Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 39 (1913)
Heft: 14

Artikel: Théorie du coup de bélier
Autor: Allievi, Lorenzo
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-30134

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ambérieu-Culoz-Bellegarde-Genève est de 605 kil. ; par le projet de Saint-Amour-Bellegarde, elle serait de 530 kil., soit 75 de moins, et par le projet de la Faucille, de 498 kil., soit 107 de moins. La Faucille raccourcit de 32 kil. de plus que le Saint-Amour-Bellegarde.

Le Ministère des Affaires étrangères s'est prononcé, au point de vue politique, d'une façon très catégorique : la Faucille doit être exécutée préférablement au Saint-Amour-Bellegarde. La Faucille a un intérêt international, le Saint-Amour-Bellegarde n'a qu'un intérêt régional. Il en découle que si la Compagnie P. L. M. veut exécuter le Saint-Amour-Bellegarde, elle doit s'attendre, comme au Frasne-Vallorbe dont on lui opposerait sans aucun doute le précédent, à supporter une notable partie de la dépense. Or, on sait combien les Compagnies sont peu disposées à faire des frais de raccourcis qui ont comme résultat immédiat une réduction des parcours taxés.

Examinons enfin, puisque la question financière empêchera pour un certain temps de mettre la main à l'œuvre pour l'un ou l'autre de ces projets, quels sont les moyens d'améliorer, soit en France, soit en Suisse, au moins provisoirement, les relations de Paris à Genève et à la Savoie.

Du côté français on vient de décider de poser la seconde voie entre Bellegarde et Annemasse. Ce travail n'ira pas sans de coûteuses modifications à une ligne établie, il y a trente ans, avec des déclivités accentuées et des courbes à faible rayon.

D'autre part la Compagnie P. L. M. pourrait-elle améliorer sa ligne de Bourg à Bellegarde, pour y faire passer des express? Cela paraît difficile et serait fort coûteux, cette ligne ayant des déclivités allant jusqu'à 28 $^0/_{00}$ et le terrain ne se prêtant pas à des déviations. Dans son état actuel, on ne pourrait rien gagner sur le temps de parcours par l'autre ligne.

Quelles sont les améliorations que l'on pourrait apporter du côté suisse pour les relations Paris-Genève?

Tout d'abord il faudrait de meilleures correspondances à Renens, en y faisant coïncider convenablement des express. En second lieu le raccordement de Denges à Bussigny, dont la Convention de Berne de 1909 a prévu la réouverture, entraînerait la création de trains spécialisés sur Genève, évitant le détour par Renens ou Lausanne.

Enfin, cette même convention à suggéré l'étude d'un raccourci de Vallorbe à Bussigny, ce qu'il faut entendre par une amélioration de cette section, affectée de déclivités fâcheuses.

On a dernièrement proposé une ligne partant de Nyon et se bifurquant à l'Isle en deux branches, l'une aboutissant à Yverdon et l'autre à Vallorbe. Cette dernière intéresse les relations de Genève avec Paris. La distance Paris-Genève, qui serait par Renens-Vallorbe-Frasne, de 561 kil. se réduirait à 533 kil. par l'exécution de ce projet.

La longueur à construire de Nyon au Day serait de 45 kil. et la distance Nyon-Vallorbe, qui est actuellement par Renens de 76 kil., serait ramenée à 48 kil., soit un raccourci de 28 kil. Les déclivités étant de 15 $^0/_{00}$ au maximum, au lieu de 20 $^0/_{00}$ sur une partie de la ligne actuelle, le gain en distance virtuelle serait de 45 kil.

Mais ce tracé a plusieurs défauts : il double inutilement la ligne du lac de Nyon à Rolle, il passe dans de mauvais terrains dans cette partie, et s'élève trop haut, à Ballens, pour redescendre vers l'Isle et remonter jusqu'au tunnel sous la Combe au Clerc, avant Le Day. On pourrait trouver un autre tracé plus logique, en partant du pont sur l'Aubonne, après Allaman, et en se dirigeant par Grancy en rampe continue de 10 à 15 $^0/_{00}$, jusqu'à Juriens-Envy, et en aboutissant au même tunnel. Il n'y aurait que 30 kil. à construire, et le gain en parcours réel comme en distance virtuelle serait le même que par le projet du Nyon-Vallorbe.

Il y a quelques années M. Perey[1] avait proposé un tracé en 15 $^0/_{00}$ de Bussigny à Vallorbe qui viendrait coïncider avec celui d'Allaman à Vallorbe, à partir de Grancy. De ce point à Bussigny il y aurait 12 kil. à construire, de sorte que, par la construction de 42 kil. seulement, on pourrait améliorer à la fois les relations de Vallorbe, à Genève et à Lausanne. La section Vallorbe-Grancy serait commune aux deux directions, et le raccourci servirait aux deux trafics. On pourrait, tout en établissant à double voie la ligne Allaman-Vallorbe, se contenter de la simple voie pour la section Bussigny-Grancy, en l'affectant aux trains montants, tandis que la ligne actuelle Bussigny-Vallorbe servirait aux trains directs descendants vers Lausanne et à tous les trains omnibus locaux.

En exécutant cette ligne on obtiendrait pour les relations de Paris avec Genève et la Savoie des avantages sur l'état actuel à peu près équivalents à ceux que pourrait donner la ligne de Saint-Amour-Bellegarde, dont l'établissement est des plus problématiques pour le moment. Les Chemins de fer fédéraux y gagneraient un nouveau raccourci susceptible de leur permettre d'attirer sur leurs rails une partie du trafic de Paris pour Genève et la Haute-Savoie.

Cette question mériterait d'être étudiée, en attendant que les circonstances financières s'améliorant on puisse songer à décider la France à exécuter la Faucille,

---

Lorenzo ALLIEVI, ingénieur

Théorie du coup de bélier.

Traduction française

par R. NEESER, professeur à l'Université de Lausanne.

(Suite)[2].

§ 3. La caractéristique ρ.

La nature des phénomènes qui accompagnent le mouvement varié d'un liquide dans une conduite, phénomènes qui, comme on le sait, sont caractérisés par des variations continuelles de la vitesse et de la pression, est évidemment

[1] Voir *Bulletin technique* du 5 juin 1902.

[2] Voir N° du 10 juin 1913, page 121.

la conséquence du fait que ces variations donnent naissance à des transformations continuelles d'énergie cinétique (force vive) de la colonne liquide en énergie potentielle (déformations élastiques) du liquide et des parois de la conduite, et vice-versa.

Il semble donc bien que l'on doive s'attendre à ce que les lois de ces phénomènes soient en relation directe et étroite avec les quantités d'énergie, soit potentielle, soit cinétique, que contient chaque tronçon de conduite en chaque instant. Or, comme le système 9), qui est l'expression analytique de ces lois, ne dépend des données relatives à la conduite que par l'intermédiaire de ρ, on peut s'attendre à ce que cette caractéristique, qui définit sans ambiguïté le régime permanent de la conduite soit, elle aussi, en corrélation étroite avec les quantités d'énergie cinétique ou potentielle contenues, en régime permanent, dans l'unité de longueur de la conduite.

On peut en effet démontrer que ρ s'exprime par la demi-racine carrée du rapport entre ces deux quantités d'énergie.

Désignons, dans ce but, par :

W_0, la quantité d'énergie cinétique que contient l'unité de longueur de la conduite en régime permanent, c'est-à-dire la force vive emmagasinée dans l'unité de longueur de la colonne liquide animée de la vitesse v_0, :

W, la quantité d'énergie potentielle que contient l'unité de longueur de la conduite en régime permanent, c'est-à-dire la somme des quantités d'énergie absorbées, d'une part, par la compression élastique de l'unité de longueur de la colonne liquide et, d'autre part, par la déformation élastique des parois de la conduite sur l'unité de longueur de celle-ci, il est facile de voir que l'on oblient, en conservant les notations habituelles :

$$W_0 = \frac{\pi \omega D^2}{4} \cdot \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\pi \omega D^2 v_0^2}{8g}.$$

Si l'on pose :

$W = W' + W''$, où W' et W'' désignent respectivement les quantités d'énergie potentielle absorbées par la compression élastique du liquide et par la déformation élastique des parois de la conduite, on aura :

$$W' = \frac{1}{2} \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\omega y_0}{\varepsilon} \cdot \omega y_0 = \frac{\pi \omega^2 D^2 y_0^2}{8 \varepsilon}$$

$$W'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega y_0 D}{2} \cdot \frac{\omega y_0 D}{2 e} \frac{\pi D}{E} = \frac{\pi \omega^2 D^2 y_0^2}{8 E} \cdot \frac{D}{e}$$

soit, si on fait la somme de ces deux valeurs :

$$W = W' + W'' = \frac{\pi \omega^2 D^2 y_0^2}{8} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{E} \cdot \frac{D}{e} \right)$$

et enfin, si l'on tient compte de l'équation 1)

$$W = \frac{\pi \omega g D^2 y_0^2}{8 a^2}.$$

Faisons maintenant le quotient de W_0 par W :

$$\frac{W_0}{W} = \left(\frac{a v_0}{g y_0} \right)^2 = 4 \rho^2 \text{ d'où}$$

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{W_0}{W}} \qquad (10)$$

résultat que nous avons énoncé tout à l'heure.

La caractéristique ρ a donc une signification précise et nettement caractérisée ; nous allons encore déterminer les limites entre lesquelles oscillent les valeurs numériques qu'elle peut prendre dans le champ des applications pratiques.

Nous avons vu, au § 1, que les valeurs de a, découlant de la formule 1 *bis*), sont comprises entre 600 ou 700 mètres (pour des conduites en tôle de grand diamètre et de faible épaisseur) et 1200 ou 1300 m./sec. (pour des conduites de petit diamètre et de grande épaisseur).

D'autre part, la vitesse de régime v_0, peut varier entre 1,50 m./sec. et 3,00 m./sec. environ ; on pourra dès lors se convaincre facilement que, si l'épaisseur des tuyaux est calculée sur la base des critères couramment utilisés, la valeur de ρ devra être comprise entre :

ρ ∅ 0,10 au minimum pour de très hautes chutes et de faibles vitesses de régime (par ex., pour y_0 ∅ 1000 m. et v_0 ∅ 1,50 m./sec.), et

ρ ∅ 10 au maximum pour de très faibles chutes et de grandes vitesses de régime (par ex., pour y_0 ∅ 10 m. et v_0 ∅ 3,00 m./sec.).

Avant de passer au calcul numérique des valeurs de ρ, une observation préliminaire s'impose.

Toutes les formules auxquelles l'exposé qui précède nous a conduits, ainsi que toutes les recherches qui vont suivre, supposent que la vitesse de propagation a et, par conséquent, le rapport $D : e$ soient constants, sur toute la longueur de la conduite ; c'est grâce à cette hypothèse que les équations différentielles du mouvement varié (voir mon Mémoire de 1904) purent être intégrées, desquelles sont déduites les relations fondamentales 2). Cette hypothèse se vérifie avec une exactitude suffisante dans certains cas, par ex., dans le cas des conduites, souvent fort longues, servant à la distribution d'eau dans les villes ; elle est cependant très rarement réalisée dans le cas des conduites alimentant les usines hydrauliques, qui nous intéressent plus particulièrement ici.

Les conduites de cette dernière catégorie sont, cela va de soi, le plus souvent inclinées, si bien que le rapport $D : e$ (e étant l'épaisseur calculée sur la base de la charge statique à laquelle chaque tronçon est soumis) diminue du haut en bas de la conduite, et que la valeur a décroît du bas en haut de la conduite. Il faudra évidemment, dans un cas pareil, introduire une valeur moyenne de la vitesse de propagation a, telle que, si les variations de la pression se transmettaient le long de la conduite, avec cette vitesse-là, elles emploieraient, à en parcourir la longueur totale, L le même temps, $L : a$ que celui, $\Sigma (l_x : a_x)$, qu'elles emploient effectivement à parcourir, avec la vitesse variable a_x, la totalité des tronçons de longueur l_x. Il est évidemment logique de faire intervenir, dans le calcul de la caractéristique ρ, la valeur moyenne de a telle que nous venons de la définir, dès qu'il s'agira de l'étude de coups de bélier d'une durée suffisante pour que l'élasticité de la conduite entière entre en jeu ; ce sera certainement le cas lorsqu'il s'agira de phénomènes, dits de contre-coup, dont

la durée dépassera notablement celle de la phase $\mu = 2L : a$ de coup direct.

Si, par contre, il s'agit de phénomènes de coup direct, d'une durée inférieure à μ, il conviendra évidemment d'attribuer à a, pour le calcul de ρ, la valeur correspondant au tronçon inférieur de la tuyauterie; la fermeture brusque de l'orifice d'écoulement constitue un exemple typique illustrant ce dernier cas.

Je reviendrai, dans mes Notes ultérieures, sur cette question-là, et me bornerai, pour l'instant, à faire encore remarquer que les limites extrêmes entre lesqulles la valeur de a peut varier, sont suffisamment rapprochées pour que l'introduction, dans les calculs, d'une valeur moyenne de a ne puisse pas infirmer d'une manière sensible l'exactitude des résultats.

Afin de donner une idée plus précise de ces limites, je vais étudier le cas d'une tuyauterie à inclinaison constante; je supposerai que l'épaisseur des tôles soit calculée, en chaque point, sur la base de la pression statique en ce point, le taux de travail de la tôle étant partout le même, $R.\ 10^6$ kg./m²; on majorera ensuite l'épaisseur obtenue, d'une valeur que j'admets proportionnelle au diamètre, à raison, par ex., de 0,0025 m. par mètre.

Si l'on désigne par y_x, la charge statique dans une section quelconque d'abscisse x, on aura évidemment :

$$\frac{2e}{D} = \frac{1000.\ y_x}{R.\ 10^6} + 0{,}005$$

En admettant $R = 7$ kg/mm², et introduisant la valeur obtenue pour le quotient $2e : D$ dans l'équation 1 *bis*) on obtiendra, pour la valeur de la vitesse de propagation a_x, dans la section considérée

$$a_x = 1425 \sqrt{\frac{y_x + 35}{y_x + 180}} \qquad (11)$$

avec une grande approximation. J'ai dressé, au moyen de cette formule, le tableau suivant :

y_x	a_x	y_x	a_x	y_x	a_x
0	628	90	974	350	1216
10	703	100	990	400	1236
20	747	120	1025	500	1266
30	792	140	1054	600	1287
40	834	160	1080	700	1305
50	865	180	1102	800	1318
60	897	200	1122	900	1329
70	924	250	1161	1000	1338
80	948	300	1192	1100	1346

Si, enfin, l'on introduit dans:

$$\frac{L}{a} = \Sigma \left(\frac{l_x}{a_x}\right)$$

les valeurs de ce tableau, on en tirera les valeurs moyennes de a pour des conduites à inclinaison constante, réalisant des chutes comprises entre 1000 m. et 10 mètres. Ces résultats sont contenus dans le tableau suivant, qui renferme également les valeurs de la caractéristique ρ correspondant à ces chutes et aux deux vitesses de régime extrêmes $v_0 = 1.50$ m/ sec et 3.00 m/ sec.

y_0	a	Valeurs de ρ		y_0	a	Valeurs de ρ	
		$v_0 = 1.5$	$v_0 = 3$			$v_0 = 1.5$	$v_0 = 3$
1000	1184	0,09	0,18	120	861	0,55	1,10
800	1153	0,10	0,21	100	837	0,64	1,28
600	1110	0,14	0,28	80	809	0,77	1,55
500	1082	0,16	0,33	60	777	0,99	1,98
400	1046	0,20	0,40	40	739	1,41	2,83
300	1000	0,25	0,51	30	717	1,83	3,66
200	936	0,36	0,72	20	694	2,65	5,30
140	883	0,48	0,97	10	665	5,09	10,18

On verra, par ce tableau, que ρ est pratiquement compris entre 0,10 et 10, comme je l'avais énoncé précédemment.

Dans la règle, j'utiliserai par la suite, lorsqu'il s'agira d'exemples numériques se rapportant à des conduites d'usines hydrauliques, des systèmes de valeurs de ρ de l'ordre de grandeur de celles comprises dans ce tableau.

Ces systèmes de valeurs sont, d'ailleurs, susceptibles d'être représentés graphiquement d'une manière très simple, au moyen d'un abaque liniéaire. En effet, puisque:

$$\rho = \frac{a\ v_0}{2g\ y_0}$$

on pourra représenter cette caractéristique, en fonction de v_0, dans un système de coordonnées rectangulaires (voir fig. 1, par une droite passant par l'origine; le coefficient angulaire de cette droite dépendra de y_0 et de a, donc, en définitive, de la charge de régime y_0, si bien que le système complet des valeurs de ρ, pour toutes les conduites possibles (soit pour tous les y_0) et pour toutes les vitesses de régimes (v_0) admissibles, sera représenté par un faisceau de droites issues de l'origine des axes ρ et v_0; la Fig. 1, sur laquelle quelques droites de ce faisceau sont représentées, peut se passer, croyons-nous, de tout autre commentaire.

Mais si les épaisseurs de la conduite sont déterminées, comme c'est le cas en général, par la valeur de la charge statique y_0, la vitesse de propagation a est, nous l'avons vu au § 3, fonction de y_0, si bien que l'ensemble des conduites représentées par les deux paramètres ρ et ϑ se réduit, alors, à une double infinité seulement.

Le lecteur doit aussi se familiariser, par des exemples numériques, avec l'idée que cette triple (ou double) infinité de conduites caractérisées par les deux éléments ρ et ϑ groupe, en réalité, des conduites très différentes les unes des autres, quoique toujours comprises dans les limites des applications techniques possibles; ainsi, les deux conduites caractérisées par les éléments suivants :

1° $y_0 = 300$ m. $a = 1000$ m/sec. $L = 900$ m. $v_0 = 3{,}60$ m/sec. $\tau = 9$ m/sec.
2° $y_0 = 100$ m. $a = 840$ m/sec. $L = 300$ m. $v_0 = 1{,}43$ m/sec. $\tau = 3{,}6$ »

bien que très différentes l'une de l'autre, sont cependant représentées toutes les deux par la même paire de paramètres :

Pour de très fortes épaisseurs de conduites, c'est-à-dire pour de très hautes charges y_0, l'équation II donne, comme valeur limite de a_x 1425 m./sec.; c'est là, précisement la vitesse de propagation des vibrations (du son), dans l'eau.

$$\rho = 0{,}60 \quad \text{et} \quad \vartheta = 5.$$

Je ferai remarquer encore que, des cinq éléments qui caractérisent une conduite en régime permanent, trois sont des éléments *constructifs*, invariables en général ; ce sont : y_0, a et L ; les deux autres, v_0 et τ, par contre, sont des éléments *fonctionnels*, dont les valeurs ne sont pas invariables, mais peuvent, au contraire, subir de fréquentes et importantes modifications si, par exemple, l'on change le temps de manœuvre de l'obturateur ou le débit de régime de la conduite. Le lecteur doit donc bien se faire à l'idée que si l'on modifie soit l'un soit l'autre de ces deux éléments fonctionnels, la même conduite devient, au point de vue du coup de bélier, une *conduite nouvelle*, dans laquelle les lois régissant ces phénomènes pourront prendre une allure tout à fait différente de celle qu'elles avaient avec des valeurs différentes de ces éléments variables v_0 et τ.

Ainsi donc, si l'on attribue aux paramètres ρ et ϑ toutes les valeurs qu'ils sont susceptibles de prendre dans le champ des applications pratiques, on déterminera une double infinité de conduites qui groupe toutes les conduites imaginables et toutes les manœuvres possibles de l'obturateur, mais chacune de ces conduites, déterminée par une paire de paramètres ρ et ϑ représente, en réalité, la triple (ou double) infinité des conduites dans lesquelles les coups de bélier atteignent les mêmes valeurs relatives et suivent des lois identiques.

C'est ce groupement particulier de toutes les conduites imaginables qui rend possible l'étude systématique et complète du coup de bélier et permet d'épuiser la théorie de ces phénomènes.

L'idée du *synopsis cartésien* dont nous allons nous occuper un peu maintenant jaillit tout naturellement des réflexions qui précèdent. Ce synopsis cartésien des conduites, qui constitue un instrument précieux d'analyse et de recherche, s'obtient en représentant graphiquement, dans un système de coordonnées rectangulaires ρ, ϑ (fig. 2) toutes les lois des phénomènes des coups de bélier, c'est-à-dire toutes les déductions et conclusions de quelque caractère que ce soit, que l'on peut tirer du système fondamental 9).

L'importance toute particulière qu'acquerra, par la suite (voir § 5), l'emploi de coordonnées cartésiennes dans la théorie du coup de bélier, confère une utilité toute spéciale à cet abaque dont je ferai un usage très étendu.

Observons enfin que, par le fait que la caractéristique ρ est comprise entre les valeurs 0,10 et 10, le rapport $W_0 : W$ entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la conduite prendra des valeurs comprises entre 0,04 et 400 ; ces limites sont entre elles comme 1 : 10 000.

Cette constatation fera comprendre pourquoi les phénomènes du coup de bélier, qui sont fonction des valeurs relatives de ces deux quantités d'énergie, sont susceptibles d'atteindre des valeurs relatives très diverses et de suivre des lois très différentes, selon qu'il s'agira d'une haute chute ou d'une basse chute. Je donnerai la preuve directe de ces faits à l'occasion de l'étude des lois de coups de béliers provoqués par diverses manœuvres de l'obturateur.

§ 4. Discontinuités dans la loi de variation de la charge.

Lorsque l'on manœuvre l'obturateur de l'orifice d'écoulement (ouverture ou fermeture) d'une manière continue, mais cependant de façon à ce que la variation $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ du degré d'ouverture, au début de la manœuvre, soit différente de zéro, on constate, dans la loi de variation de la charge, une discontinuité qui se produit aux temps $t = \mu$, $2\,\mu$, $3\,\mu$, $4\,\mu$, etc., soit à la fin de la phase directe et de chacune des phases successives du contre-coup. Il est aisé de se rendre compte qu'il doit en être ainsi.

En effet, si l'on dérive les équations du système 9) par rapport au temps, on obtient le système suivant :

$$\left.\begin{aligned}
(\zeta_1 + \rho\,\eta_1)\,\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} &= -\rho\,\zeta_1\,\frac{\partial \eta_1}{\partial t} \\
(\zeta_1 - \rho\,\eta_1)\,\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + (\zeta_2 + \rho\,\eta_2)\,\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} &= \rho\left(\zeta_1\,\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \zeta_2\,\frac{\partial \eta_2}{\partial t}\right) \\
(\zeta_2 - \rho\,\eta_2)\,\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} + (\zeta_3 + \rho\,\eta_3)\,\frac{\partial \zeta_3}{\partial t} &= \rho\left(\zeta_2\,\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \zeta_3\,\frac{\partial \eta_3}{\partial t}\right) \\
\text{etc.} \qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

dans lequel les grandeurs affectées des indices 1 se rapportent à un instant t_i compris entre 0 et μ, et les grandeurs affectées des indices 2, 3, 4. etc., se rapportent à des instants :

$$t = t_i + \mu \qquad t = t_i + 2\,\mu \qquad t = t_i + 3\,\mu, \text{ etc.}$$

Ce système 12) constitue donc l'ensemble des relations qui existent entre les valeurs que prennent η, ζ et leurs dérivées respectives, à des instants séparés les uns des autres de l'intervalle μ.

Appliquons ce système 12) à la série des valeurs particulières :

$t = o \qquad t = \mu \qquad t = 2\,\mu$. etc., que je désignerai dorénavant par instants de rythme *entier*, et distinguons, au temps quelconque $t = i \times \mu$ de cette série, deux valeurs de $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$, savoir :

$\frac{\partial \zeta_i}{\partial t}$, correspondant à la fin de la $i^{\text{ème}}$ phase, et

$\frac{\partial \zeta_{i+1}}{\partial t}$, correspondant au début de la $i + 1^{\text{ème}}$ phase.

Nous allons démontrer que ces deux valeurs sont toujours différentes, même si la loi de manœuvre de l'orifice d'écoulement est continue, pour peu que la valeur de $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, au début de la manœuvre, soit différente de zéro.

Pour y arriver, nous désignerons par :

η_1, η_2, η^3, ... etc.,

ζ_1, ζ_2, ζ_3. ..... etc., les valeurs de η et de ζ relatives aux instants de rythme entier, et par :

$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_0$ $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_1$ $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_2$ etc. les valeurs des dérivées de η pour ces mêmes instants ;

$\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}\right)_1$ les valeurs des dérivées de ζ au début et à la fin de la première phase ;

$\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial t}\right)_1$ et $\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial t}\right)_2$ les valeurs des dérivées de ζ, au début et à la fin de la deuxième phase, etc.

Si l'on veut, maintenant, appliquer le système 12) à la série des valeurs enchaînées correspondant aux premiers instants de chaque phase, soit aux temps :

$t = o \qquad t = \mu \qquad t = 2\,\mu$, etc.,

considérés comme premiers instants des phases,

1re 2me 3me etc. ;

il faudra évidemment introduire, dans le système 12) :

pour $t = o$

les grandeurs :

$\eta_0 \quad \zeta_0 \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_0 \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_0$ qui correspondent au rythme entier, au lieu des grandeurs :

$\eta \quad \zeta_1 \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial t}$ qui correspondent à un instant quelconque compris entre o et μ;

pour $t = \mu$

les grandeurs :

$\eta_1 \quad \zeta_1 \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_1 \quad \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial t}\right)_1$ qui correspondent au rythme entier,

au lieu des grandeurs :

$\eta_2 \quad \zeta_2 \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial t} \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t}$ qui correspondent à un instant quelconque compris entre μ et $2\,\mu$;

pour $t = 2\,\mu$

les grandeurs :

$\eta_2 \quad \zeta_2 \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_2 \quad \left(\frac{\partial \zeta_3}{\partial t}\right)_2$ qui correspondent au rythme entier, au lieu des grandeurs :

$\eta_3 \quad \zeta_3 \quad \frac{\partial \eta_3}{\partial t} \quad \frac{\partial \zeta_3}{\partial t}$ qui correspondent à un instant quelconque compris entre $2\,\mu$ et $3\,\mu$, etc.

Le système 12) deviendra, par conséquent, si l'on tient compte du fait que $\eta_0 = \zeta_0 = 1$,

$$(1+\rho)\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}\right)_0 = -\rho\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_0$$

$$(1-\rho)\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}\right)_0 + (\zeta_1 + \rho\eta_1)\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial t}\right)_1 = \rho\left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_0 - \zeta_1\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_1\right)$$

$$(\zeta_1 - \rho\eta_1)\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial t}\right)_1 + (\zeta_2 + (\rho\eta_2)\left(\frac{\partial \zeta_3}{\partial t}\right)_2 = \rho\left(\zeta_1\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_1 - \zeta_2\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_2\right)$$

etc. etc. (13)

Si l'on veut, au contraire, appliquer le système 12) à la série des valeurs enchaînées qui correspondent à la fin de chacune des phases, c'est-à-dire aux temps :

$t = \mu, \quad 2\,\mu, \quad 3\,\mu, \quad$ etc.

considérés comme fin des phases;

1re, 2me, 3me, etc.

il n'y aura aucune modification à apporter aux indices des grandeurs η et ζ, à la condition, cependant, qu'il soit bien entendu que ces grandeurs se rapportent dorénavant aux instants de rythme entier, et que l'on introduise encore :

pour $t = \mu$,

les symboles de rythme entier :

$\eta_1 \quad \zeta_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_1 \quad \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}\right)_1$ à la place des symboles de rythme intercalaire :

$\eta_1 \quad \zeta_1 \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial t}$

pour $t = 2\,\zeta\mu_2$,

les symboles de rythme entier :

$\eta_2 \quad \zeta_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_2 \quad \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial t}\right)_2$ à la place des symboles de rythme intermédiaire :

$\eta_2 \quad \zeta_2 \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial t} \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t}$ etc., etc.

Le système 12) s'écrit alors :

$$(\zeta_1 + \rho\,\eta_1)\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial t_1}\right) = -\rho\zeta_1\left(\frac{\partial \eta}{\partial t_1}\right)$$

$$(\zeta_1 - \rho\eta_1)\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial t_1}\right) + (\zeta_2 + \rho\eta_2)\left(\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial t}\right)_2 = \rho\,\zeta\left(\frac{\partial \eta}{\partial t_1}\right) - \zeta_2\left(\frac{\partial \eta}{\partial t_2}\right)\right)$$

etc. etc. (14)

Comparons maintenant les systèmes 13) et 14), on verra que les valeurs de :

$\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}\right)$ = valeur de $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ à la fin de la 1re phase, valeur qui est fournie par la 1re équation du système 14), et :

$\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial t}\right)$ = valeur de $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ au début de la 2me phase, valeur qui est fournie par la 2me équation du système 13), sont toujours différentes, sauf toutefois, lorsque, au début de la manœuvre de l'orifice, $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_0$ est nul.

Dans ce seul cas, en effet, la 2me équation du système 13) deviendrait :

$$(\zeta_1 + \rho\,\eta_1)\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial t}\right)_1 = -\rho\,\zeta_1\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_1$$

ce qui prouve bien, par comparaison avec la 1re équation du système 14), que l'on aurait :

$$\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}\right)_1 = \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial t}\right)_1$$

On trouverait d'ailleurs, de même, d'une manière générale, en comparant les équations de 13) et 14), paire par paire :

$$\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial t}\right)_i = \left(\frac{\partial \zeta_{i+1}}{\partial t}\right)_i$$

Dans le cas des conduites alimentant des usines hydrauliques, η se rapproche beaucoup d'une fonction linéaire du temps, si bien que l'hypothèse :

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_0 = 0$$

ne se trouve, en général, pas vérifiée. Nous l'exclurons donc, à l'avenir, et admettrons dorénavant, pour toutes les études qui suivront, que la variation de η soit constante, c'est-à-dire que le degré d'ouverture η est une fonction linéaire du temps. Les lois de variation de la charge auxquelles nous serons ainsi conduits présenteront donc toujours des discontinuités aux instants de rythme entier, et les courbes des charges Y_i, portées en fonction du temps choisi comme abcisse, auront l'aspect d'une ligne brisée, dont les angles correspondront aux temps de rythme entier :

$t = 0, \quad \mu, \quad 2\mu, \quad 3\mu, \quad$ etc.,

et auront les valeurs $Y_0, \quad Y_1 \quad Y_2, \quad Y_3, \quad$ etc.

Le maximum ainsi que le minimum absolus de la charge, pendant la période de régime troublé, coïncideront, par conséquent (sauf toutefois dans le cas de certaines catégories de conduites que j'étudierai plus tard) toujours avec l'un ou l'autre des instants de rythme entier.

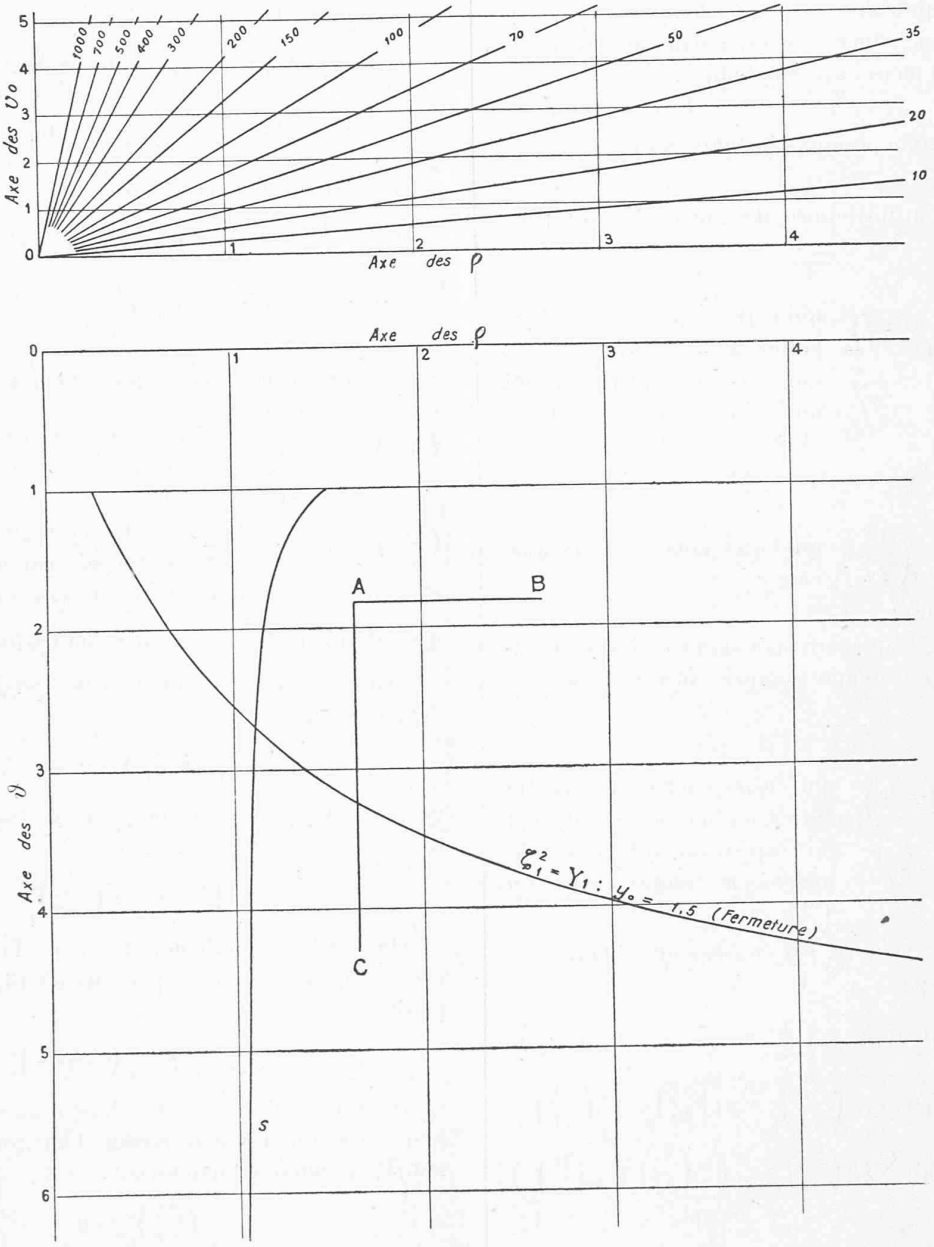

Fig. 1 et 2. — Synopis cartésien.

Cette remarque a une grosse importance, car on peut en conclure que l'on connaîtra suffisamment le caractère des lois d'un coup de bélier provenant d'une manœuvre déterminée de l'obturateur, dès que l'on aura établi la série des valeurs Y_1, Y_2, Y_3, etc., par lesquelles passe la charge Y, aux instants de rythme entier, dans la section de la conduite voisine de l'orifice d'écoulement.

Nous nous contenterons, pour le moment, des quelques considérations qui précèdent sur ces phénomènes de discontinuité; nous y reviendrons plus tard, à l'occasion des coups de bélier dus aux différentes lois de manœuvre de l'obturateur.

(A suivre).

Transformation des immeubles

„Ancienne Poste" et Pochon frères,

Place St-François et Place Centrale, à Lausanne.

Le Conseil communal de Lausanne va être appelé à se prononcer sur une demande d'achat faite par une Société anonyme, de l'immeuble dit de l'Ancienne Poste, place St-François. Sur cet emplacement, cette Société qui acquerra également la propriété Pochon, place Centrale, se propose d'édifier un grand immeuble avec galerie au niveau de la place St-François.

L'immeuble projeté occuperait non seulement l'emplacement des deux bâtiments à démolir, mais tout le terrain