Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 55 (1929)

Heft: 21

Artikel: Sur l'échéance moyenne de certaines Rentes temporaires: emprunts amortissables

Autor: Chuard, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42684

55e année — 19 octobre 1929 — N° 21

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Réd. : Dr H. Demierre, ing. — Paraissant tous les 15 jours

ORGANE DE PUBLICATION DE LA COMMISSION CENTRALE POUR LA NAVIGATION DU RHIN
ORGANE DE L'ASSOCIATION SUISSE D'HYGIÈNE ET DE TECHNIQUE URBAINES
ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

Sur l'échéance moyenne de certaines Rentes temporaires. Emprunts amortissables.

Par M. le Dr J. CHUARD, professeur à l'Université de Lausanne.

On sait qu'en science financière, on nomme *Rente*, une suite de payements effectués à des intervalles de temps égaux. Chaque payement est un *terme de la Rente*. Si tous les termes ont une commune valeur, la Rente est dite *à terme constant* ; dans les autres cas, elle est dite *à terme variable*. La Rente est *temporaire* si le nombre de ses termes a été préalablement fixé.

La durée qui sépare les payements de deux termes consécutifs est connue sous le nom de *période*. En pratique, une période est égale tantôt à un an, tantôt à un semestre voire même à un trimestre. La période joue un rôle important. Les considérations qui vont suivre sont indépendantes de sa grandeur.

Nous représenterons le taux de l'intérêt par la lettre i, étant bien entendu que la quantité i est l'intérêt rapporté par un franc pendant une période. Enfin nous ferons usage de la notation universelle des actuaires et écrirons par exemple :

$u = 1 + i$ (Valeur acquise par l'unité de capital, placée durant une période au taux i.)

$v = \frac{1}{u}$ (Valeur qu'il faut placer actuellement pour obtenir l'unité de capital dans une période).

$s_{\overline{p|}} = 1 + u + u^2 + \ldots + u^{p-1}$ (valeur finale d'une Rente de p termes égaux à l'unité, payables à terme échu).

$a_{\overline{p|}} = v + v^2 + v^3 + \ldots + v^p$ (valeur initiale de la même Rente).

Pour évaluer une Rente à une époque déterminée, par ailleurs arbitrairement choisie, il faut tenir compte des intérêts composés des termes échus, et escompter dans les mêmes conditions les termes qui restent à payer.

On nomme *époque initiale* d'une Rente, le début de la période à la fin de laquelle s'effectue le payement du premier terme.

Si l'on désigne par $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$ les termes successifs d'une Rente que nous supposons en nombre égal à p, il est aisé de voir que la valeur initiale de cette Rente est égale à

$$A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3 + \ldots\ldots + A_p v^p$$

Désignons encore par S la somme des valeurs nominales des différents termes

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_p$$

L'*échéance moyenne* des termes d'une Rente est une époque à laquelle il faudrait effectuer un payement unique d'un montant égal à S, en lieu et place des p payements $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$, sans qu'il y ait ni gain ni perte pour le ou les bénéficiaires de la Rente.

Dans ces évaluations, on tient compte bien entendu, des escomptes ou des intérêts composés qui entrent en jeu.

Désignons par n le nombre de périodes qui séparent l'époque initiale de l'échéance moyenne. La valeur initiale de la somme S, supposée payable à l'échéance moyenne, est égale à $S\,v^n$. Le nombre n est ainsi défini par l'égalité

$$S\,v^n = A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3 + \ldots + A_p v^p \qquad (1)$$

Rentes à terme constant.

Les termes de ces Rentes sont tels que l'on puisse écrire

$$A_1 = A_2 = A_3 = \ldots\ldots = A_p = A$$

Il s'ensuit que

$$S = p\,A$$

L'égalité (1) devient alors

$$pA\,v^n = A\,(v + v^2 + v^3 + \ldots + v^p) = A\,a_{\overline{p|}}$$

soit

$$p\,v^n = a_{\overline{p|}}$$

ou

$$u^n = \frac{p}{a_{\overline{p|}}} \qquad (2)$$

Envisagé d'un point de vue pratique, le problème de la recherche de l'échéance moyenne d'une Rente temporaire à terme constant se résoud entièrement à l'aide de la formule (2). En effet, partant de valeurs de i et p connues, l'on obtient très rapidement la valeur de n en faisant usage des tables financières, celles de Pereire par exemple.

Mais ce qui nous préoccupe d'une façon toute spéciale, c'est de mettre nettement en évidence la relation fonctionnelle qui lie n à p. En d'autres termes nous regardons p comme une quantité ariable, susceptible de prendre toutes les valeurs possibles à partir de un, et recherchons la variation correspondante de n. Pour des raisons que nous justifierons plus loin, nous conviendrons de poser

$$y = \frac{n}{p}$$

et étudierons les propriétés de la fonction $y = f(p)$.

En utilisant les moyens habituels, on démontre aisément que la fonction y est constamment décroissante

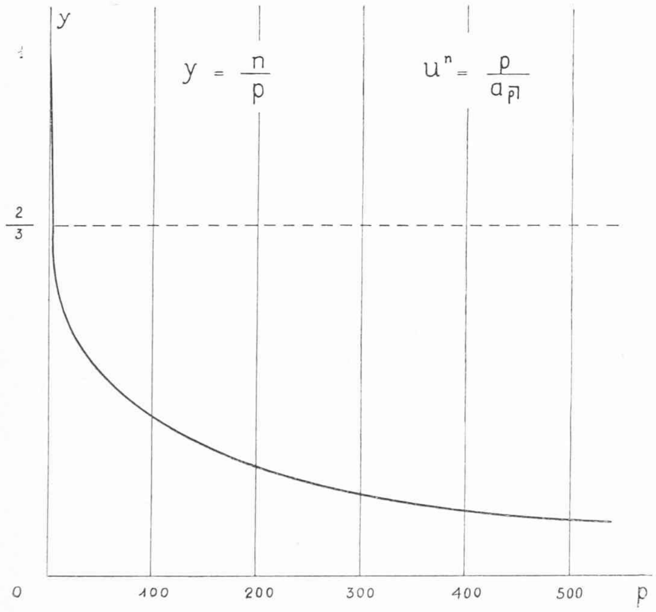

Fig. 1.

lorsque p prend des valeurs de plus en plus grandes. Elle diminue ainsi et tend à se rapprocher de la valeur zéro. D'un autre côté, si l'on donne à p la valeur unité, $a_{\overline{p|}} = 1$, ce qui conduit à la valeur $y = 1$.

Le figure 1 fournit une représentation de cette fonction, le taux choisi étant le 6 %. La courbe tend à se rapprocher de l'axe des p. Elle a cette droite pour asymptote.

Il est clair que si au lieu du taux 6 %, l'on en avait choisi un autre, supérieur ou inférieur à celui-ci, l'allure de la courbe n'en eût pas été affectée ; seule la rapidité de décroissance de la fonction s'en serait trouvée modifiée.

Ainsi à chaque taux correspond une courbe bien déterminée ; ces courbes constituent une famille. Elles partent toutes du point $p = 1$, $y = 1$; puis elles desc ndent constamment pour devenir asymptotiques à l'axe des p. La portion de ces courbes la plus intéressante est certainement celle qui est comprise entre zéro et cent périodes. C'est pourquoi nous donnons ci-après le tableau des valeurs de y correspondant à des taux compris entre le 1 % et le 10 %, les durées étant, elles, comprises entre 5 et 100 périodes. L'on remarque que toutes ces valeurs sont inférieures à 0,60 et qu'elles diminuent rapidement lorsque le taux ou le nombre de périodes, ou ces deux quantités simultanément, augmentent.

Tableau des valeurs indiquant le rapport qui existe entre l'échéance moyenne d'une Rente à terme constant et le nombre des termes de cette Rente.

p	1 %	2 %	4 %	6 %	8 %	10 %
5	0,598	0,596	0,592	0,588	0,584	0,580
10	0,546	0,542	0,534	0,522	0,518	0,511
20	0,517	0,508	0,492	0,477	0,462	0,448
30	0,503	0,492	0,468	0,444	0,424	0,405
40	0,496	0,480	0,449	0,419	0,393	0,369
50	0,489	0,469	0,431	0,396	0,365	0,339
60	0,484	0,459	0,414	0,375	0,342	0,314
70	0,478	0,450	0,399	0,356	0,321	0,292
80	0,473	0,441	0,385	0,338	0,302	0,273
90	0,468	0,433	0,371	0,322	0,285	0,256
100	0,464	0,425	0,358	0,308	0,270	0,242

Rentes à terme variable.

Parmi les Rentes à terme variable, il en est une catégorie dont les applications sont aussi nombreuses qu'importantes. C'est celle dont les termes croissent en progression géométrique de raison u. Nous ne nous occuperons ici que de cette espèce de Rentes.

Les différents termes $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$ ont respectivement pour valeur A, $A\,u$, $A\,u^2$, ..., $A\,u^{p-1}$. Leur somme S vaut donc $S = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_p = A\,(1 + u + u^2 + \ldots + u^{p-1}) = A\,s_{\overline{p|}}$ et si l'on imagine que cette somme est payable au bout de n périodes, sa valeur initiale est égale à

$$S\,v^n = A\,s_{\overline{p|}}\,v^n$$

On remarque, d'autre part, que la valeur initiale de chacun des termes $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$ est égale à $A\,v$ de sorte que la somme de ces valeurs initiales vaut $p\,A\,v$.

L'échéance moyenne des termes de cette Rente est ainsi déterminée par l'équation

$$p\,A\,v = A\,s_{\overline{p|}}\,v^n$$

équivalente à

$$u^{n-1} = \frac{s_{\overline{p|}}}{p} \tag{4}$$

Ici encore, on calcule aisément, à l'aide des tables financières, les valeurs de n qui correspondent à des taux i et à des durées p déterminées. Mais ce qu'il nous importe avant tout de mettre en évidence, ce sont, comme précédemment, les propriétés de la fonction

$$y = \frac{n}{p}$$

Cette étude, un peu moins aisée que celle qui est relative aux Rentes à terme constant, conduit aux résultats suivants : Partant de la valeur $y = 1$ quand $p = 1$, la fonction y diminue tout d'abord, passe par un minimum,

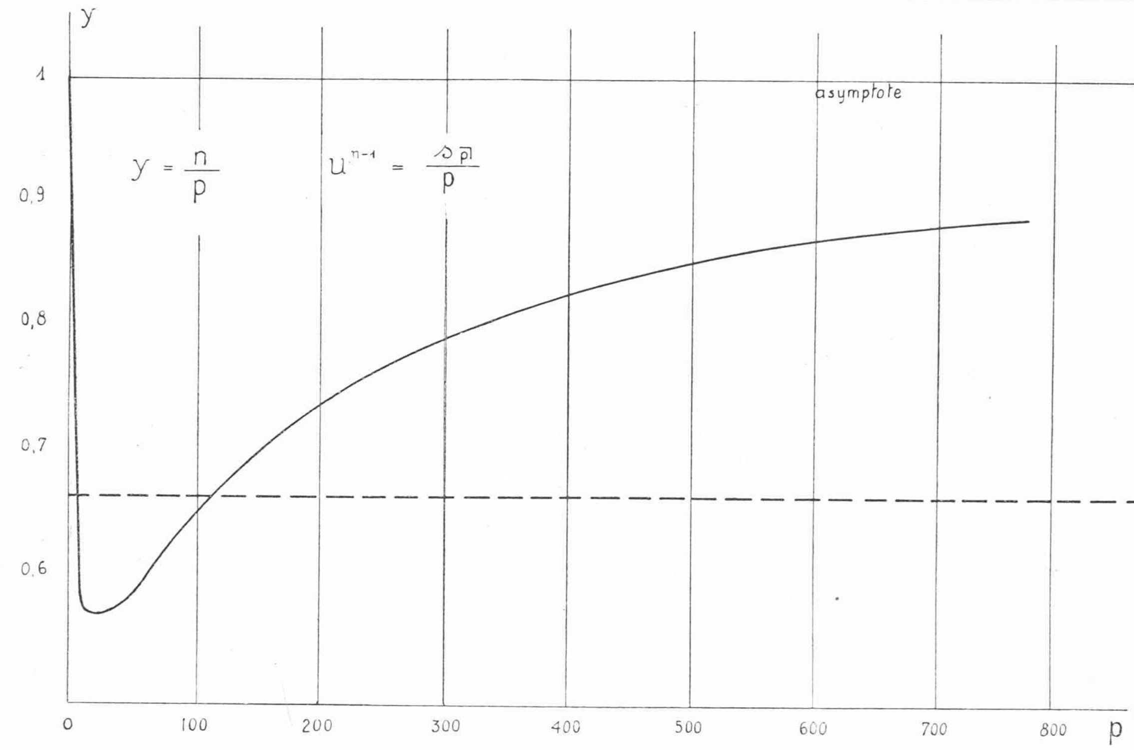

Fig. 2.

puis augmente pour tendre plus ou moins rapidement vers l'unité. Les caractères de cette variation de la fonction y dépendent du taux i. Ainsi pour chaque valeur attribuée à ce taux, on trouve une grandeur et une position du minimum particulières. Nous indiquons figure 2, la courbe représentative de la fonction y lorsque le taux est le 4 %, p variant entre zéro et 800 périodes.

Considérant maintenant un intervalle plus restreint, celui qui est compris entre zéro et cent périodes, nous donnons le tableau de certaines valeurs de la fonction y pour des taux compris entre le 1 % et le 10 %, que nous accompagnons de la représentation graphique correspondante. (Fig. 3.) Il est clair que toutes les courbes ainsi dessinées partent du même point ($p = 1$, $y = 1$), puis après avoir passé par leurs minima respectifs, tendent à se rapprocher de l'horizontale $y = 1$. Cette droite est une asymptote commune à la famille de courbes.

Tableau des valeurs indiquant le rapport qui existe entre l'échéance moyenne de la Rente à terme variable considérée et le nombre des termes de cette Rente.

p	1 %	2 %	3 %	3 ½ %	4 %	4 ½ %	5 %	6 %	8 %	10 %
5	0,602	0,604	0,606	0,607	0,608	0,609	0,610	0,612	0,615	0,619
10	0,554	0,558	0,562	0,564	0,566	0,568	0,570	0,574	0,582	0,589
15	0,539	0,545	0,552	0,555	0,558	0,560	0,564	0,569	0,580	0,592
20	0,531	0,541	0,549	0,553	0,558	0,561	0,565	0,573	0,588	0,602
30	0,529	0,541	0,552	0,559	0,565	0,571	0,576	0,587	0,609	0,628
40	0,529	0,545	0,561	0,569	0,577	0,584	0,591	0,605	0,632	0,655
50	0,531	0,551	0,570	0,580	0,589	0,598	0,607	0,623	0,654	0,681
60	0,533	0,557	0,580	0,591	0,602	0,612	0,623	0,641	0,675	0,703
70	0,536	0,564	0,590	0,603	0,615	0,627	0,638	0,658	0,694	0,723
80	0,539	0,571	0,600	0,614	0,628	0,640	0,652	0,675	0,711	0,740
90	0,543	0,578	0,610	0,625	0,640	0,654	0,666	0,688	0,726	0,755
100	0,546	0,585	0,620	0,636	0,652	0,665	0,679	0,702	0,740	0,768

Si maintenant nous traduisons ces résultats en langage courant, nous sommes amenés à dire que l'échéance moyenne n commence par être voisine de p. Elle s'en écarte de plus en plus au fur et à mesure que p augmente jusqu'à un certain moment où l'écart devient maximum. Dès lors l'écart diminue constamment de telle façon que pour un nombre considérable de périodes, les nombres n et p redeviennent sensiblement égaux. Ce dernier résultat se justifie sans peine si l'on songe que les termes de la Rente considérée constituent une progression géométrique de raison u et que par conséquent, si p est grand, les derniers termes prennent des valeurs considérables, en regard desquelles celles des premiers termes de la Rente apparaissent comme des quantités négligeables.

Emprunts amortissables.

L'idée de préparer l'étude qui précède nous a été suggérée par la lecture des listes de valeurs de placement que publient nos banques. En effet, l'on rencontre fréquemment sur ces listes l'indication d'un rendement calculé *en tenant compte du remboursement du titre au pair, à l'échéance moyenne.* Il s'agit, bien entendu, de titres amortissables. Or cet amortissement est généralement calculé de façon que l'annuité qui assure le service des intérêts et des amortissements soit sensiblement constante. La variation que l'on constate d'une annuité à l'autre provient du fait que l'on ne peut rembourser des fractions d'obligations et que par suite, il est nécessaire d'arrondir en plus ou en moins le nombre des titres amortis. Ces annuités constituent précisément une Rente temporaire à terme constant.

D'un autre côté si dans chaque annuité on distingue la part qui est utilisée au payement des intérêts des

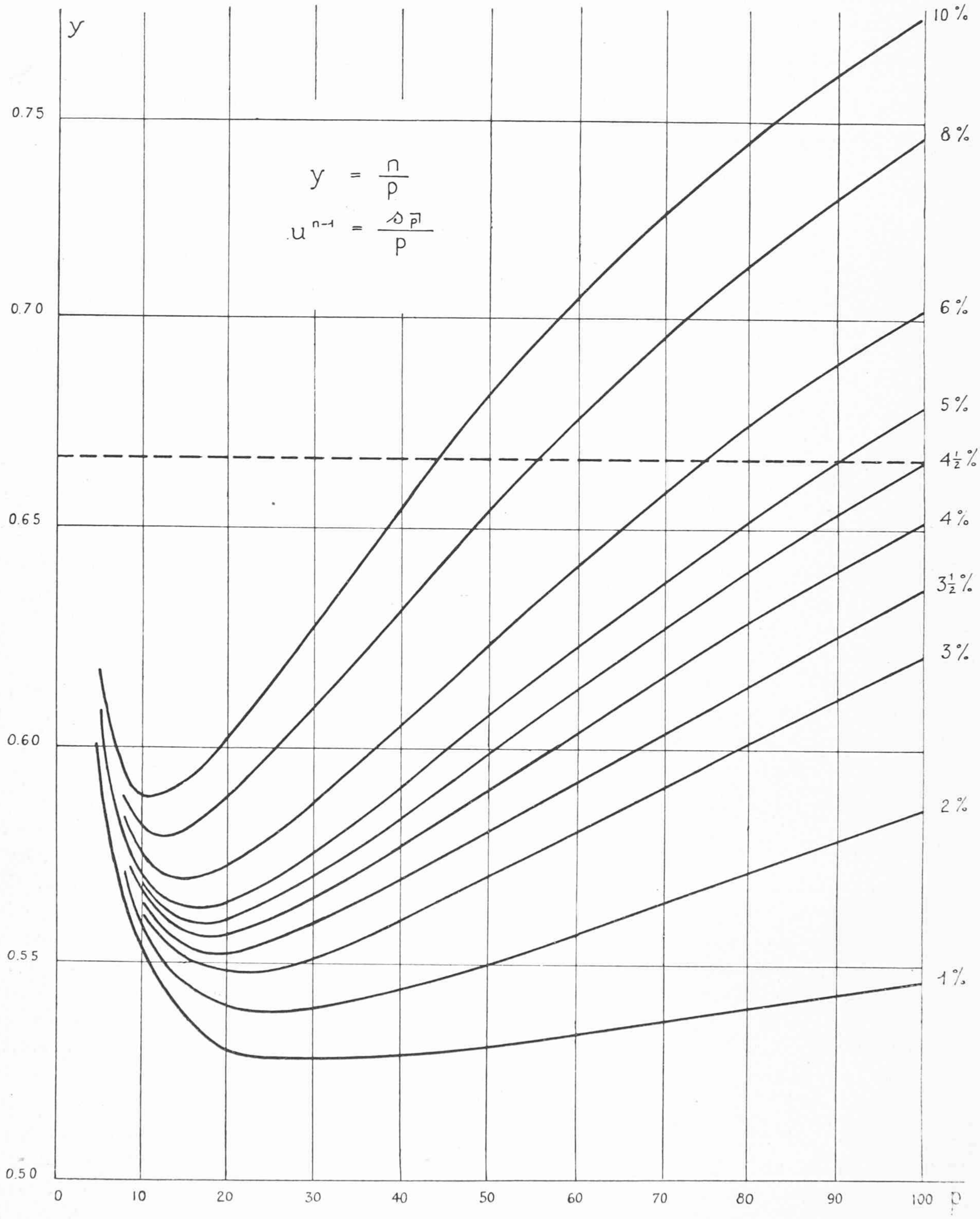

Fig. 3.

titres vivants de celle qui s'en va à l'amortissement, on remarque que la première diminue graduellement, tandis que la seconde augmente. Or cette augmentation n'est pas arbitraire. On démontre au contraire facilement que ces parts croissent comme les termes d'une progression géométrique de raison u. Elles constituent ainsi une Rente temporaire à terme variable de la nature de celles que nous avons étudiées plus haut.

Sans nous préoccuper pour l'instant des répercussions qui peuvent en résulter dans le calcul du rendement, nous avons eu la curiosité de nous renseigner comment, en pratique, se calcule l'échéance moyenne dont il vient d'être question. Nous avons alors appris que le procédé est fort simple, et qu'en particulier, il est indépendant du taux. L'échéance moyenne correspond aux deux tiers du temps durant lequel se fait l'amortissement. En d'autres termes, si l'on revient à nos notations antérieures,

$$n = {}^{2}/_{3}\, p, \text{ c'est-à-dire } y = {}^{2}/_{3}.$$

La représentation graphique de cette fonction y se traduit par une droite horizontale, droite qui figure par un trait renforcé sur les fig. 1, 2 et 3.

La question pourrait se poser de savoir si cette échéance moyenne est celle de la Rente formée par les annuités payées par l'emprunteur, ou simplement de celle qui est constituée par les amortissements. Le seul examen de la figure 1 permet de conclure que l'échéance moyenne calculée pratiquement n'est pas celle d'une Rente à terme constant. En effet ses écarts par rapport à la valeur théorique et exacte sont nettement trop forts.

Il ne reste donc qu'à prendre en considération la Rente à terme variable que nous avons étudiée et comparer les résultats ainsi obtenus. L'on voit sur la figure 3 que, dans la très grande majorité des cas, les ordonnées des différentes courbes sont inférieures à celle de l'horizontale. Cela signifie que la durée de l'échéance moyenne est en général inférieure à celle qui est utilisée dans les banques. Pour chaque taux, il existe une durée p de l'emprunt pour laquelle les valeurs de n théorique et pratique sont égales. Ainsi lorsque le taux est le 5 %, cette égalité se produit si p atteint 90 périodes. Si la durée p est supérieure à ce nombre, la valeur approximative de n devient trop faible.

Les écarts entre la valeur approximative et la valeur exacte de n ne sont pas évidemment très considérables. Ils sont toutefois suffisamment forts pour qu'il vaille la peine d'en parler. Il nous a paru intéressant d'indiquer dans le tableau ci-dessous les valeurs que l'on obtient si l'on envisage un nombre de périodes égal à 30. La valeur pratique de n correspondante est égale à 20.

Tableau indiquant les échéances moyennes, à différents taux, des amortissements d'un emprunt.

Durée de l'emprunt : 30 périodes.
Valeur pratique de l'échéance moyenne : 20 périodes.

Taux	Echéance moyenne	Ecart.
1 %	15,88	4,12
2 %	16,24	3,76
3 %	16,60	3,40
3 ½ %	16,78	3,22
4 %	16,96	3,04
4 ½ %	17,12	2,88
5 %	17,30	2,70
6 %	17,63	2,37
8 %	18,26	1,74
10 %	18,86	1,14

Maintenant que nous avons nettement mis en évidence les écarts qui existent entre la valeur exacte et la valeur approchée de l'échéance moyenne des sommes affectées à l'amortissement d'un emprunt, il devient intéressant de comparer les valeurs, théorique et pratique, du rendement de ces obligations. Ces considérations feront l'objet d'une nouvelle étude.

Essais des matériaux de l'industrie aéronautique.

La construction des avions, des ballons et des installations auxiliaires de l'aéronautique met en œuvre des matériaux dont les propriétés et, éventuellement les défauts, doivent être scrutés avec soin car la moindre défaillance peut avoir des conséquences tragiques. A cet effet, la maison *Alfred J. Amsler et Cie*, à Schaffhouse, a construit plusieurs appareils fort bien appropriés à leur but, notamment ceux dont voici une brève description.

Essai à la flexion des fils.

La petite machine que la figure 1 représente, permet d'essayer les fils à la flexion sur deux appuis et enregistre automatiquement les efforts imposés en fonction des flèches. Elle donne le moyen de qualifier les fils au point de vue de leur raideur transversale, caractéristique importante (cas des haubans, des fils de transmission de mouvements, etc.). Sa force est de 20 kilogs ; la distance des appuis peut varier de 5 à 25 cm ; le diamètre maximum du fil qu'on peut essayer est de 10 mm et la flèche maximum de 5 cm environ.

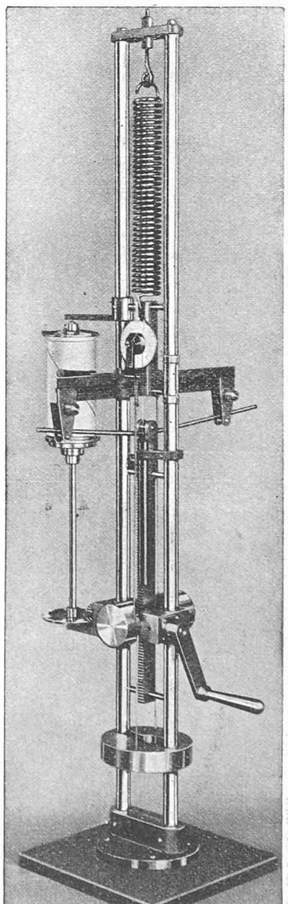

Fig. 1. — Appareil pour l'essai à la flexion des fils métalliques.

Essais des câbles.

On essaie les câbles généralement à la traction.

S'ils ont un faible diamètre, on peut les tractionner dans une machine ordinaire de 2, 5 ou 10 tonnes dans laquelle on les amarre au moyen de poulies à gorge ad hoc (voir figure 2) autour desquelles on les enroule. Ces poulies sont attachées aux mâchoires de la machine et l'essai, grâce à elles, est effectué comme sur une éprouvette ordinaire. Ce mode d'attache convient bien aux cordages. Si les câbles ont un fort diamètre, il faut employer des machines plus puissantes où on les amarre alors, en les serrant entre des planchettes en bois, qui sont maintenues dans les mordaches striées de la machine et dans lesquelles le câble ou le cordage à essayer s'incruste et se maintient sans glissement jusqu'à sa rupture (voir figures 3 et 4).