Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 55 (1929)
Heft: 16

Artikel: Remarques sur la résolution de quelques problèmes d'échange de titres
Autor: Chuard, Jules
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42672

55e année 10 août 1929 N° 16

BULLETIN TECHNIQUE

Réd. : Dr H. Demierre, ing. **DE LA SUISSE ROMANDE** Paraissant tous les 15 jours

ORGANE DE PUBLICATION DE LA COMMISSION CENTRALE POUR LA NAVIGATION DU RHIN

ORGANE DE L'ASSOCIATION SUISSE D'HYGIÈNE ET DE TECHNIQUE URBAINES

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

ARITHMÉTIQUE FINANCIÈRE

Remarques sur la résolution de quelques problèmes d'échange de titres,

par M. le Dr JULES CHUARD, professeur à l'Université de Lausanne.

Il y a, en général, deux façons bien distinctes de résoudre un problème de mathématiques financières. L'une d'elles, la plus connue, est un procédé rapide, approximatif, très souvent utilisé dans les banques à cause de sa simplicité. La seconde façon, d'un caractère plutôt théorique, est un procédé exact qui tient compte de la capitalisation des intérêts, et qui nécessite l'emploi de tables financières. Ce procédé seul est rationnel et doit être employé lorsqu'on désire obtenir la solution très précise d'un problème déterminé. Mais bien souvent on peut se contenter du résultat fourni par la première méthode que l'on est en droit de regarder comme une approximation assez bonne de la quantité cherchée. Mais il ne viendra à l'idée d'aucune personne avertie d'utiliser l'un et l'autre de ces procédés au cours d'un même calcul. Les formules obtenues ainsi seraient en effet boiteuses. Elles ne posséderaient pas la simplicité des unes et manqueraient de la rigueur des autres.

Peut-être n'est-il pas superflu de rappeler brièvement les caractères de ces deux procédés. Dans ce but nous résoudrons le problème suivant :

On achète au prix de 850 fr. une obligation de 1000 fr. à 4 %, remboursable dans 15 ans. A quel taux place-t-on son argent ?

Procédé empirique. On calcule tout d'abord un taux brut en remarquant que l'on retire chaque année un intérêt de 40 fr. alors que l'on a déboursé 850 fr. ; cela représente un taux de 4,70 %. D'autre part on retirera 1000 fr. dans 15 ans. La différence 1000 — 850 = 150 représente une prime au remboursement que l'on convient de répartir uniformément sur la durée des 15 ans, ce qui donne 10 fr. par an (pour un capital nominal de 1000 fr.) soit 1 %. Le taux auquel on a ainsi placé son argent se monte à 5,70 %.

L'erreur commise, on le voit tout de suite, provient de la répartition uniforme entre les 15 ans d'existence du titre, de la prime au remboursement.

Procédé théorique. Le raisonnement à suivre est complètement différent. Rappelons tout d'abord que si i est le taux de l'intérêt, soit l'intérêt de 1 fr. pendant un an, la quantité $u = 1 + i$ est la valeur acquise par 1 fr. à la fin de l'année et par suite son inverse $v = \frac{1}{u}$ est la somme qu'il faut placer aujourd'hui, au taux i, pour obtenir 1 fr. dans un an. Plus généralement v^n est la somme qu'il faut placer aujourd'hui pour obtenir, grâce au jeu des capitalisations successives, la valeur de 1 fr. dans n années. Supposons encore que l'on verse 1 fr. à la fin de chaque année, pendant n années consécutives. On constitue ainsi une rente temporaire dont il est aisé de calculer soit la valeur initiale, soit la valeur finale. La première est une valeur d'escompte à intérêts composés, tandis que l'autre est une valeur de capitalisation. Ce sont toutes deux les sommes des termes de progressions géométriques que les actuaires représentent par les symboles $a_{\overline{n}|}$ et $s_{\overline{n}|}$. Des tables financières ont été construites de façon à fournir ces valeurs pour des taux compris entre le 1 et le 10 % et des durées variant entre 1 et 100 ans.

Ceci dit, revenons au problème envisagé. Le montant de 850 fr. est le prix actuel du titre. Il est l'équivalent de la somme des valeurs actuelles des engagements du débiteur. Or ces engagements sont constitués par les intérêts annuels et le capital que l'on remboursera dans 15 ans. Les premiers forment une rente dont la valeur actuelle est $40\, a_{\overline{n}|}$. La valeur actuelle du second est $1000\, v^n$. Il en résulte l'équation

$$850 = 40\, a_{\overline{n}|} + 1000\, v^n$$

dans laquelle l'inconnue est précisément le taux cherché. On la résoud rapidement à l'aide d'une table financière, celle de Pereire, par exemple. On obtient alors le taux 5,50 %.

Pour ne pas allonger, nous renverrons les personnes curieuses de se documenter sur ces questions, aux articles que nous avons publiés dans la « Revue suisse des Sciences commerciales », Nos 3 et 4, 1929. Nous remarquerons seulement que lorsqu'il s'agit d'effectuer un calcul rationnel, la question de la prime au remboursement ne se pose pas.

Ces notions préliminaires étant admises, examinons les problèmes que M. de Cerjat a traités dans ce *Bulletin technique* (Nos 8, 9 et 10, 1929). Voici l'énoncé du premier :

Recherche du prix d'échange d'une valeur à revenu fixe contre une autre valeur semblable portant intérêt différent et ayant une autre échéance de remboursement, si l'on admet que l'échange ne porte aucun préjudice aux revenus du porteur, pendant la durée moyenne de vie de la valeur échangée.

Nous ne voulons pas insister sur le peu de clarté de cet énoncé. Disons simplement que l'auteur aurait dû définir le sens des termes *durée moyenne de vie.* Il aurait évité une confusion entre la vie moyenne des titres d'un emprunt et l'échéance moyenne des sommes consacrées à l'amortissement de cet emprunt, notions qui sont bien différentes l'une de l'autre.

Nous insistons par contre, et ceci tout spécialement, sur la manière de résoudre ce problème. Il est fait usage de la méthode empirique dans le calcul des revenus afférents au titre cédé, ainsi que dans celui de l'intérêt fixe du titre reçu. L'annuité correspondant à la prime au remboursement est par contre capitalisée à un taux t. Ce taux d'ailleurs est choisi d'une façon arbitraire. Tout devient arbitraire.

M. de Cerjat ne devait pas introduire ce taux. Il devait appliquer la méthode empirique jusqu'au bout. Constatant que le revenu supplémentaire dû à la prime au remboursement était égal à $(A_2 - B_2)X / B_2$ au bout de n_2 années, ce revenu devenait au bout de n_1 années égal à $(A_2 - B_2)Xn_1 / B_2 n_2$. Et l'on était conduit à la formule

$$X = \frac{A_1 B_2 n_2 (1 + n_1 i_1)}{A_2 n_1 (1 + n_2 i_2) + B_2 (n_2 - n_1)} \tag{1}$$

utilisable par le premier calculateur venu.

Un procédé identique s'applique au second problème de M. de Cerjat, problème dont voici l'énoncé :

Recherche du prix d'échange d'une valeur à revenu fixe contre une valeur semblable portant intérêt différent et ayant une autre échéance de remboursement, si l'on admet que l'échange ne porte aucun préjudice aux revenus annuels du porteur.

Les revenus afférents au titre cédé comprennent :

a) L'intérêt fixe, soit $A_1 i_1$.

b) La part de la prime au remboursement, soit $(A_1 - X) / n_1$.

Les revenus afférents au titre reçu comprennent :

a) L'intérêt fixe, soit $i_2 A_2 X / B_2$.

b) La part de la prime au remboursement, soit $(A_2 - B_2) X / B_2 n_2$

et en égalant les expressions des deux revenus, on retrouve identiquement la formule (1).

Cela signifie simplement que ces deux problèmes ne sont différents que dans l'imagination de M. de Cerjat. Les résultats qu'il obtient ne sauraient être considérés comme exacts. Du fait qu'ils sont pour une bonne part basés sur la méthode empirique, ils ne peuvent être qu'approximatifs. Et nous ne connaissons même pas le degré de l'approximation.

Mais il est un autre point que l'on ne saurait passer sous silence. L'intérêt annuel d'un titre cédé est égal à $A_1 i_1$. C'est là une somme que l'on reçoit périodiquement et qui constitue une rente temporaire. Or la valeur initiale d'une telle rente n'est jamais égale à $A_1 i_1 n_1$. Et pourtant si l'on désire étayer solidement un raisonnement il faut partir d'une valeur payable à une époque déterminée. C'est ce qui n'est pas le cas ici. Rien d'étonnant après cela que l'on soit conduit à des résultats erronés. Enfin le taux t lui aussi paraît dépendre du bon vouloir du calculateur.

Des opérations de cette nature ne sauraient convenir à un banquier qui utilise soit des tables, soit des formules beaucoup plus simples. Elles satisfont encore moins un mathématicien, étant donné leur manque de logique. Voici en effet comment raisonnerait un mathématicien :

L'on achète au cours B_2 un titre remboursable par A_2 dans n_2 années, le taux nominal étant i_2, il en résulte l'équation

$$B_2 = A_2 (i_2 a_{\overline{n_2|}} + v^{n_2})$$

dans laquelle le taux auquel sont calculées les quantités $a_{\overline{n_2|}}$ et v^{n_2} est inconnu. C'est le taux de placement de l'argent pour des titres de cette nature. C'est, autrement dit, le taux t.

Soit X le prix d'un titre dont le nominal est A_1, qui est remboursable dans n_1 années, et dont les intérêts annuels se calculent au taux i_1 ; ce prix est fourni par une équation analogue à la précédente :

$$X = A_1 (i_1 a_{\overline{n_1|}} + v^{n_1})$$

les quantités $a_{\overline{n_1|}}$ et v^{n_1} étant ici calculées au taux t.

C'est là le véritable prix du titre cédé et il n'y a pas lieu de se demander si *l'échange ne porte aucun préjudice aux revenus annuels du porteur* ou à ses *revenus pendant la durée moyenne de vie de la valeur échangée.*

Nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire d'insister sur les autres problèmes.

Cours de théorie de l'architecture à l'Ecole polytechnique fédérale,

par A. LAVERRIÈRE

Extrait de la leçon inaugurale.

. . . .

Je dois vous dire, Messieurs, que c'est sans aucune préparation spéciale que je me trouve placé en face d'un enseignement théorique, n'ayant jamais eu jusqu'ici l'occasion, la nécessité, le temps de constituer la matière nécessaire, de la rassembler pour en composer un cours. Mais comme tout praticien, j'ai pu faire un certain nombre de réflexions, un certain nombre d'expériences ; si c'est sur ce bagage que je