lui faire un grief, son projet étant assez complet pour pouvoir se passer de commentaires.

Projet *Pully-Cottage*, auteur M. Louis Sprintz, géomètre officiel, à Lausanne.

L'auteur de ce projet paraît s'être bien rendu compte de la tâche à remplir. Il a, en effet, cherché de bons raccordements entre la Rosiaz, le Port de Pully et Lausanne, tout en mettant le plus possible les beaux terrains en valeur. Mais les tracés projetés ne sont pas suffisamment étudiés et les pentes sont trop fortes. Les indications données au crayon sur le plan, relatives aux pentes, peuvent être exactes comme pentes moyennes, mais ne donnent pas les pentes maximales, ce qui serait justement intéressant.

Les deux avenues qui encerclent le village de Pully au midi ont une forme géométrique qui ne correspond pas à la configuration du terrain et elles ne sont pas d'un heureux effet.

La plus grande lacune de ce projet, c'est que la question architecturale est complètement laissée de côté.

Projet *Jean-Pierre*, auteur MM. Baumgartner, géomètre officiel et Marmillod-Droguet, architecte, tous deux à Lausanne.

Ce projet est bien présenté, mais on est frappé à première vue par l'absence de communication entre la Rosiaz et le Port de Pully. La grande artère projetée de « B 2 » en « G » forme une sorte de boucle isolée, dont l'utilité échappe au Jury. Le gros défaut du projet, c'est d'avoir voulu utiliser les chemins existants en les rélargissant. Or, ces chemins ont des pentes très fortes et sont encaissés entre des murs, donc peu praticables, et leur rélargissement coûterait beaucoup.

Au point de vue architectural, ce plan comporte un morcellement excessif. Cependant l'étude des divers groupes de constructions est intéressant, encore que le quartier commercial des « Grands Champs » soit placé trop au sud. Il paraît, en effet, tout indiqué que ce quartier soit placé sur le plateau et non pas sur l'arête, d'où l'on a la vue, et où des villas ont leur place marquée.

Projet *Guillaume, hip, hip, hip, hourrah !*, auteurs MM. Kissling, géomètre officiel, à Oron-la-Ville, et Oulevay, architecte, à Lausanne.

Ce projet fait abstraction des communications avec le Port de Pully. La disposition des voies nouvelles est monotone. Celles-ci sont tracées géométriquement, sans s'occuper des accidents du terrain ; leur construction serait presque irréalisable et les pentes beaucoup trop fortes dans les courbes. De plus, les auteurs n'ont pas suffisamment tenu compte des tracés déjà adoptés et les raccordements avec le plan d'extension de Lausanne sont défectueux.

Un autre côté fâcheux du projet, c'est la multiplicité des ponts, très onéreuse.

Enfin, le côté architectural n'est pas traité.

Il paraît également que les auteurs ont fait un travail superflu en présentant leur projet en deux planches identiques.

Pour terminer ce rapport, les membres du Jury louent vivement les autorités communales de Pully d'avoir ouvert ce concours d'idées, qui aura une utilité incontestable et sera un guide précieux pour l'élaboration du plan définitif.

Il est regrettable que le manque de plan de situation et le temps restreint qui était accordé pour ce concours n'ait pas permis à un plus grand nombre d'y participer : ceux qui l'ont affronté n'en ont que plus de mérite et ils ont droit à la reconnaissance publique pour le temps et la peine qu'ils ont consacrés à leur travail.

Pully, le 23 septembre 1912.

Ernest Deluz, *géomètre officiel*. A. Milliquet, *syndic*.
Maurice Schnell. Jean Taillens.

Définition générale de l'ellipse d'élasticité des systèmes articulés.

Par B. Mayor, professeur.

(Suite et fin)[1].

3. Lorsqu'on remplace, dans les formules (1) qui définissent les coordonnées de la rotation ω, les déplacements a_{ik} par leurs valeurs, on obtient, après des simplifications évidentes

$$(6)\qquad \begin{aligned} x &= \Sigma\, \mu_i\, T_i'\,(XT_i' + YT_i'' + ZT_i'''),\\ y &= \Sigma\, \mu_i\, T_i''(XT_i' + YT_i'' + ZT_i'''),\\ z &= \Sigma\, \mu_i\, T_i'''(XT_i' + YT_i'' + ZT_i'''). \end{aligned}$$

Posons alors, d'une manière générale,

$$(7)\qquad \begin{aligned} x_i &= \mu_i\, T_i'\,(XT_i' + YT_i'' + ZT_i'''),\\ y_i &= \mu_i\, T_i''\,(XT_i' + YT_i'' + ZT_i'''),\\ z_i &= \mu_i\, T_i'''\,(XT_i' + YT_i'' + ZT_i'''). \end{aligned}$$

et remarquons que ces nouvelles formules peuvent être envisagées comme définissant une rotation ω_i qui dépend essentiellement de la barre l_i et qui, pour cette raison, sera dite *la rotation correspondante à cette barre*. Comme, dans ces conditions, les formules (6) prennent la forme

$$x = \Sigma\, x_i,\quad y = \Sigma\, y_i,\quad z = \Sigma\, z_i,$$

ont voit que la rotation ω peut être envisagée comme la rotation résultante de toutes celles qui correspondent aux diverses barres du système. Il est dès lors naturel d'étudier les propriétés des rotations composantes ω_i.

En appliquant, tout d'abord, la formule du paragraphe 5 (1re partie), on obtient, pour l'intensité de ω_i, l'expression

$$\omega_i = \frac{\mu_i}{2S}\,(a\,T_i' + b\,T_i'' + c\,T_i''')\,(X T_i' + Y T_i'' + Z T_i''')$$

dans laquelle S désigne toujours l'aire du triangle de référence et a, b, c les côtés de ce triangle. Et si l'on pose

$$(8)\qquad \begin{aligned} \xi_i &= \frac{\mu_i}{2S}\, T_i'\,(a\,T_i' + b\,T_i'' + c\,T_i'''),\\ \eta_i &= \frac{\mu_i}{2S}\, T_i''\,(a\,T_i' + b\,T_i'' + c\,T_i'''),\\ \zeta_i &= \frac{\mu_i}{2S}\, T_i'''\,(a\,T_i' + b\,T_i'' + c\,T_i'''), \end{aligned}$$

la formule précédente prend la forme simple

$$\omega_i = X\,\xi_i + Y\,\eta_i + Z\,\zeta_i.$$

[1] Voir N° du 10 février 1912, page 29.

Or les quantités ξ_i, η_i, ζ_i peuvent être considérées comme les coordonnées d'une masse m_i qui dépend essentiellement de la barre l_i et du système de référence, mais qui, en revanche est complètement indépendante de la force F. Et si l'on convient d'appeler cette masse *la masse adjointe à l_i*, la formule obtenue indique que *la rotation qui correspond à une barre quelconque est égale au moment relatif de la force F et de la masse adjointe à cette barre.*

Si l'on calcule ensuite l'intensité de la masse m_i à l'aide de la formule rappelée plus haut, on obtient

(9) $$m_i = \frac{\mu_i}{4\,S^2}(a\,T_i' + b\,T_i'' + c\,T_i''')^2,$$

de sorte qu'en tenant compte de ce résultat, les formules (8) prennent la forme plus simple

(10) $$\xi_i = \sqrt{m_i\,\mu_i}\,T_i', \quad \eta_i = \sqrt{m_i\,\mu_i}\,T_i'', \quad \zeta_i = \sqrt{m_i\,\mu_i}\,T_i'''.$$

En comparant alors les formules (7) et (10), on voit immédiatement que

$$x_i : y_i : z_i = \xi_i : \eta_i : \zeta_i.$$

Mais ce résultat montre que le point de concentration de la masse adjointe m_i coïncide avec le point autour duquel s'opère la rotation ω_i. Ce dernier est donc fixe et ne dépend pas de la force F.

Calculons enfin la tension produite par la force F dans la barre l_i. En vertu du principe de la superposition des effets des forces et de la signification des quantités T_i', T_i'', T_i''', on a, en désignant par T_i cette tension,

$$T_i = X\,T_i' + Y\,T_i'' + Z\,T_i'''$$

ou, en tenant compte des formules (10),

(11) $$T_i = \frac{1}{\sqrt{m_i\,\mu_i}}\,(X\,\xi_i + Y\,\eta_i + Z\,\zeta_i).$$

La tension T_i est donc proportionnelle au moment relatif de F et de la masse adjointe m_i de sorte qu'elle s'annule dans le cas où la ligne d'action de F passe par le point m_i.

4. Les formules du paragraphe précédent conduisent encore à une propriété essentielle de la conique représentée par l'équation (5).

Cherchons, en effet, à déterminer le moment d'inertie I_d de l'ensemble des masses adjointes à toutes les barres par rapport à une droite quelconque d.

Désignons, dans ce but, par X, Y, Z les coordonnées d'une force arbitraire F admettant d pour ligne d'action, et rappelons tout de suite que ces quantités peuvent être envisagées comme les coordonnées homogènes de d.

Le moment relatif de F et de m_i a d'une part, pour expression

$$X\,\xi_i + Y\,\eta_i + Z\,\zeta_i.$$

En désignant, d'autre part, par δ_i la distance de m_i à la droite d, ce même moment est représenté en valeur absolue par le produit

$$F\,\delta_i\,m_i.$$

On aura par conséquent, en grandeur et en signe,

$$\delta_i^2 = \frac{(X\,\xi_i + Y\,\eta_i + Z\,\zeta_i)^2}{F^2\,m_i^2}$$

ou, en tenant compte des formules (10),

$$m_i\,\delta_i^2 = \frac{\mu_i}{F^2}\,(X\,T_i' + Y\,T_i'' + Z\,T_i''')^2,$$

et le moment d'inertie cherché est donné par la formule

$$I_d = \frac{1}{F^2}\,\Sigma\mu_i\,(X\,T_i' + Y\,T_i'' + Z\,T_i''')^2.$$

Or si l'on égale à zéro le second membre de cette relation on obtient précisément, après suppression du facteur $\frac{1}{F^2}$ qui n'a pas d'importance, l'équation de la conique considérée. On en doit conclure que cette conique est l'enveloppe des droites par rapport auxquelles le moment d'inertie de l'ensemble des masses adjointes s'annule.

5. Les résultats qui précèdent montrent nettement que la masse fictive désignée par m_i possède des propriétés identiques à celles de l'élément qu'on rencontre dans l'étude des systèmes triangulés et auquel on donne indifféremment les noms de masse adjointe ou de poids élastique. Cependant, alors que ce dernier élément ne dépend que des dimensions du système et des constantes caractéristiques de la barre correspondante, m_i dépend en outre du système de référence choisi, c'est-à-dire des nœuds A, B, C et des axes u, v, w. Au reste, il est bien simple de s'assurer directement que la définition donnée ici comprend, comme cas particulier, celle de la masse adjointe des systèmes triangulés.

Considérons, en effet, une poutre triangulée qui soit encastrée à l'une de ses extrémités et libre à l'autre. Désignons par l_i l'une quelconque de ses barres et par Σ une section qui ne rencontre que cette barre et deux autres tout en divisant le système en deux parties distinctes dont l'une, à savoir celle qui renferme l'extrémité libre, sera précisement dite la partie libre. Choisissons alors les nœuds A, B, C du système de référence dans cette partie libre, les axes u, v, w étant d'ailleurs astreints à la seule condition de former un triangle.

Si l'on envisage, ainsi qu'on doit le faire, une force quelconque F comme la résultante de trois composantes ayant respectivement A, B, C pour points d'application et u, v, w pour lignes d'action, la tension produite dans l est donnée en valeur absolue par l'expression

$$\frac{F\,r_i}{h_i}$$

dans laquelle r_i et h_i désignent respectivement les distances du nœud opposé de cette barre à la ligne d'action de F et à la barre elle-même. Comme cette tension s'annule dans le cas où la ligne d'action de F passe par le nœud opposé, on est déjà en droit d'en conclure que le point de concentration de m_i coïncide avec ce nœud opposé.

D'autre part, il résulte immédiatement de la formule (11) que la valeur absolue de cette même tension est encore donnée par l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{m_i \, \mu_i}} F \, m_i \, r_i.$$

On aura donc

$$\frac{1}{m_i \, \mu_i} F^2 \, m_i^2 \, r_i^2 = \frac{F^2 \, r_i^2}{h_i^2};$$

d'où l'on déduit, en remplaçant μ_i par sa valeur (4) et après des simplifications évidentes, la formule

$$m_i = \frac{l_i}{E_i \, \Omega_i \, h^2_i},$$

qui est précisément celle que nous devions obtenir, et qui montre, en particulier, que la conique représentée par l'équation (5) se confond, dans le cas d'une poutre triangulée, avec la conjugée de l'ellipse d'élasticité de cette poutre.

6. Il est possible d'étendre, aux systèmes articulés de l'espace, la théorie qui vient d'être développée. Toutefois, comme cette extension nécessite des développements analytiques assez étendus, nous nous bornerons ici à indiquer les notions sur lesquelles elle repose.

On sait, en premier lieu, qu'à tout déplacement infiniment petit d'un solide correspond un système de rotations. D'autre part, on démontre facilement que ce système de rotation est bien déterminé lorsqu'on connaît les déplacements de six points du solide suivant six axes passant respectivement par ces points et assujettis, en outre, à la condition de ne pas appartenir à un même complexe linéaire.

Dès lors, considérons six nœuds choisis arbitrairement dans un système articulé gauche assujetti à des liaisons quelconques et, par chacun d'eux, faisons passer un axe. Tout système de forces *(F)* peut alors être décomposé, d'une manière et d'une seule, en six composantes ayant précisément ces axes comme lignes d'action, si, comme nous le supposerons, ces derniers n'appartiennent pas à un même complexe linéaire. En admettant que chaque composante soit effectivement appliquée au nœud correspondant, une déformation se produit dans le système et chacun des six nœuds envisagés subit, suivant son axe, un déplacement bien déterminé et qu'on peut regarder comme infiniment petit. A l'ensemble des six déplacements définis de cette manière correspond, en vertu de ce qui précède, un système de rotations *(R)* et il est facile de démontrer que les complexes d'action de *(F)* et de *(R)* peuvent se déduire l'un de l'autre par une transformation homographique. Cette transformation est d'ailleurs du même type que celle que nous avons signalée antérieurement[1], et dépend essentiellement d'un complexe quadratique que l'on doit regarder comme l'extension naturelle de la conique représentée par l'équation (5).

Il est à peine nécessaire d'ajouter que des considérations analogues à celles qui font l'objet de cette étude peuvent être appliquées sans aucune difficulté aux poutres pleines qu'envisage la résistance des matériaux.

[1] *Statique graphique des systèmes de l'espace,* et Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, 15 avril 1912.

CHRONIQUE

L'histoire de l'industrie.

Une histoire de la technique et de l'industrie allemande est en train de constituer grâce aux travaux de M. C. Matschoss qui, outre de grands ouvrages d'ensemble tels que son Histoire de la machine à vapeur, publie, depuis quelques années, de très remarquables monographies, avec l'appui de la Société allemande des ingénieurs. Ces livres, écrits dans une langue si limpide qu'ils sont très faciles à lire pour des welches, sont riches en enseignements féconds et du plus grand intérêt. Ils sont d'une lecture vraiment attachante et c'est parfois avec émotion que nous suivons les grands pionniers de l'industrie dans leurs efforts, souvent admirables, pour vaincre les difficultés innombrables qu'ils trouvaient accumulées devant eux. De tels ouvrages sont une excellente école d'énergie, de ténacité, de bon sens et de clairvoyance pour les futurs ingénieurs et nous comprenons que l'Ecole polytechnique de Berlin ait confié une chaire d'histoire de l'industrie à M. Matschoss. Jetons un coup d'œil sur une de ces publications qui a paru dernièrement. Elle est consacrée à la grande fabrique de locomotives Wolf, à Magdebourg. C'est un ouvrage de grand luxe qui fait honneur aux arts graphiques allemands. Le fondateur de la maison, M. R. Wolf, après avoir fait un apprentissage de mécanicien et suivi l'enseignement d'une école professionnelle, fut ingénieur dans la maison Wöhlert, puis ingénieur en chef de la fabrique Kuhn, à Stuttgart. C'est en 1862 qu'il fonda, à Magdebourg, la petite usine qui forma le noyau autour duquel se groupèrent peu à peu les grands établissements actuels. Au début de son entreprise, Wolf n'occupait que six ouvriers d'ailleurs assez peu habiles et lui-même dut fréquemment se charger de confectionner les pièces délicates. Nous le voyons faire les métiers les plus divers et au milieu de difficultés qui eussent rebuté un caractère moins bien trempé. A force d'énergie et de travail il créa la grande maison actuelle, de réputation mondiale, dont la production, en locomobiles seulement, atteint 850 000 HP.

L'enseignement de la mécanique.

Il y a longtemps déjà que des savants éminents ont entrepris de débarrasser l'enseignement de la mécanique du fatras mathématique qui l'alourdit et l'obscurcit. Ces tentatives ont eu peu de succès, dans les pays latins tout au moins, et se sont heurtées à l'incompréhension des uns, à l'inertie des autres. Rendre à la mécanique son caractère expérimental, ce serait, il est vrai, priver beaucoup de professeurs du vain étalage de formules et d'équations par quoi ils conquèrent l'admiration irréfléchie de leurs auditeurs : aussi, est-ce au risque de chagriner quelques mathématiciens intransigeants, que nous recommandons à tous ceux qui ne goûtent pas le byzantinisme scientifique, la lecture d'un ouvrage[1] que deux grands savants français, MM. E. et F. Cosserat présentent en ces termes au public :

« Un intervalle difficile à franchir, qui réclame des efforts

[1] Mécanique appliquée par John Perry, professeur au Royal College of Science, South Kensington, traduit par E. Davaux, ingénieur de la marine, avec des additions et un appendice sur la mécanique des corps déformables, par MM. E. et F. Cosserat, Paris. A. Hermann et fils, éditeur. Prix : Fr. 10.