

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 55 (1929)  
**Heft:** 24

## Inhaltsverzeichnis

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 22.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE

Réd. : D<sup>r</sup> H. DEMIERRE, ing.

DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ORGANE DE PUBLICATION DE LA COMMISSION CENTRALE POUR LA NAVIGATION DU RHIN

ORGANE DE L'ASSOCIATION SUISSE D'HYGIÈNE ET DE TECHNIQUE URBAINES

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

SOMMAIRE : Représentation de la ligne élastique des poutres droites au moyen des séries trigonométriques et calcul de systèmes hyperstatiques d'ordre élevé par décomposition en systèmes fondamentaux, par M. le D<sup>r</sup> MAURICE PASCHOUD, Recteur de l'Université de Lausanne. — Redresseurs à vapeur de mercure au service de la Ville de Vienne, par M. von KOTSCHUBEY, ingénieur. — Villa au bord du lac de Zurich. — Institut pour l'organisation rationnelle des exploitations industrielles créé à l'École Polytechnique Fédérale. — NÉCROLOGIE : Paul Piccard (planche hors texte). — SOCIÉTÉS : Association suisse de technique sanitaire. — Société suisse des Ingénieurs et des Architectes. — BIBLIOGRAPHIE. — CARNET DES CONCOURS. — Service de placement.

## Représentation de la ligne élastique des poutres droites au moyen des séries trigonométriques et calcul de systèmes hyperstatiques d'ordre élevé par décomposition en systèmes fondamentaux,<sup>1</sup>

par M. le D<sup>r</sup> MAURICE PASCHOUD, Recteur de l'Université de Lausanne.

*Bibliographie* : S. TIMOSHENKO, *Applied Elasticity*, 1<sup>re</sup> édition, 1925, p. 129-132 et p. 161-165. Cet ouvrage a été traduit en allemand par le D<sup>r</sup> Malkin et a paru sous le titre *Festigkeitslehre*, chez Springer, en 1928.

### A) Emploi de l'énergie potentielle de déformation.

Considérons d'abord le cas d'une poutre à deux appuis simples, sollicitée par une charge concentrée  $P$  (figure 1).

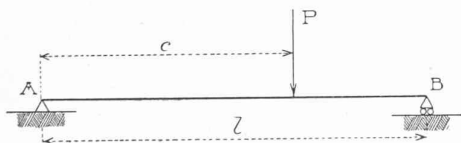


Fig. 1.

On peut dans ce cas prendre pour équation de l'élastique une expression de la forme

$$(1) \quad y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots$$

$x$  est l'abscisse d'un point de l'élastique,  $y$  son ordonnée et les  $a_i$  sont des coefficients que nous allons déterminer.

La signification géométrique de (1) est évidente.

$M$  étant le moment fléchissant dans une section de la poutre de moment d'inertie  $I$  et de coefficient d'élasticité  $E$ , on a la relation classique

$$(2) \quad M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

L'énergie potentielle de déformation de la poutre a pour expression

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EI},$$

<sup>1</sup> Leçon faite au Cours théorique et pratique de béton armé, organisé par la Société suisse des ingénieurs et des architectes, à Lausanne, du 8 au 12 octobre dernier. (Voir *Bulletin technique* du 16 novembre 1929, page 269.)

qui devient, en tenant compte de (2)

$$(3) \quad U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Calculons  $d^2 y/dx^2$  au moyen de l'expression (1) et remplaçons cette dérivée seconde par son expression dans (3). Il vient, en tenant compte des relations bien connues

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0$$

$$(4) \quad U = \frac{EI\pi^4}{4l^3} (1^4 a_1^2 + 2^4 a_2^2 + \dots) = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2.$$

Cette expression obtenue, remarquons que lorsqu'un système élastique subit, à partir d'une position d'équilibre, une petite déformation, l'accroissement de son énergie potentielle est égal au travail effectué par les forces extérieures pendant la déformation.

Supposons que, seul, le coefficient  $a_n$  varie de  $da_n$ ; le terme  $a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$  variera de  $da_n \sin \frac{n\pi x}{l}$  et le travail effectué par la force  $P$ , d'abscisse  $c$ , sera

$$(5) \quad da_n \sin \frac{n\pi c}{l} \cdot P.$$

L'énergie potentielle de déformation, elle, varie de

$$(6) \quad \frac{\partial U}{\partial a_n} da_n = \frac{EI\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n.$$

En égalant (5) et (6), on obtient

$$a_n = \frac{2P l^3 \sin \frac{n\pi c}{l}}{EI\pi^4 n^4},$$

d'où finalement

$$(7) \quad y = \frac{2P l^3}{EI\pi^4} \left( \frac{\sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{1^4} + \frac{\sin \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^4} + \dots \right)$$

qui est l'équation cherchée, sous forme complètement explicite. On en déduit, si l'on fait  $x = \frac{l}{2} = c$ , pour la