

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 66 (1940)
Heft: 22

Artikel: La propagation du coup de bélier dans une conduite de section variable
Autor: Haller, P. de
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-50673>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 12 francs

Etranger : 14 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 10 francs

Etranger : 12 francs

Prix du numéro :

75 centimes.

Pour les abonnements
s'adresser à la librairie
F. Rouge & C^{ie}, à Lausanne.

ANNONCES

Le millimètre sur 1 colonne,
largeur 47 mm :
20 centimes.

Rabais pour annonces
répétées.

Tarif spécial
pour fractions de pages.

Fermege des annonces :
Annonces Suisses S. A.
8, Rue Centrale (Pl. Pépinet)
Lausanne

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale. —

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président: R. NEESER, ingénieur, à Genève; Vice-président: M. IMER, à Genève; secrétaire: J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres: *Fribourg*: MM. L. HERTLING, architecte; A. ROSSIER, ingénieur; *Vaud*: MM. F. CHENAUX, ingénieur; E. ELSKES, ingénieur; EPITAUX, architecte; E. JOST, architecte; A. PARIS, ingénieur; CH. THÉVENAZ, architecte; *Genève*: MM. L. ARCHINARD, ingénieur; E. ODIER, architecte; CH. WEIBEL, architecte; *Neuchâtel*: MM. J. BÉGUIN, architecte; R. GUYE, ingénieur; A. MÉAN, ingénieur cantonal; *Valais*: M. J. DUBUIS, ingénieur; A. DE KALBERMATTEN, architecte.

RÉDACTION: D. BONNARD, ingénieur, Case postale Chauderon 475, LAUSANNE.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE
A. STUCKY, ingénieur, président; M. BRIDEL; G. EPITAUX, architecte; M. IMER.

SOMMAIRE: *La propagation du coup de bélier dans une conduite de section variable*, par P. DE HALLER, ingénieur, D^r ès sciences techniques. — *Le chauffage à distance*, par P. MEYSTRE, ingénieur, chef du Service de l'Electricité, Lausanne. — *Société suisse des ingénieurs et des architectes: Action en faveur des prisonniers de guerre; Les voûtes autoportantes. — Section genevoise de la Société suisse des ingénieurs et des architectes: Commission mixte pour l'étude de création de possibilités de travail. — NÉCROLOGIE: Emile Gorjat, ingénieur. — DIVER: Une visite à l'Abbaye d'Hauterive. — BIBLIOGRAPHIE. — CARNET DES CONCOURS. — SERVICE DE PLACEMENT.*

La propagation du coup de bélier dans une conduite de section variable ¹

par P. de HALLER, ingénieur, D^r ès sciences techniques.

La théorie du coup de bélier a fait l'objet de nombreuses études, dont les auteurs admettent, avec Allievi et les fondateurs de cette théorie, une conduite composée d'un ou de plusieurs tronçons de section constante, avec passage brusque d'une section à l'autre. Pratiquement, le raccordement d'une section à l'autre se fait presque toujours par un tronçon conique plus ou moins long, qui peut prendre un développement important, par exemple dans les collecteurs d'usines à groupes multiples. Les méthodes de calculs usuelles attribuent à ces raccordements une longueur nulle. Si cette simplification se justifie souvent, il est cependant des cas où elle conduit à des résultats qui s'écartent notablement de ceux qu'un calcul plus exact permet de prévoir.

Dans une étude magistrale le professeur Favre ² a étendu la théorie d'Allievi au cas d'une conduite dont le

¹ Nous n'avons pas hésité à publier cet article qui vient heureusement compléter une collection déjà riche d'études sur le même sujet offertes à nos lecteurs au cours de ces dernières années: « Etude de l'influence du coup de bélier sur le réglage des turbines hydrauliques par la méthode d'Allievi », par M. le prof. P. Oguey, *B. T.* 1935, p. 265. — « Influence des réflexions partielles de l'onde aux changements de caractéristiques de la conduite et au point d'insertion d'une chambre d'équilibre », par MM. J. Calame et D. Gaden, *B. T.* 1935, p. 217. — « Considérations sur le coup de bélier dans les conduites forcées d'usines hydrauliques », par MM. J. Calame et D. Gaden, *B. T.* 1936, p. 49. — « Réponses aux considérations sur le coup de bélier », par M. Ch. Jæger, *B. T.* 1936, p. 112. — « Considérations sur le coup de bélier », par M. O. Schnyder, *B. T.* 1936, p. 121, pour ne citer que les principales (Réd.).

² H. FAVRE: *Théorie des coups de bélier dans les conduites à caractéristiques linéairement variables le long de l'axe*. « Revue générale de l'Hydraulique », n° 19 à 24, 1938. — Article commenté au *B. T.* du 11 février 1939, p. 35.

diamètre varie linéairement entre l'obturateur et la chambre de mise en charge. Le problème que nous traitons ici est différent: il s'agit d'étudier comment un coup de bélier se propage dans un tronçon conique d'une conduite, qui par ailleurs peut être quelconque. C'est un problème qui touche de près au domaine de l'acoustique, à laquelle nous ferons de fréquents emprunts.

Considérons une conduite très longue (fig. 1), composée de deux tronçons I et II de sections constantes S_1 et S_2 reliés par un raccordement conique $A-B$ de longueur L . Dans chacune des parties cylindriques, le coup de bélier obéit aux équations classiques (avec les restrictions d'usage, qui négligent les termes en $v \frac{\delta v}{\delta x}$ par rapport à $\frac{\delta v}{\delta t}$):

$$(1) \quad \begin{cases} g \frac{\delta h}{\delta x} = - \frac{\delta v}{\delta t} \\ \frac{\delta v}{\delta x} = - \frac{g}{a^2} \cdot \frac{\delta h}{\delta t} \end{cases}$$

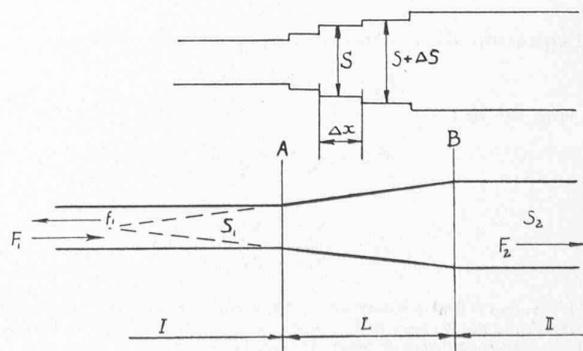


Fig. 1. — Raccordement conique entre deux sections différentes.

La solution générale de ce système est

$$(2) \quad \begin{cases} h = F(x - at) + f(x + at) \\ v = \frac{g}{a} F(x - at) - \frac{g}{a} f(x + at). \end{cases}$$

$h = \frac{P}{\gamma}$ représente la pression en un point d'abscisse x ,

v est la vitesse d'écoulement, $a = \sqrt{\frac{g}{\gamma} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{D}{eE} \right)}$ est la vitesse de propagation des ondes de pression.

γ = poids spécifique de l'eau,

ϵ = coefficient d'élasticité de l'eau,

E = coefficient d'élasticité des parois,

e = épaisseur des parois.

Les symboles F et f représentent deux ondes de pression se propageant en sens inverse sans se gêner mutuellement. Nous n'insistons pas sur ces équations dont la discussion détaillée se trouve dans tous les traités sur le coup de bélier¹.

Dans toute cette étude, nous admettrons : $a =$ constante ; ceci revient à admettre que $\frac{D}{e} =$ constant. Ce

sera le cas, en général, car un raccordement n'est jamais d'une longueur telle que la pression statique varie beaucoup d'une extrémité à l'autre, et la relation $\frac{D}{e} =$ constante entraîne également la constance des sollicitations de la paroi, condition qu'un constructeur cherche toujours à réaliser.

h et v représentent la partie variable de la pression et de la vitesse ; on ne change rien aux équations en ajoutant une pression h_0 ou une vitesse v_0 indépendantes du temps. Donnons aux variables relatives aux tronçons I et II les indices respectifs 1 et 2, et, le système étant au repos, supposons que la pression varie loin en amont du raccordement dans le tronçon I. Cette variation se transmet de gauche à droite sous forme d'une onde de pression F_1 . Dans II, il n'y a pas d'onde réfléchie : $f_2 = 0$. Supposons encore que l'onde incidente F_1 varie peu pendant le temps $\theta = \frac{L}{a}$, de sorte que les pressions h_A et h_B , en A et en B, aux extrémités du cône de raccordement, peuvent être considérées comme constamment égales ; alors :

$$h_A = h_B = F_1 + f_1 = F_2$$

et l'équation de continuité : $v_1 S_1 = v_2 S_2$ donne :

$$(F_1 - f_1) S_1 = S_2 F_2$$

on tire de là :

$$F_2 = \frac{2S_1}{S_1 + S_2} F_1$$

et :

$$f_1 = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} F_1.$$

C'est le résultat classique : l'onde F_1 est partiellement transmise et partiellement réfléchie,

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma = \frac{F_2}{F_1} = \frac{2S_1}{S_1 + S_2} \text{ est le facteur de transmission,} \\ \tau = \frac{f_1}{F_1} = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \text{ est le facteur de réflexion.} \end{cases}$$

Pour arriver à ce résultat, nous avons dû supposer que l'onde F_1 variait lentement. Admettons maintenant que cela ne soit pas le cas, mais qu'au contraire F_1 représente une saute brusque de pression ; les pressions h_A et h_B sont alors différentes, mais nous pouvons décomposer le tronçon AB en un certain nombre n de segments de longueur $\Delta x = \frac{L}{n}$ (fig. 1), suffisamment courts pour que F_1 varie peu dans le temps $\frac{\Delta x}{a}$. A chacun de ces tronçons nous pourrions alors appliquer les formules (3) ; on a pour chacun d'eux :

$$\sigma_i = \frac{2S_i}{2S_i + \Delta S} \quad \tau_i = \frac{-\Delta S}{2S_i + \Delta S}$$

où S_i est la section en un point d'abscisse x et $S_i + \Delta S$ la section en $x + \Delta x$. Au passage de chaque tronçon, la pression se trouve multipliée par le facteur de transmission correspondant. Alors, à l'extrémité du raccordement :

$$F_2 = F_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_i \dots \sigma_n.$$

Si Δx ou ΔS sont suffisamment petits, on pourra écrire

$$\sigma_i = 1 - \frac{\Delta S}{2S_i}$$

et ensuite :

$$F_2 = F_1 \prod_1^n \left(1 - \frac{\Delta S}{2S_i} \right)$$

ou en prenant le logarithme

$$\lg F_2 = \lg F_1 + \sum_1^n \lg \left(1 - \frac{\Delta S}{2S_i} \right) = \lg F_1 - \sum_1^n \frac{\Delta S}{2S_i}$$

à la limite $n \rightarrow \infty$:

$$\sum_1^n \frac{\Delta S}{2S_i} \rightarrow \int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{2S} = \frac{1}{2} \lg \frac{S_2}{S_1}$$

et enfin :

$$(4) \quad F_2 = F_1 \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}.$$

On trouve de même : $f_1 = 0$.

Ainsi, une onde incidente à front raide dans un tronçon conique se comporte, au premier abord, tout différemment d'une onde très aplatie : elle n'est pas réfléchie et le facteur de transmission est égal à :

$$\sigma = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} \quad \text{au lieu de :} \quad \frac{2S_1}{S_1 + S_2}.$$

Les formules (4) présentent ceci de particulier qu'elles sont indépendantes de la forme du raccordement, puisque nous n'avons fait aucune hypothèse particulière rela-

¹ L. ALLIEVI (Dubs-Bataillard) : *Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen*. Springer, Berlin 1909. — L. ALLIEVI (Gaden) : *Théorie du coup de bélier*. Dunod, Paris 1921.

N.B. Voir la bibliographie plus complète dans : CH. JÆGER : *Théorie générale du coup de bélier*. Dunod, Paris 1933.

tive à la loi de variation de la section S en fonction de l'abscisse.

Il est clair qu'elles ne sont valables qu'au premier instant, lorsque le front de l'onde incidente F_1 arrive dans le raccordement : sitôt ce premier instant passé, il y aura interférence entre les différents tronçons du raccordement, et les lois de réflexion et de transmission seront modifiées.

Nous avons soumis jusqu'ici l'onde incidente F_1 à des conditions très vagues : elle devait présenter une variation très rapide dans un cas, très lente dans l'autre. Nous supposons maintenant que la pression en aval du cône de raccordement varie brusquement de h_0 à $h_0 + H$, et reste ensuite constante ; la fonction F_1 est donc nulle tout d'abord, et prend brusquement la valeur $+H$. Au premier instant, les formules (4) seront évidemment applicables ; mais après un certain temps, lorsque le front de l'onde se sera éloigné, la variation de la fonction F_1 s'annule. On se trouve dans le cas de la théorie classique qui conduit aux équations (3) ; ces dernières fournissent donc une valeur limite, qui n'est atteinte qu'au bout d'un certain temps.

Pour déterminer l'allure de la pression entre les deux limites, il faut étudier ce qui se passe dans le cône de raccordement.

Dans une conduite de section variable, les équations différentielles (1) prennent la forme suivante ¹ :

$$(5) \quad \begin{cases} g \frac{\delta h}{\delta x} = - \frac{\delta v}{\delta t} & a) \\ \frac{\delta(Sv)}{\delta x} = - \frac{g}{a^2} S \frac{\delta h}{\delta t} & b) \end{cases}$$

La seconde de ces équations exprime la continuité et diffère seule de l'équation correspondante (1). Elle s'écrit sous une forme plus commode :

$$(5b) \quad \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{v}{S} \frac{dS}{dx} = - \frac{g}{a^2} \frac{\delta h}{\delta t}$$

Il faut ici préciser la forme du raccordement : supposons qu'il soit constitué par un tronç de cône de longueur L . Si S_1 est la section à l'entrée, on aura au point d'abscisse x :

$$S = \frac{S_1}{x_1^2} x^2 ; \quad S_2 = S_1 \left(\frac{x_1 + L}{x_1} \right)^2$$

l'origine $x = 0$ correspond au sommet du cône.

Dans ces conditions :

$$\frac{\delta S}{\delta x} = 2 \frac{S_1}{x_1^2} x ; \quad \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \frac{2}{x}$$

et les équations (5) deviennent :

$$(6) \quad \begin{cases} g \frac{\delta h}{\delta x} = - \frac{\delta v}{\delta t} \\ \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{2v}{x} = - \frac{g}{a^2} \frac{\delta h}{\delta t} \end{cases}$$

Pour intégrer ce système, on pose : $v = + \frac{\delta \Phi}{\delta x}$

alors :

$$h = - \frac{1}{g} \frac{\delta \Phi}{\delta t}$$

et

$$(7) \quad \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{\delta \Phi}{\delta x} = \frac{1}{a^2} \frac{\delta^2 \Phi}{\delta t^2}$$

L'intégrale générale de (7) est de la forme ¹ :

$$(8) \quad \Phi = \frac{g}{ax} [\Phi(x - at) - \varphi(x + at)]$$

où Φ et φ sont des fonctions quelconques, analogues aux F et f des formules (2).

Par conséquent :

$$(9) \quad \begin{cases} h = \frac{1}{x} [\Phi' + \varphi'] \\ v = \frac{g}{ax} [\Phi' - \varphi'] - \frac{g}{ax^2} [\Phi - \varphi] \end{cases}$$

L'indice ' désigne ici la dérivation par rapport à l'argument $(x - at)$ ou $(x + at)$. Les fonctions Φ et φ doivent être déterminées d'après les conditions aux extrémités du tronç de cône. Les équations (9) montrent que la pression h se compose de deux ondes se déplaçant en sens inverse avec la vitesse a , sans se gêner mutuellement, comme dans la théorie de la conduite cylindrique, mais ici l'intensité des ondes n'est pas constante, elle est inversement proportionnelle à l'abscisse x , c'est-à-dire inversement proportionnelle au diamètre de la conduite.

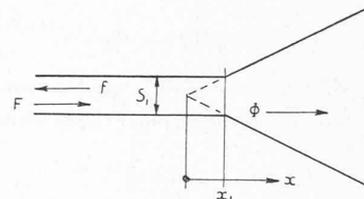


Fig. 2. — Entonnoir conique à l'entrée d'une conduite forcée.

Considérons maintenant une conduite (fig. 2) débouchant par un cône dans un bassin de grande dimension, et supposons qu'une onde de pression à front raide $F = \text{constante} = H$ venant de gauche arrive en A à l'instant $t = 0$. Dans la partie cylindrique, les équations (2) sont valables :

$$(10) \quad \begin{cases} h = H + f \\ v = \frac{g}{a} (H' - f) \end{cases}$$

Dans le cône, on aura :

$$(11) \quad \begin{cases} h = \frac{1}{x} (\Phi' + \varphi') \\ v = \frac{g}{ax} (\Phi' - \varphi') - \frac{g}{ax^2} (\Phi - \varphi) \end{cases}$$

¹ RAYLEIGH : *Theory of Sound*, 2^e édition, vol. 2, p. 109. Macmillan & Co, London 1929. — LAMB : *Hydrodynamics*, 4^e édition, p. 483. Cambridge University Press 1916. — ROCARD : *Propagation et absorption du son*, p. 15-16. Herrmann, Paris 1935. (Actualités scientifiques et industrielles n^o 222.)

¹ Rocard attribue l'équation 7 à Lord Rayleigh. En fait elle a déjà été établie et étudiée par EULER dans : *Sectio quarta de motu aeris in tubis*. Nov. Comm. Acc. Sc. Petropolitanae 1772.

Les majuscules H, Φ désignent les ondes directes, se propageant de gauche à droite, les minuscules f et φ les ondes réfléchies. Au point de raccordement $A, x = x_1$, les valeurs de h et v données par les équations (10) et (11) devront à chaque instant coïncider. Donc :

$$(12) \quad H + f(x_1 + at) = \frac{1}{x_1} [\Phi'(x_1 - at) + \varphi'(x_1 + at)]$$

et :

$$H - f(x_1 + at) = \frac{1}{x_1} [\Phi'(x_1 - at) - \varphi'(x_1 + at)] - \frac{1}{x_1^2} [\Phi(x_1 - at) - \varphi(x_1 + at)].$$

Admettons en outre qu'il n'y a pas d'onde rétrograde dans le cône : $\varphi = 0$. Par élimination de $f(x_1 + at)$ entre les équations (12) on obtient l'équation :

$$(13) \quad 2H = \frac{2}{x_1} \Phi'(x_1 - at) - \frac{1}{x_1^2} \Phi(x_1 - at)$$

intégrée, celle-ci nous donnera :

$$(14) \quad \Phi(x_1 - at) = Ae^{\frac{1}{2x_1}(x_1 - at)} - 2x_1^2 H.$$

Pour $t = 0$, on doit avoir $h = H$, d'où :

$$A = 2x_1^2 H e^{-\frac{1}{2x_1} x_1}.$$

La fonction Φ' est donc :

$$(14a) \quad \Phi' = e^{-\frac{1}{2x_1}(x_1 - at)} x_1 H e^{\frac{1}{2x_1}(x - at)}$$

et de la première équation (12) on tire :

$$(15) \quad f(x + at) = -H \left[1 - e^{\frac{1}{2x_1}(x - at)} e^{-\frac{1}{2x_1}(x + at)} \right].$$

Ainsi, la pression en un point quelconque d'abscisse $x (x > x_1)$ du cône est donnée par l'expression :

$$h = H e^{-\frac{1}{2x_1} \frac{x_1}{x}} e^{\frac{1}{2x_1}(x - at)}$$

Elle atteint sa valeur maximum $H \frac{x_1}{x}$ à l'instant $t = \frac{x - x_1}{a}$. Comme les sections du cône sont proportionnelles à x^2 , on a :

$$\frac{x_1}{x} = \sqrt{\frac{S_1}{S}} \quad \text{et} \quad h_{max} = H \sqrt{\frac{S_1}{S}}.$$

C'est là le résultat trouvé au paragraphe 2. Ensuite, h décroît exponentiellement. Dans la partie cylindrique de la conduite, la pression est :

$$(16) \quad h = H + f(x + at) = e^{\frac{1}{2x_1}(x - at)} H e^{-\frac{1}{2x_1}(x + at)} \quad (x < x_1).$$

Elle est constamment égale à H jusqu'au temps $t = \frac{x_1 - x}{a}$ et décroît ensuite exponentiellement. Si le cône est très ouvert, x_1 est petit, et l'exponentielle décroît très rapidement. A la limite, $x_1 = 0$, elle disparaît complètement, et l'onde réfléchie f se réduit à : $f = -H$: c'est la réflexion totale avec changement de signe de la théorie classique.

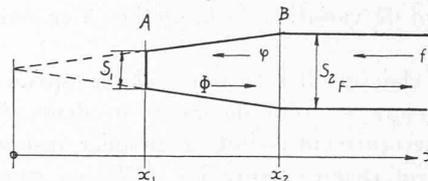


Fig. 3. — Conduite terminée par un tronc de cône.

Comme second exemple, nous choisirons une conduite terminée par un tronc de cône fermé à sa plus petite extrémité, par exemple un collecteur d'usine dont toutes les vannes sont fermées (fig. 3). L'onde incidente se propage ici de droite à gauche, et sera désignée par $f = H$. Pour simplifier les notations nous introduirons deux nouvelles variables

$$z = \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{at}{L}.$$

Ceci revient à choisir L comme unité de longueur et $\frac{L}{a}$ comme unité de temps. $\frac{L}{a}$ est le temps nécessaire à une onde de pression pour parcourir la longueur L . Les équations prendront alors la forme :

A) Dans la conduite cylindrique :

$$(17) \quad \begin{cases} h = F(z - \theta) + H \\ v = \frac{g}{a} [F(z - \theta) - H]. \end{cases}$$

B) Dans le cône :

$$(18) \quad \begin{cases} h = \frac{L}{z} [\Phi'(z - \theta) + \Phi'(z + \theta)] \\ v = \frac{Lg}{az} [\Phi'(z - \theta) - \Phi'(z + \theta)] - \frac{Lg}{az^2} [\Phi(z - \theta) - \Phi(z + \theta)]. \end{cases}$$

C) A l'extrémité du cône en $A, z = z_1$, on aura évidemment $v = 0$. Donc :

$$(19) \quad 0 = z_1 \Phi'(z_1 - \theta) - z_1 \Phi'(z_1 + \theta) - \Phi(z_1 - \theta) + \Phi(z_1 + \theta).$$

En B) $z = z_2$, les 2 conditions :

$$(20) \quad \begin{cases} F(z_2 - \theta) + H = \frac{L}{z_2} [\Phi'(z_2 - \theta) + \Phi'(z_2 + \theta)] \\ F(z_2 - \theta) - H = \frac{L}{z_2} [\Phi'(z_2 - \theta) - \Phi'(z_2 + \theta)] - \frac{L}{z_2^2} [\Phi(z_2 - \theta) - \Phi(z_2 + \theta)] \end{cases}$$

doivent être réalisées, car en ce point commun au cône et au cylindre, h et v doivent satisfaire simultanément aux équations (17) et (18). Les 3 équations (19) et (20) permettent de calculer les 3 fonctions Φ, φ et F . Éliminons F , il reste :

$$(21) \quad 2z_2^2 \frac{H}{L} = 2z_2 \Phi'(z_2 + \theta) - \Phi(z_2 + \theta) + \Phi(z_2 - \theta).$$

Il n'y a tout d'abord pas d'onde réfléchie dans le cône : $\Phi = 0$. L'équation (21) prend la forme

$$(22) \quad 2z_2^2 \frac{H}{L} = 2z_2 \phi_1'(z_2 + \theta) - \phi_1(z_2 + \theta)$$

et peut s'intégrer immédiatement, définissant ainsi la fonction ϕ_1 . Il est clair que cette solution cesse d'être valable au bout d'un temps $t = \frac{2L}{a}$, lorsque l'onde directe réfléchie au fond du cône est de retour en B. Cette onde réfléchie Φ_2 est définie par l'équation (19); elle permet de calculer une nouvelle fonction ϕ_3 valable pour une nouvelle période $t = \frac{2L}{a}$. On peut donc établir le système suivant d'équations différentielles, valables chacune pendant un temps $t = \frac{2L}{a}$:

$$\begin{aligned} 0 < \theta < 2; z = z_2; \quad \alpha &= 2z_2 \phi_1'(z_2 + \theta) - \phi_1(z_2 + z) \\ 1 < \theta < 3; z = z_1; \quad 0 &= z_1 \phi_2'(z_1 - \theta) - z_1 \phi_1'(z_1 + \theta) - \\ &\quad - \Phi_2(z_1 - \theta) + \phi_1(z_1 + \theta) \\ 2 < \theta < 4; z = z_2; \quad \alpha &= 2z_2 \phi_3'(z_2 + \theta) - (\phi_2 + \theta) + \\ &\quad + \Phi_2(z_2 - \theta) \\ 3 < \theta < 5; z = z_1; \quad 0 &= z_1 \phi_4'(z_1 - \theta) - z_1 \phi_3'(z_1 + \theta) - \\ &\quad - \Phi_4(z_1 - \theta) + \phi_3(z_1 + \theta). \\ \dots \dots \dots \\ 2n - 1 < \theta < 2n + 1; z = z_1; \\ 0 &= z_1 \phi_{2n}'(z_1 - \theta) - z_1 \phi_{2n-1}'(z_1 + \theta) - \Phi_{2n}(z_1 - \theta) + \\ &\quad + \phi_{2n-1}(z_1 + \theta) \\ 2n < \theta < 2n + 2; z = z_2; \\ \alpha &= 2z_2 \phi_{2n+1}'(z_2 + \theta) - \phi_{2n+1}(z_2 + \theta) + \Phi_{2n}(z_2 - \theta) \\ (23) \quad \alpha &= 2z_2^2 \frac{H}{L} \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Le mouvement est donc régi par une suite d'équations différentielles successives, reliées chacune à la précédente et comparable aux « séries enchaînées » d'Allievi.

On vérifie que l'intégrale générale du système est de la forme :

$$(24) \quad \Phi = e^{-\frac{z-\theta}{2z_2}} [\text{polyn. en } (z-\theta)] + e^{-\frac{z-\theta}{z_1}} [\text{polyn. en } (z-\theta)]$$

$$(25) \quad \phi = e^{-\frac{z+\theta}{2z_2}} [\text{polyn. en } (z+\theta)] + e^{-\frac{z+\theta}{z_1}} [\text{polyn. en } (z+\theta)].$$

Les coefficients des polynômes se déterminent par récurrence. Les calculs sont faciles, mais deviennent rapidement fastidieux. Il est d'ailleurs inutile de les pousser très loin, car, comme va le montrer un exemple numérique, la pression maxima est atteinte au fond du cône pour $\theta = 1$, et, à l'entrée pour $\theta = 2$. Lorsque θ dépasse la valeur 2, cette pression se rapproche rapidement par oscillations successives de la valeur limite $2H$ que prévoit la théorie classique. Remarquons encore que pour une valeur donnée de θ , les fonctions ϕ et Φ ne dépendent que de z_1 et z_2 , donc de S_1 et S_2 , puisqu'on a

$$(26) \quad z = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$$

La pression est donc indépendante de la forme du cône, qui peut être plus ou moins aigu. Par contre, la durée en seconde de l'unité de temps $\frac{L}{a}$ est directement proportionnelle à la longueur L . Dans deux cônes dont le rapport des sections extrêmes est le même, mais la longueur différente, les pressions maxima seront identiques, seulement dans le cône le plus allongé il s'écoulera un temps plus long jusqu'à ce que la pression limite soit atteinte. Rappelons que ces calculs ne sont valables que lorsque la variation de section est lente, plus exactement lorsque la calotte sphérique découpée par le cône peut être confondue avec le plan normal à l'axe; dans ces conditions seulement pressions et vitesses seront approximativement constantes sur une section, ce que nous avons implicitement admis en écrivant les équations fondamentales où seules interviennent l'abscisse et le temps à l'exclusion d'autres coordonnées.

Choisissons pour un exemple numérique $z_1 = 1$ $z_2 = 2$. Ceci correspond à peu près au collecteur d'une usine à 4 turbines, dont toutes les vannes seraient fermées. Le rapport des sections à l'entrée et au fond est :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \alpha e^{-\frac{1}{2} e^{\frac{1}{4}(z+\theta)}} - \alpha \\ \Phi_2 &= \frac{3}{5} \alpha e^{-\frac{1}{4}(z-\theta)} + \frac{2}{5} \alpha e^{-(z-\theta)} \\ \phi_3 &= \alpha e^{\frac{1}{4}(z+\theta)} \left[e^{-\frac{1}{2}} + \frac{38}{25} e^{-1} - \frac{3}{20} e^{-1}(z+\theta) \right] + \\ &\quad + \frac{2}{25} \alpha e^4 e^{-(z+\theta)} - 2\alpha \end{aligned}$$

etc. . . .

et les pressions h à l'entrée et au fond du cône seront à divers instants :

$\theta=0$	1	2	3	4...∞
en A $h=0$	$0 \div 4H$	$2,211H$	$1,75H$ $2,0H$
en B $h=0-H$	$1,28H$	$1,65H \div 2,65H$	$2,054$	$1,874$ $2,0H$

L'allure générale de la pression en A et B est indiquée sur la figure 4.

Les valeurs extrêmes sont, comme nous l'avons signalé plus haut, atteintes pour $\theta = 1$ et $\theta = 2$. Elles sont d'une manière générale exprimées par les équations :

$$(27) \quad \text{en A} \quad h_{max} = 2H \frac{z_2}{z_1} = 2H \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$$

$$(28) \quad \text{en B} \quad h_{max} = H(1 + e^{\frac{1}{z_2}}) = H \left(1 + e^{\frac{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}} \right)$$

Ces valeurs sont reportées dans la figure 5 en fonction du rapport des sections extrêmes $\frac{S_2}{S_1}$.

Ainsi, le cône provoque une concentration de l'onde incidente sur le fond et par contre-coup une surcharge

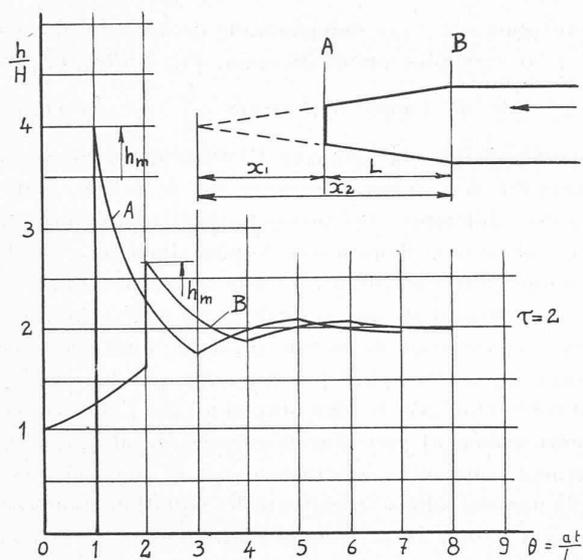


Fig. 4. — Variation en fonction du temps de la surpression due à une onde à front raide dans un tronç de cône obturé à son extrémité.

sensible à l'entrée où la pression maximum dépasse nettement la valeur $2H$ que donnerait la théorie d'Allievi. D'après l'équation (27), si la section S_1 tend vers zéro, en se rapprochant du sommet du cône, la pression en ce point tend à devenir infinie. Mais nos formules cessent bien auparavant d'être valables, puisqu'elles supposent expressément la petitesse des ondes de pression, et négligent le frottement dont l'influence devient prépondérante si la section de la conduite est très petite. Les plus fortes charges restent localisées au fond du cône ; à l'entrée, la pression ne dépassera jamais $H(1 + e) = 3,718H$, valeur atteinte lorsque le rapport des sections $\frac{S_2}{S_1}$ est infini.

L'onde réfléchiée F dans la conduite cylindrique est donnée par la première des équations (20). On en déduit que les pressions mesurées à l'entrée du cône se transmettront à toute la partie cylindrique de la conduite, qui se trouvera donc dans notre exemple sollicitée par une charge $2,65H$ au lieu de $2H$, ainsi que l'indique la théorie usuelle.

(A suivre.)

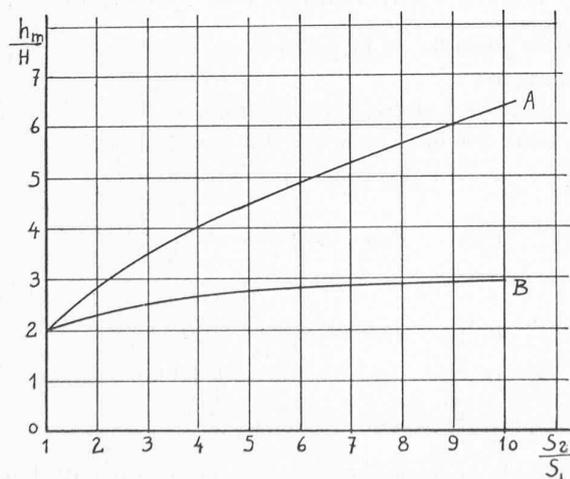


Fig. 5. — Valeurs maxima de la surpression en fonction du rapport des sections extrêmes.

LES PROBLÈMES DE L'HEURE

Le chauffage à distance

par P. MEYSTRE, ingénieur,
Chef du Service de l'Electricité, Lausanne.

I. — Considérations générales.

Il est devenu un lieu commun de constater que notre pays souffre d'une insuffisance marquée de combustible, qu'il soit solide ou liquide. Nous sommes obligés de nous avouer que dans le cas le plus favorable, la moitié de nos besoins pourra être couverte durant la saison de chauffage qui vient de commencer. Des prévisions à plus longue échéance ne sont guère plus optimistes ; les mines produisent moins, les transports deviennent difficiles.

La nécessité nous impose impérieusement d'économiser le combustible, d'utiliser avec le maximum de rendement celui dont nous disposons.

Le *Bulletin technique* du 21 septembre relevait (p. 203) que la consommation domestique représente annuellement pour notre pays 1250 milliers de tonnes de charbon, et que les pertes dans les foyers domestiques sont extrêmement importantes. L'auteur de l'article en question donne toute une série de moyens propres à diminuer les pertes qu'il énumère.¹

Ces moyens ne s'appliquent guère ou mal aux chauffages domestiques et, en pratique, il nous paraît qu'on ne peut que difficilement compter sur une amélioration sensible du fonctionnement des chaufferies d'immeubles.

Le problème se complique encore du fait qu'il n'est plus possible d'obtenir les qualités de combustibles correspondant à nos besoins. Nous devons nous contenter de ce qui nous est livré et d'en tirer le meilleur parti. Cela implique l'adaptation des chaufferies, grilles, etc., adaptation qui n'est généralement pas possible dans les chaufferies domestiques, lesquelles restent très souvent des « gaspilleurs » de calories.

Et c'est ainsi que se pose la question : Comment remédier à ces inconvénients majeurs : qualité du combustible et gaspillage ?

Il est aisé de répondre qu'il est actuellement possible de brûler n'importe quel combustible, si mauvais soit-il, à condition de choisir une chaudière adéquate, et qu'on peut le faire avec un rendement satisfaisant en équipant sa chaufferie de tous les perfectionnements actuellement tout à fait au point, tels que économiseurs, réchauffeurs d'air, alimentation automatique, contrôle continu de la combustion, etc., etc.

Certainement, mais ceci n'est possible que pour de grosses chaudières, pour des chaufferies industrielles, ce qui conduit, en fait, à la centralisation de la production de la chaleur.

II. — Le chauffage urbain.

Si ce problème est éminemment actuel, il ne s'est pas posé seulement dans les temps difficiles que nous traversons. Depuis très longtemps, on a recherché des méthodes

¹ Restrictions et économies dans le domaine de l'énergie par Ed. Delley, ingénieur, Fribourg. (Réd.)