Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 51 (1925)

Heft: 23

Artikel: Le problème de la torsion et l'analogie hydrodynamique de M. Boussinesq

Autor: Paschoud, Maurice

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39545

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

51e année 7 novembre 1925 N° 23

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Réd. : Dr H. Demierre, ing. Paraissant tous les 15 jours

ORGANE DE PUBLICATION DE LA COMMISSION CENTRALE POUR LA NAVIGATION DU RHIN
ORGANE DE L'ASSOCIATION SUISSE D'HYGIÈNE ET DE TECHNIQUE URBAINES
ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

SOMMAIRE : *Le problème de la torsion et l'analogie hydrodynamique de M. Boussinesq*, par Maurice Paschoud, ingénieur, professeur à l'Université de Lausanne. — *Considérations sur le développement récent de la production et de la distribution de l'énergie électrique en Suisse.* — *Le nouveau projet de loi française sur les brevets d'invention et l'examen préalable facultatif de la nouveauté des inventions*, par A. Bugnion, ingénieur-conseil, à Genève, physicien diplômé de l'Ecole polytechnique fédérale. — Correspondance : *A propos des Forces motrices de la Dixence.* — Bibliographie.

Le problème de la torsion et l'analogie hydrodynamique de M. Boussinesq,

par Maurice PASCHOUD, ingénieur, professeur à l'Université de Lausanne.

I. — Il est souvent utile de comparer entre eux des problèmes qui se posent dans des chapitres différents de la Physique mathématique. Une telle comparaison est particulièrement avantageuse lorsque ces problèmes, totalement distincts au premier abord, sont les mêmes analytiquement, c'est-à-dire lorsque leur résolution exige l'intégration des mêmes équations différentielles, avec les mêmes conditions aux limites. Nous dirons dans ce dernier cas que les problèmes en question sont *analogues*.

Quand deux problèmes sont analogues, toute solution de l'un est en même temps une solution de l'autre. La solution du premier de ces problèmes étant supposée connue, il suffit en quelque sorte de la « traduire » en tenant compte des termes de l'analogie pour trouver la solution du deuxième problème.

On voit sans peine toutes les simplifications que permet une telle «traduction», réalisant d'une façon particulièrement frappante l'économie de la pensée qui constitue la nature même de toute science. Certains résultats qui sont cachés pour l'un de ces problèmes deviennent quelquefois intuitifs et évidents pour l'autre. Et même, il arrive que le simple fait d'avoir démontré l'analogie de deux problèmes permettra de les résoudre tous deux ou tout au moins de prévoir de quelle nature sera leur solution.

II. — On connaît plusieurs analogies du problème de la torsion. L'une, indiquée par *Thomson et Tait* dans leur « Traité de philosophie naturelle », en 1867, est une analogie hydrodynamique. Une autre, l'*analogie de la membrane*, a été découverte par *Prandtl* en 1903. La littérature contient tous les renseignements nécessaires sur ces deux analogies et nous n'y reviendrons pas ici.

Il existe une troisième analogie du problème de la torsion, moins connue, semble-t-il, que les deux précédentes, que M. *Boussinesq* a publiée, en 1871 déjà, au « *Journal de Mathématiques pures et appliquées* ». C'est aussi une analogie hydrodynamique, mais différente de celle de Thomson et Tait. Nous allons l'exposer avec quelque détail en essayant d'en montrer l'utilité.

III. — Considérons d'une part un prisme élastique rectiligne, de section constante, pleine, c'est-à-dire sans cavité intérieure, sollicité à la torsion simple. Prenons pour axe des x l'axe de ce prisme supposé horizontal. Les axes y et z sont rectangulaires, l'un horizontal, l'autre vertical et situés dans une section droite quelconque mais déterminée du prisme.

Dans ces conditions, l'équation du contour qui limite la section droite du prisme est de la forme $f(x, y) = 0$. Désignons, avec les notations habituelles, par τ_{xy} et τ_{xz} les composantes de la tension spécifique tangentielle de torsion qui sont, dans le plan de la section droite du prisme, respectivement parallèles aux axes y et z. On démontre dans les Cours de Résistance des Matériaux, que l'on peut définir ces composantes par les relations

$$(1) \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial F}{\partial z} \text{ et } \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y},$$

la fonction $F(y, z)$ étant une fonction des deux variables y et z qui satisfait à l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2G\theta = -K, \text{ en posant } K = 2G\theta,$$

où G et θ sont des constantes représentant, la première, le module d'élasticité transversale et la deuxième, l'angle unitaire de torsion. En outre, la fonction F doit prendre une valeur constante, que l'on peut supposer nulle, sur le contour $f(y, z) = 0$ de la section. On a donc, sur tout ce contour, la condition

$$(3) \qquad F = 0.$$

Envisageons d'autre part un tube rectiligne qui aurait précisément la même section normale que la tige tordue et qui serait plein d'un liquide coulant par filets rectilignes et parallèles, sous l'effort d'une pression constante.

Prenons les axes de coordonnées comme dans le cas du prisme tordu et désignons par V la vitesse du liquide. Cette vitesse ne dépendra pas de la variable x, elle sera fonction d'y et de z seulement.

Détachons dans le liquide remplissant le tube un élément de volume $dxdydz$ en forme de parallélépipède à arêtes parallèles aux axes de coordonnées. Sur sa face $dxdy$ la plus voisine de l'origine des coordonnées, cet élément sera sollicité par une force de frottement parallèle à l'axe du tube et égale à

$$-\varepsilon\, dx\, dy \frac{\partial V}{\partial z},$$

ε étant le coefficient de frottement intérieur du liquide, coefficient qui ne dépend que de la nature de celui-ci. Sur sa face opposée à celle que nous venons de considérer, l'élément est sollicité par la force

$$\varepsilon\, dx\, dy \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dz\right).$$

De même, sur ses deux autres faces parallèles à l'axe du tube, l'élément est sollicité par les forces

$$-\varepsilon\, dx\, dz \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad \varepsilon\, dx\, dz \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy\right).$$

Supposons que le mouvement du fluide soit devenu uniforme. Les forces qui agissent sur un filet liquide de base $dydz$ et de longueur unité dans le sens de l'axe du tube sont les forces indiquées précédemment, avec $dx = 1$ et en outre la force $\rho g I\, dy\, dz$, ρ étant la densité du liquide, I la pente motrice et g l'accélération de la pesanteur. En écrivant que la somme des projections de ces forces sur l'axe des x est nulle, puisque ces forces se font équilibre, on obtient l'équation

$$(2\ bis) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{d^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho g I}{\varepsilon} = -K', \text{ en posant } K' = \frac{\rho g I}{\varepsilon}.$$

Dans le cas où le liquide mouille le tube, on aura en outre, sur tout le contour $f(x, y) = 0$ de la section la condition

$$(3\ bis) \qquad V = 0.$$

Si l'on rapproche les équations (2 *bis*) et (3 *bis*) des équations (2) et (3), on voit que les deux problèmes de trouver la fonction F dans le cas du prisme tordu ou de trouver la vitesse V du liquide dans le tube sont analogues.

IV. — L'analogie des deux problèmes étant ainsi démontrée, nous allons d'abord étudier le problème de l'écoulement du liquide dans le tube, problème dont la solution est la plus intuitive, puis nous « traduirons » les résultats obtenus pour les appliquer au problème de la torsion.

V. — Considérons donc, dans le tube, les courbes d'égale vitesse. Chacune de ces courbes dont l'équation est $V =$ *Constante* est composée d'un ou de plusieurs orbes fermés et elle enveloppe toutes les courbes suivantes pour lesquelles V va en croissant. Ces courbes vont du contour extérieur du tube, qui est la courbe de vitesse $V = 0$, jusqu'à la courbe la plus centrale, réduite à un ou plusieurs points, sur laquelle V atteint sa plus grande valeur.

Partons du point (y, z) de la courbe $V =$ *Constante* et menons la normale en ce point du côté des vitesses croissantes. Les cosinus des angles que fait cette normale avec les axes y et z ont pour expression

$$\frac{\dfrac{\partial V}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\dfrac{\partial V}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2}}.$$

Appelons dn l'élément de cette normale qui mesure la distance de la courbe $V =$ *Constante* à la courbe voisine où la constante a la valeur $V + dV$ et

$$dy = \frac{dn \dfrac{\partial V}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2}}, \quad dz = \frac{dn \dfrac{\partial V}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2}}$$

les projections de dn sur les axes y et z. On aura,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \frac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} dn$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}\, dn,$$

et enfin

$$(4) \qquad \frac{dV}{dn} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}.$$

Cette dérivée, suivant la normale à la courbe $V =$ *Constante* mesure, dans le tube, le glissement relatif de deux couches liquides adjacentes.

Calculons encore le débit Q d'un tube de forme donnée et dont la section droite a l'aire σ, c'est-à-dire le volume du fluide qui traverse ce tube pendant l'unité de temps. Pour cela, considérons d'abord un deuxième tube, coaxial au premier, de section droite homothétique à la section de ce deuxième tube, mais dont l'aire soit égale à l'unité. Appelons η et ζ les coordonnées du point de ce deuxième tube qui est homothétique au point (y, z) du premier. Posons

$$y = \eta\sqrt{\sigma}, \quad z = \zeta\sqrt{\sigma}.$$

L'équation (2 *bis*) qui peut s'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\varepsilon V}{\rho g I}\right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{\varepsilon V}{\rho g I}\right] + 1 = 0$$

devient

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{\varepsilon V}{\rho g I \sigma}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(\frac{\varepsilon V}{\rho g I \sigma}\right) + 1 = 0$$

car on a

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\partial V}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2},$$

et de même,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}.$$

La condition au contour s'écrit $\frac{\varepsilon V}{\rho g I \sigma} = 0$. Il en résulte que pour tous les tubes à sections homothétiques, l'expression $\frac{\varepsilon V}{\rho g I \sigma}$ est une même fonction de η et de ζ, ce que l'on peut exprimer par la relation

$$V = \frac{\rho g I \sigma}{\varepsilon} \varphi \left(\frac{y}{\sqrt{\sigma}}, \frac{z}{\sqrt{\sigma}} \right) \tag{5}$$

où $\varphi \left(\frac{y}{\sqrt{\sigma}}, \frac{z}{\sqrt{\sigma}} \right)$ est une fonction caractéristique de la forme de la section.

Dans ces conditions, le débit Q du tube est donné par l'expression

$$\varphi = \iint_\sigma V \, dy \, dz = \frac{\rho g I \sigma}{\varepsilon} \iint_\sigma \varphi \left(\frac{y}{\sqrt{\sigma}}, \frac{z}{\sqrt{\sigma}} \right) dy \, dz \tag{6}$$

$$= \frac{\rho g I \sigma^2}{\varepsilon} \iint \varphi(\eta, \zeta) \, d\eta \, d\zeta .$$

Cette dernière intégrale double, étendue à l'aire du tube de forme donnée et de section unité a une valeur numérique qui ne dépend que de la forme de cette section. Appelons k cette valeur numérique constante qui est caractéristique de la forme du tube. On aura

$$Q = k \frac{\rho g I}{\varepsilon} \sigma^2 = k \, . \, K' \, . \, \sigma^2 . \tag{7}$$

VI. — Voyons maintenant comment les résultats qui précèdent, obtenus pour le tube dans lequel coule le liquide, se traduisent dans le cas de la tige sollicitée à la torsion. Envisageons d'abord les courbes $F =$ *Constante* qui correspondent aux courbes d'égale vitesse dans le tube. Par un calcul tout semblable à celui qui conduit à la relation (4), on trouve

$$\frac{dF}{dn} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} .$$

Mais, d'après les relations (1), on a

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} .$$

Or, cette dernière expression est celle de la tension spécifique de torsion τ. On a donc $\frac{dF}{dn} = \tau$.

D'autre part, la normale au point (y, z) de la courbe $F =$ *Constante* fait avec les axes de coordonnées des angles dont les cosinus sont

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} , \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}} .$$

Si l'on tient compte encore des relations (1), on voit que cette normale est perpendiculaire à la force τ de composantes

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial F}{\partial z} , \quad \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} .$$

Les courbes $F =$ *Constante* sont donc des courbes isostatiques. On est ainsi conduit aux conclusions suivantes :

Les tensions spécifiques tangentielles de torsion τ qui s'exercent aux divers points d'une section d'un prisme tordu sont partout dirigées suivant les courbes $F =$ *Constante* qui sont ainsi des courbes isostatiques. Ces courbes isostatiques sont identiques aux courbes d'égale vitesse dans le tube de même section que le prisme. En outre, les tensions τ sont, en chaque point de ces courbes isostatiques, égales à la dérivée de F suivant la normale à ces courbes. Elles ont ainsi la même expression que le glissement relatif de deux couches liquides adjacentes, au même point du tube correspondant.

En se servant de cette analogie hydrodynamique, on peut facilement prévoir quelle sera la forme des courbes isostatiques $F =$ *Constante* dans la section d'un prisme tordu. En partant du contour de la section, dont l'équation est $F = 0$, ces courbes en reproduisent les irrégularités, mais en les affaiblissant de plus en plus, de manière à être le plus distantes les unes des autres aux points situés sur les grands diamètres des sections et à être le plus rapprochées à ceux situés sur les petits diamètres. D'après la relation $\frac{dF}{dn} = \tau$, aux divers points d'une courbe isostatique, τ varie en raison inverse de la distance dn de cette courbe à sa voisine. Les valeurs maxima, de τ auront donc lieu en général sur les petits diamètres des sections et ses valeurs minima sur les grands diamètres. D'ailleurs, τ sera en moyenne d'autant plus grande qu'on s'éloignera davantage des points centraux des sections, points où τ est nulle et où F est maximum. La tension τ atteindra donc en général ses plus grandes valeurs aux points du contour les plus rapprochés des points centraux où elle est nulle et où la vitesse V serait la plus grande s'il s'agissait de l'écoulement d'un liquide dans le tube ayant la même forme que le prisme tordu.

Il sera possible ainsi de prévoir intuitivement quelle sera la répartition des tensions τ dans les sections des tiges prismatiques de forme quelconque, circulaire, elliptique, rectangulaire, triangulaire, etc., etc.

Cherchons encore l'expression du moment de torsion M dans une tige tordue. On sait que

$$M = \iint_\sigma (z \tau_{xy} - y \tau_{xz}) \, dy \, dz ,$$

ce qui s'écrit en tenant compte des relations (1)

$$M = -\iint_\sigma \left(y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} \right) dy \, dz .$$

En intégrant par parties,

$$\iint_\sigma y \frac{\partial F}{\partial y} dy \, dz = \int dz \int \frac{\partial}{\partial y} (yF) \, dy - \iint_\sigma F \, dy \, dz = -\iint_\sigma F \, dy \, dz ,$$

car, sur tout le contour, F est nulle. On a de la même manière,

$$\iint_\sigma z \frac{\partial F}{\partial z} dy \, dz = -\iint F \, dy \, dz$$

et, par suite, l'expression finale de M est

$$M = 2\iint_\sigma F dy dz.$$

La comparaison avec (6) montre immédiatement que la valeur numérique du moment de torsion sera proportionnelle à celle du débit du tube correspondant à la tige tordue.

Si l'on pose $K = 2G\theta$, un calcul identique à celui de la fin du § 5 montre que l'on peut écrire $M = 2kK\sigma^2$, σ étant toujours l'aire de la section du prisme tordu et k ayant la même valeur pour ce prisme que la constante k relative au tube de même section.

Souvent, en Résistance des Matériaux, on pose $\theta = \frac{M}{GJ}$, J étant une grandeur que l'on peut appeler le module de résistance du prisme à la torsion (*Drillungswiderstand* des Allemands), grandeur qui mesure la résistance d'une tige à la torsion, en tant que cette résistance dépend des dimensions et de la forme de la tige.

Nous venons de voir que $M = 2k \,.\, 2G\theta \,.\, \sigma^2$.

Par suite

$$\theta = \frac{4Gk\sigma^2}{M}$$

et l'on a

$$J = 4k\sigma^2.$$

Dans ces conditions, la constante k sera caractéristique de la résistance à la torsion d'une tige ayant une section de forme donnée et nous pourrons l'appeler la constante de torsion caractéristique de la forme de section considérée.

On conçoit, d'après ce qui précède, qu'il serait possible de déterminer expérimentalement la constante de torsion caractéristique d'une forme de section donnée par la simple mesure du débit d'un tube long et fin, bien calibré et ayant une section de même forme.

Et même, sans faire aucune détermination expérimentale, la relation qui existe entre le débit d'un tube et le moment de torsion d'une tige de même forme permet de prévoir certains résultats importants pour la torsion des tiges de section en

L, ⊥, ┼, ⊏, ⅂, I,

tiges formées par la réunion de rectangles étroits et allongés. Il est clair que pour des tubes dont la section normale aurait cette forme, le débit devrait être de très peu supérieur à la somme des débits des tubes rectangulaires dont la juxtaposition forme le tube considéré.

En appelant Q le débit total de ce dernier tube, Q_i le débit du tube dont la section est le rectangle i, k et k_i les constantes de torsion des tiges correspondantes, σ et σ_i les aires de ces tubes, on aura avec une grande approximation

$$Q = Kk\sigma^2 = \sum_i Q_i = \sum_i Kk_i\sigma_i^2$$

et par suite

$$k\sigma^2 = \sum_i k_i\sigma_i^2.$$

Si alors J est le module de résistance à la torsion de la tige qui correspond au tube donné, J_i celui de la tige ayant pour section le rectangle i, on aura

$$J = 4k\sigma^2 = 4\sum_i k_i\sigma_i^2,$$

c'est-à-dire

$$J = \sum_i J_i = J_1 + J_2 + \ldots$$

Le module de résistance de la section totale sera à très peu de chose près égal à la somme des modules de résistance des tiges rectangulaires dont la réunion constitue la section considérée. L'approximation sera d'autant plus grande que ces rectangles seront plus étroits et plus allongés.

VII. — Les valeurs numériques de la constante k ont été calculées avec une grande précision par divers auteurs, tout spécialement à propos du problème de l'écoulement bien continu des liquides dans les tubes. Ces valeurs de k sont les mêmes pour les tiges sollicitées à la torsion simple et nous allons indiquer pour terminer celles qui résultent des travaux les plus récents.

Rappelons qu'il suffit de multiplier k par $4\sigma^2$ pour obtenir J, le module de résistance de la section correspondante et que l'on a en outre $\theta = \frac{M}{GJ}$, θ étant l'angle unitaire de torsion, M le moment de torsion et G le cœfficient d'élasticité transversale.

Voici d'abord les valeurs de k pour les sections où elles sont données par une expression simple sous forme finie :

$$\textit{Cercle}: k = \frac{1}{8\pi} = 0{,}0398\,,$$

$$\textit{Triangle équilatéral}: k = \frac{1}{20\sqrt{3}} = 0{,}0289,$$

Ellipse de demi-axes a et b : $k = \dfrac{1}{4\pi\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)} = \dfrac{0{,}0796}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}$.

Pour toutes les autres formes de sections, on ne connaît pour k que des expressions sous forme de séries. Nous indiquons ci-après les valeurs approchées de k avec trois chiffres significatifs exacts pour les *polygones réguliers de 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 et 15 côtés :*

$k_{4\,(\text{carré})} = 0{,}0352$, $k_5 = 0{,}0372$, $k_{6\,(\text{hexagone régul.})} = 0{,}0382$
$k_7 = 0{,}0387$, $k_8 = 0{,}0391$, $k_9 = 0{,}0392$,
$k_{10} = 0{,}0393$, $k_{12} = 0{,}0395$, $k_{15} = 0{,}0396$.

(Voir au sujet de ces polygones réguliers, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, T. 179, 1924, p. 451 et suivantes).

Pour ces polygones réguliers, M. Boussinesq (*Comptes Rendus*, T. 158, p. 1846 et suiv. et *Annales Scientifiques de l'Ecole normale*, 1915) a donné l'expression approchée suivante de k :

$$k = \frac{0{,}0704}{\sqrt{m \operatorname{tang} \frac{\pi}{m}}},$$

m étant le nombre de côtés du polygone. L'erreur relative des valeurs de k calculée au moyen de l'expression précédente ne dépasse pas 3 pour 100 dans le cas du carré ($m = 4$) et elle diminue quand m augmente.

Enfin, pour le *triangle rectangle isocèle*, $k = 0{,}0257$. (*Comptes Rendus*, T. 179, 1824, p. 379 et suiv.)

Le cas du rectangle a une importance particulière. Pour ce cas, la valeur de k a été indiquée par de *Saint Venant* sous forme d'une série simple de tangentes hyperboliques.

En utilisant une méthode de calcul qui est due à notre compatriote *Walter Ritz*, on peut donner aussi de k une expression curieuse, sous forme de série double assez rapidement convergente. Voici cette expression, a et b étant les demi-côtés du rectangle :

$$(8) \qquad k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum_{m=1,3,5\ldots} \sum_{n=1,3,5\ldots} \frac{1}{m^2 n^2 \left(\frac{b}{a} m^2 + \frac{a}{b} n^2\right)},$$

Cette expression permet le calcul de k sans nécessiter l'emploi de tables de fonctions hyperboliques.

Pour le cas particulier du carré, l'expression (8) se réduit à

$$k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum_{m=1,3,5\ldots} \sum_{n=1,3,5\ldots} \frac{1}{m^2 n^2 (m^2 + n^2)}$$

(*Comptes Rendus*, T. 158, 1914, p. 1743).

La valeur de k avec cinq chiffres significatifs exacts est, pour le carré, $k = 0{,}035166$, ce qui donne, a étant le côté du carré, $J = 2{,}2506\,a^2$ au lieu de $J = 2{,}281\,a^2$, valeur donnée par *Föppl*, dans *Drang und Zwang*, T. 2, p. 141.

Dans le cas où a est grand par rapport à b, on peut négliger $\frac{b}{a}$ devant $\frac{a}{b}$ dans (8) et il vient alors pour k l'expression suivante, approchée par excès et qui n'est rigoureuse que pour $\frac{a}{b} = \infty$,

$$k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{m^2 n^2 \left(\frac{a}{b} n^2\right)}.$$

Si l'on remarque que

$$\frac{\pi}{8} = \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

et que

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{(2n-1)^6},$$

il vient pour k, dans ce cas, l'expression

$$k = \frac{b}{a}\frac{1}{12} \quad \text{et} \quad J = \frac{16}{3} ab^3.$$

Alors, en utilisant les remarques faites à la fin du § 6, on voit que pour les sections formées par la juxtaposition de rectangles étroits et allongés, ⊏, I, etc., etc., on aura

$$(9) \qquad J = \frac{16}{3} \sum_i a_i b_i^3$$

$2a$ et $2b$ étant respectivement le grand et le petit côté s du rectangle i.

Föppl, en 1921, a fait des essais destinés à donner une idée de l'exactitude de la formule (9). L'expérience lui a montré qu'on devait prendre pour J l'expression

$$(9) \qquad J = \frac{16}{3} \mu \sum_i a_i b_i^3,$$

où le cœfficient μ a les valeurs que voici pour les types de fers que nous indiquons ci-après :

			μ
Cornières à ailes égales		Nos 5-12	1,03
Cornières à ailes inégales		Nos 4/8-8/12	0,99
Fers en **U**,	P. N.	Nos 8-30	1,12
Fers en **T**			1,13
Fers en double **T**,	P. N.	Nos 10-30	1,31
Fers en double **T**,	Differdange	Nos 16-24	1,29.

Il faut remarquer à ce propos combien la résistance à la torsion de ces types de fers, tout spécialement celle des fers en **U** et des fers en double **T** est faible si on la compare à leur résistance à la flexion. On doit se garder de négliger, sans une étude spéciale, pour ces fers, l'effet d'un couple de torsion, même si celui-ci est très faible quand on le compare au moment fléchissant auquel ces fers sont susceptibles de résister normalement.

Considérations sur le développement récent de la production et de la distribution de l'énergie électrique en Suisse.

L'Association suisse des Electriciens avait organisé, les 2 et 3 avril dernier, sous la présidence de M. Ringwald, directeur des Central-Schweizer Kraftwerke, à Lucerne, et président de l'Union des Centrales suisses d'électricité, des séances de discussion, au cours desquelles de très remarquables communications et rapports ont été lus et discutés.

Le premier de ces rapports, intitulé « Considérations de nature économique et enseignements découlant du développement récent de notre production d'énergie électrique », avait pour auteur M. le Dr *B. Bauer*, directeur de la Société suisse pour le transport et la distribution d'énergie électrique, à Berne.

Comparant, à l'aide de statistiques, l'approvisionnement en énergie électrique des pays voisins de la Suisse avec celui de la Suisse même, M. Bauer dresse le tableau suivant qui se rapporte à l'année 1922/23.

Puissance installée	Allemagne	France	Italie	Suisse
Hydraulique, millions de KW	0.27	0.88	1.2	0.64
Thermique » » »	2.71	1.32	0.40	0.06
TOTALE	2.98	2.20	1.60	0.70
Par habitant	49 watts	56 watts	42 watts	179 watts

M. Bauer, estimant que la production d'énergie rapportée au kilomètre carré de territoire desservi est une mesure plus adéquate de la densité de l'approvisionnement, a dressé une