**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande

**Band:** 55 (1929)

**Heft:** 24

**Artikel:** Représentation de la ligne élastique des poutres droites au moyen des séries trigonométriques et calcul de systèmes hyperstatiques d'ordre élevé par décomposition en systèmes fondamentaux

**Autor:** Paschoud, Maurice

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-42693

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

**Download PDF:** 05.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

55e année 30 novembre 1929 N° 24

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Réd.: Dr H. Demierre, ing. Paraissant tous les 15 jours

ORGANE DE PUBLICATION DE LA COMMISSION CENTRALE POUR LA NAVIGATION DU RHIN
ORGANE DE L'ASSOCIATION SUISSE D'HYGIÈNE ET DE TECHNIQUE URBAINES
ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

SOMMAIRE : *Représentation de la ligne élastique des poutres droites au moyen des séries trigonométriques et calcul de systèmes hyperstatiques d'ordre élevé par décomposition en systèmes fondamentaux*, par M. le Dr Maurice Paschoud, Recteur de l'Université de Lausanne. — *Redresseurs à vapeur de mercure au service de la Ville de Vienne*, par M. von Kotschubey, ingénieur. — *Villa au bord du lac de Zurich.* — *Institut pour l'organisation rationnelle des exploitations industrielles créé à l'Ecole Polytechnique Fédérale.* — Nécrologie : *Paul Piccard* (planche hors texte). — Sociétés : *Association suisse de technique sanitaire.* — *Société suisse des Ingénieurs et des Architectes.* — Bibliographie. — Carnet des concours. — *Service de placement.*

## Représentation de la ligne élastique des poutres droites au moyen des séries trigonométriques et calcul de systèmes hyperstatiques d'ordre élevé par décomposition en systèmes fondamentaux,[1]

par M. le Dr Maurice PASCHOUD, Recteur de l'Université de Lausanne.

*Bibliographie:* S. Timoshenko, *Applied Elasticity*, 1re édition, 1925, p. 129-132 et p. 161-165. Cet ouvrage a été traduit en allemand par le Dr Malkin et a paru sous le titre *Festigkeitslehre*, chez Springer, en 1928.

A) *Emploi de l'énergie potentielle de déformation.*

Considérons d'abord le cas d'une poutre à deux appuis simples, sollicitée par une charge concentrée $P$ (figure 1).

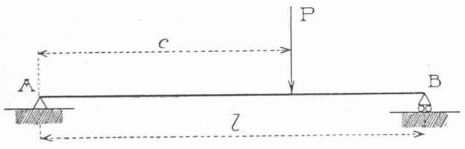


Fig. 1.

On peut dans ce cas prendre pour équation de l'élastique une expression de la forme

$$(1) \qquad y = a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + \ldots$$

$x$ est l'abscisse d'un point de l'élastique, $y$ son ordonnée et les $a_i$ sont des coefficients que nous allons déterminer.

La signification géométrique de (1) est évidente.

$M$ étant le moment fléchissant dans une section de la poutre de moment d'inertie $I$ et de coefficient d'élasticité $E$, on a la relation classique

$$(2) \qquad M = -EI\frac{d^2y}{dx^2}.$$

L'énergie potentielle de déformation de la poutre a pour expression

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2 dx}{EI},$$

qui devient, en tenant compte de (2)

$$(3) \qquad U = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx.$$

Calculons $d^2y/dx^2$ au moyen de l'expression (1) et remplaçons cette dérivée seconde par son expression dans (3). Il vient, en tenant compte des relations bien connues

$$\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = 0$$

$$(4) \qquad U = \frac{EI\pi^4}{4l^3}\left(1^4 a_1^2 + 2^4 a_2^2 + \ldots\right) = \frac{EI\pi^4}{4l^3}\sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2.$$

Cette expression obtenue, remarquons que lorsqu'un système élastique subit, à partir d'une position d'équilibre, une petite déformation, l'accroissement de son énergie potentielle est égal au travail effectué par les forces extérieures pendant la déformation.

Supposons que, seul, le coefficient $a_n$ varie de $da_n$ ; le terme $a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ variera de $da_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ et le travail effectué par la force $P$, d'abscisse $c$, sera

$$(5) \qquad da_n \sin\frac{n\pi c}{l} \cdot P.$$

L'énergie potentielle de déformation, elle, varie de

$$(6) \qquad \frac{\partial U}{\partial a_n}da_n = \frac{EI\pi^4}{2l^3}\,n^4 a_n\,da_n.$$

En égalant (5) et (6), on obtient

$$a_n = \frac{2Pl^3 \sin\frac{n\pi c}{l}}{EI\pi^4 n^4},$$

d'où finalement

$$(7) \qquad y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left(\frac{\sin\frac{\pi c}{l}\sin\frac{\pi x}{l}}{1^4} + \frac{\sin\frac{2\pi c}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}}{2^4} + \ldots\right)$$

qui est l'équation cherchée, sous forme complètement explicite. On en déduit, si l'on fait $x = \frac{l}{2} = c$, pour la

[1] Leçon faite au Cours théorique et pratique de béton armé, organisé par la Société suisse des ingénieurs et des architectes, à Lausanne, du 8 au 12 octobre dernier. (Voir *Bulletin technique* du 16 novembre 1929, page 269.)

flèche au milieu de la poutre, quand la force $P$ agit au milieu de celle-ci, l'expression

$$f = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots\right)$$

En se bornant au premier terme, on a déjà une expression très approchée

$$f \cong \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} = \frac{Pl^3}{48{,}7EI}$$

de cette flèche, alors que la valeur exacte est, comme on sait, $f = \frac{Pl^3}{48EI}$.

De l'expression (7) relative au cas d'une charge concentrée, on déduit tout de suite les équations de l'élastique de la poutre à deux appuis simples sollicitée par des charges verticales quelconques.

Par exemple, si la charge est une charge uniformément répartie de $p$ par mètre courant, il suffit de remplacer dans (7) $P$ par $p \,.\, dc$ et d'intégrer de $c = 0$ à $c = l$. Il vient

$$y = \frac{4pl^4}{EI\pi^5}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{l}}{1^5} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{l}}{3^5} + \ldots\right)$$

Pour le cas d'un couple de moment $M$ appliqué sur l'appui $A$, on fait tendre $P$ vers l'infini, $c$ vers zéro, de façon que le produit $Pc$ tende vers $M$ et il vient

$$y = \frac{2Ml^2}{EI\pi^3}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{l}}{1^3} + \frac{\sin\frac{2\pi x}{l}}{2^3} + \ldots\right)$$

Dans le premier cas, quand on se borne au premier terme, l'erreur sur la flèche au milieu est de 0,25 % et l'on obtient

$$f \cong \frac{4}{305}\frac{pl^4}{EI} \text{ au lieu de la valeur exacte } f = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI}.$$

Pour le cas du couple, en se bornant toujours au premier terme, on trouve

$$f \cong \frac{2}{31}\frac{Ml^2}{EI} \quad \text{au lieu de} \quad f = \frac{Ml^2}{16EI}.$$

Il est nécessaire de remarquer que si les séries obtenues pour $y$ sont très convergentes, il n'en est plus de même pour celles que l'on obtiendrait en dérivant ces séries terme à terme et qui serviraient à calculer la pente de l'élastique ou sa courbure. C'est là un fait qui n'a pas d'importance pour les applications que nous indiquerons ici, mais qui, par contre, dans d'autres questions, présente de graves inconvénients. Nous y reviendrons plus loin.

Pour le moment, remarquons encore que l'expression (1) convenait très bien pour le cas de la poutre à deux appuis simples par la raison que chacun des termes de cette série s'annule pour $x = 0$ et pour $x = l$, de sorte que les conditions aux extrémités de la poutre sont satisfaites à l'avance.

Si l'on avait affaire à une poutre encastrée aux deux bouts, il faudrait partir, au lieu de (1), de l'expression suivante :

$$y = a_1\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right) + a_2\left(1 - \cos\frac{4\pi x}{l}\right) + a_3\left(1 - \cos\frac{6\pi a}{l}\right) + \ldots$$

Les conditions aux limites sont bien satisfaites car $y$ s'annule pour $x = 0$ et pour $x = l$ et en outre, comme il le faut,

$$\frac{dy}{dx} = a_1\frac{2\pi}{l}\sin\frac{2\pi x}{l} + a_2\frac{4\pi}{l}\sin\frac{4\pi x}{l} + \ldots$$

s'annule également pour $x = 0$ et pour $x = l$.

Nous laissons au lecteur, à titre d'exercice, le soin d'effectuer sur la dernière expression d'$y$ des calculs tout semblables à ceux du début de cette leçon. Il trouvera ainsi des expressions de l'élastique d'une poutre encastrée à ses deux extrémités, sous forme de séries très convergentes et qui, même en se bornant à un seul terme, donneront une bonne approximation pour les flèches de cette poutre.

Enfin, toujours à titre d'exercice, nous laisserons au lecteur le soin de choisir la forme de la série qui conviendrait au cas de la poutre encastrée à un bout et libre à l'autre bout.

Le fait que la série (7) est si convergente que l'on peut, avec une grande approximation, se borner à son premier terme, montre encore ce résultat important et bien connu d'ailleurs que, quelle que soit la position de la charge $P$ sur la poutre, c'est vers le milieu de celle-ci que se produit la flèche maximum et l'on a, pour expression approchée de cette flèche maximum, l'expression

$$y_{max} \cong \frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\sin\frac{\pi c}{l}.$$

Voici maintenant deux applications des théories qui précèdent.

B) *Poutre armée à deux poinçons. Calcul approché de la tension dans le tirant.*

Considérons la poutre armée de la figure 2. Pour trouver une expression approchée de la tension dans le tirant $CD$, on peut procéder de la façon suivante. Coupons $CD$ en son milieu $m$ et appliquons à chacun des tronçons obtenus une force de $X$.1 Tonne qui le comprime. En sup-

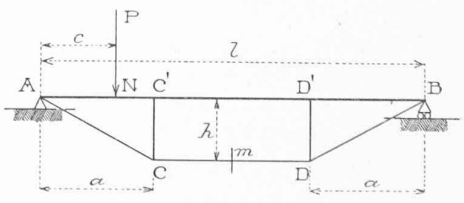


Fig. 2.

posant qu'il y a des articulations en $C$ et en $D$, il se produit alors, dans chacun des poinçons, une extension de $X$.1 Tonne $\frac{h}{a}$ et, d'après l'expression (7) du § A où l'on se borne au premier terme, l'équation approchée de l'élastique de la poutre $AB$ sera

$$y = \frac{2\frac{h}{a} Xl^3}{EI\pi^4} \sin\frac{\pi a}{l} \sin\frac{\pi x}{l} + \frac{2\frac{h}{a} Xl^3}{EI\pi^4} \sin\frac{\pi(l-a)}{l} \sin\frac{\pi x}{l} =$$

$$= 4\frac{h}{a}\frac{Xl^3}{EI\pi^4} \cos\frac{(2a-l)\pi}{2l} \sin\frac{\pi x}{l}.$$

Le déplacement vertical du point $N$ de $AB$, d'abscisse $c$, est alors

$$\eta = 4\frac{h}{a}\frac{Xl^3}{EI\pi^4} \cos\frac{(2a-l)\pi}{2l} \sin\frac{\pi c}{l}.$$

D'après le théorème de réciprocité de Maxwell, ce déplacement vertical est égal à la quantité dont s'éloignent les extrémités $m$ des tronçons de $CD$ quand on applique en $N$ une force verticale de $X$ . 1 Tonne, descendante.

Ceci remarqué, pour trouver la quantité $\delta$ dont s'éloignent ces 2 extrémités $m$ quand $X = 1$, il suffit d'observer que le déplacement vertical de $C$ est le même que celui de $C'$, que celui de $D$ est le même que celui de $D'$ et que les longueurs $AC$ et $BD$ restent invariables. On a donc

$$\delta = \frac{4hl^3}{aEI\pi^4} \cos\frac{(2a-l)\pi}{2l} \sin\frac{\pi a}{l}\frac{h}{a} +$$

$$+ \frac{4hl^3}{aEI\pi^4} \cos\frac{(2a-l)\pi}{2l} \sin\frac{\pi(l-a)}{l}\frac{h}{a} =$$

$$= 8\frac{h^2}{a^2}\frac{l^3}{EI\pi^4} \cos^2\frac{(2a-l)\pi}{2l}.$$

Dans ces conditions, en négligeant les déformations dues aux efforts normaux, la tension produite dans le tirant par une force verticale de $P$ tonnes appliquée au point $N$ de la poutre sera

$$T = \frac{\eta}{\delta} P = \frac{\sin\frac{\pi c}{l} P}{2\frac{h}{a} \cos\frac{(2a-l)\pi}{2l}}.$$

Si la poutre porte une charge uniformément répartie de $p$ par mètre courant, la tension dans le tirant sera

$$T = \frac{alp}{\pi h \cos\frac{(2a-l)\pi}{2l}}.$$

C'est là une expression très simple et qui permet de calculer, rapidement et avec une assez grande approximation, la tension dans le tirant. On pourrait du reste la rendre tout à fait exacte en tenant compte des déformations produites par les efforts normaux. Telle qu'elle est, il est intéressant de la comparer, pour la simplicité, avec l'expression exacte de cette tension donnée par Müller Breslau dans ses « Neuere Methoden der Festigkeitslehre », 4e édition, 1913, p. 113.

Des calculs analogues permettraient de trouver des expressions approchées de la tension dans le tirant d'une poutre armée à plus de 2 poinçons.

C) *Flambage d'une poutre à deux appuis simples sollicitée à la fois à la compression par des forces longitudinales* S *et à la flexion par une force transversale* P.

Ce problème, dont un cas particulier est traité, suivant la méthode habituelle, par Föppl dans sa «Festigkeitslehre» 7e édition, 1919, p. 373-377, montre bien l'utilité des séries trigonométriques pour la représentation de l'élastique.

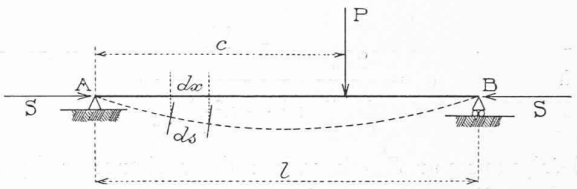


Fig. 3.

Soit la poutre représentée dans la figure 3. Dans ce cas, on peut prendre pour équation de l'élastique la série (1)

$$y = a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots$$

On a, comme au § A,

$$U = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2.$$

L'accroissement de l'énergie potentielle quand $a_n$ varie de $da_n$, est toujours

$$\frac{EI\pi^4}{2l^3} n^4 a_n \, da_n$$

et le travail de la force transversale $P$ est encore

$$P da_n \sin\frac{n\pi c}{l}.$$

Reste à calculer le travail des forces longitudinales $S$.

On sait, d'après le cours d'analyse, que

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Si les flèches sont très petites, $dy/dx$ est petit et l'on a approximativement

$$ds = dx\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

d'où

$$ds - dx = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx,$$

expression qui est très utile en Résistance des matériaux.

Si $\lambda$ est la différence entre la longueur de l'élastique et la distance $AB$, on aura

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Dans notre cas, avec l'expression supposée pour $y$, on obtient tout de suite

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2.$$

Quand $a_n$ varie de $da_n$, $\lambda$ varie de

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a_n} da_n = \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n$$

et l'on a, en écrivant que la variation de l'énergie potentielle est égale au travail des forces extérieures,

$$\frac{EI\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n = l\, da_n \sin\frac{n\pi c}{l} + \frac{S\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n ,$$

d'où

$$a_n = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{n^4 - n^2 \frac{Sl^2}{EI\pi^2}} .$$

Désignons par $S_{crit.}$ la valeur de la charge critique de flambage d'une poutre à deux articulations. On a

$$S_{crit.} = \frac{EI\pi^2}{l^2} .$$

Posons

$$\alpha^2 = \frac{S}{S_{crit.}} .$$

On peut écrire

$$a_n = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{n^4 - \alpha^2 n^2}$$

et l'on a finalement

$$(8)\quad y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \left[ \frac{\sin\frac{\pi c}{l}\sin\frac{\pi x}{l}}{1-\alpha^2} + \frac{\sin\frac{2\pi c}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}}{2^4 - 2^2 . \alpha^2} + \ldots \right]$$

En comparant cette expression avec l'expression (7) on voit que l'adjonction de la force $P$ ne modifie pas la valeur de la charge critique. Par contre, les forces $S$ ont pour effet d'augmenter les flèches dues à $P$.

Comme l'on peut, avec une bonne approximation, ne conserver que le premier terme de la série précédente, on pourra conclure que, par l'effet des forces $S$, les flèches sont augmentées dans le rapport de 1 à $1 - \alpha^2$.

La conclusion reste la même si l'on a une charge transversale uniformément répartie.

Les flèches calculées, on trouve sans peine le moment fléchissant maximum dû aux forces longitudinales et l'on peut déterminer ainsi les contraintes produites dans la poutre.

Si les forces $S$, au lieu de comprimer la poutre, la tendaient, un calcul semblable au précédent conduirait à remplacer dans la série (8), $\alpha^2$ par $-\alpha^2$.

Le cas des poutres encastrées aux deux bouts ou encastrées à un bout et libres à l'autre se traiterait aussi sans difficulté. Nous en laissons le soin au lecteur.

*D*) Les exemples qui précèdent montrent bien l'intérêt des méthodes de M. *Timoshenko*. Disons encore, pour terminer, que dans le calcul des plaques, on est amené à se servir aussi de séries trigonométriques. Ce ne sont plus des séries simples, mais des séries doubles. Ces séries conviennent très bien pour représenter les flèches, mais celles qui permettent le calcul des tensions et que l'on obtient par des dérivations terme à terme, sont beaucoup moins convergentes et c'est là un grave inconvénient. Bornons-nous a indiquer, à ce sujet, les recherches de M. Courant (Göttinger Nachrichten, 1923), qui montre comment on peut obvier à ce défaut et à signaler la thèse de Si Luan Vei, sur la plaque rectangulaire encastrée. (Göttingen 1925.) *(A suivre.)*

# Redresseurs à vapeur de mercure au service de la Ville de Vienne,

par N. von KOTSCHUBEY, ingénieur.

Le développement de l'emploi du courant alternatif et surtout du courant triphasé dans tous les domaines d'application de l'énergie électrique n'ont pas enlevé au courant continu toute son importance. En effet, un très grand nombre de consommateurs d'énergie électrique ne se servent de celle-ci que sous la forme de courant continu. Parmi ces derniers, on peut citer les Chemins de fer (France, Espagne, Hollande, Angleterre, Australie, Indes anglaises, Afrique du Sud, en partie l'Italie, les Etats-Unis d'Amérique du Nord, etc.), les fabriques de produits chimiques (production électrolytique du zinc, de l'aluminium, d'hydrogène, ce dernier étant une des matières premières les plus importantes de la fabrication d'engrais artificiels, etc.) et enfin les réseaux de lumière à courant continu. C'est surtout ces derniers qui nous intéressent en ce moment car nous allons passer en revue les installations de redresseurs à vapeur de mercure alimentant les réseaux de lumière de la Ville de Vienne.

Ce n'est pas seulement à Vienne qu'on emploie le courant continu pour les services de lumière mais aussi dans un très grand nombre de villes, soit européennes (Paris, Londres, Bruxelles, Stockholm, Munich, etc., notamment en Suisse, à Saint-Gall), soit des Etats-Unis d'Amérique du Nord (New York, Chicago, etc.), ce système est encore utilisé du moins pour une certaine partie de leurs réseaux et surtout dans les anciens quartiers.

Les raisons qui obligent les Services d'électricité de ces villes à maintenir le système à courant continu sont les suivantes :

1° Le coût de nouvelles installations de distribution de courant triphasé est élevé et obligerait les Services d'électricité à immobiliser des capitaux considérables.

2° Le changement des câbles présente souvent des difficultés insurmontables et est aussi très coûteux.

3° En effectuant le changement de système, les Services d'électricité d'une ville seraient obligés de changer à leur propre compte toutes les installations des consommateurs.

4° Les sous-stations à courant continu n'étant souvent pas encore amorties, il s'ensuivrait une perte des capitaux engagés.

Les raisons que nous avons mentionnées ci-dessus ont amené la direction des Services d'électricité de la Ville