Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 67 (1941)
Heft: 23

Artikel: Théorie de l'équilibre des corps élasto-plastiques
Autor: Colonnetti, Gustave
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51348

67e année — 15 novembre 1941 — N° 23

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale. —

Théorie de l'équilibre des corps élasto-plastiques

par M. GUSTAVE COLONNETTI,
Membre de l'Académie Pontificale des Sciences,
Professeur à l'Ecole Polytechnique de Turin.

(Suite et fin)[1].

VII. Le deuxième principe de réciprocité.

Cet exposé de la théorie de l'équilibre élasto-plastique ne serait pas complet si je ne disais pas un mot du calcul des déplacements permanents, que tout phénomène plastique détermine, et qui sont même la seule manifestation du phénomène que l'on puisse observer directement.

En réalité, ces déplacements permanents peuvent être calculés à l'aide d'un théorème que j'ai dénommé « le deuxième principe de réciprocité », parce qu'il tient dans cette nouvelle théorie la même place que, dans la théorie classique de l'élasticité, le principe de réciprocité découvert par Maxwell et par Betti.

Pour démontrer ce théorème, il faut prendre en considération, et comparer entre eux, deux états différents d'équilibre du corps.

L'un est l'état dans lequel le corps se trouve sous l'action d'un système donné de forces extérieures. L'autre sera, par contre, l'état qui est déterminé dans le corps par un système donné de déformations plastiques.

[1] Fin de la troisième des conférences données à Lausanne par M. le professeur Colonnetti, les 9 et 10 mai 1941, et organisées par l'*Ecole d'ingénieurs* de l'Université, avec le concours de l'Association des anciens élèves de l'E. I. L., de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes et du groupe des Ponts et Charpentes de la Société suisse des ingénieurs et des architectes. Voir *Bulletin technique* des 28 juin, 20 septembre et 18 octobre 1941.

Pour fixer les idées, nous supposerons que les forces extérieures qui doivent déterminer le premier état soient appliquées aux éléments de volume dV.

Soient

$$F_x \qquad F'_y \qquad F'_z$$

les composantes de ces forces rapportées à l'unité de volume,

$$\sigma'_x \qquad \sigma'_y \qquad \sigma'_z \qquad \tau'_{yz} \qquad \tau'_{zx} \qquad \tau'_{xy}$$

les composantes spéciales de tensions déterminées par elles dans le corps,

$$\varphi \quad (\sigma'_x, \quad \sigma'_y, \quad \sigma'_z, \quad \tau'_{yz}, \quad \tau'_{zx}, \quad \tau_{xy})$$

l'énergie potentielle élastique élémentaire, et

$$\epsilon'_x = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_x}\right)' \qquad \epsilon'_y = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_y}\right)' \qquad \epsilon_z = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_z}\right)'$$

$$\gamma'_{yz} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{yx}}\right)' \qquad \gamma'_{zx} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{zx}}\right)' \qquad \gamma'_{xy} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{xy}}\right)'$$

les composantes correspondantes de la déformation.

Quant au second état, nous le supposerons défini par les six composantes de la déformation plastique

$$\bar\epsilon_x \qquad \bar\epsilon_y \qquad \bar\epsilon_z \qquad \bar\gamma_{yz} \qquad \bar\gamma_{zx} \qquad \bar\gamma_{xy}$$

Soient alors

$$\sigma_x \qquad \sigma_y \qquad \sigma_z \qquad \tau_{yz} \qquad \tau_{zx} \qquad \tau_{xy}$$

les composantes spéciales de tension qui caractérisent l'état de coaction qui en découle,

$$\varphi \quad (\sigma_x, \ \sigma_y, \ \sigma_z, \ \tau_{yz}, \ \tau_{zx}, \ \tau_{xy})$$

l'énergie potentielle élastique élémentaire,

$$\epsilon_x = \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_x} \qquad \epsilon_y = \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_y} \qquad \epsilon_z = \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{yz}} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{zx}} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{xy}}$$

les composantes correspondantes de la déformation élastique, et

$$u \qquad v \qquad w$$

les composantes du déplacement total, c'est-à-dire du déplacement déterminé par la superposition des déformations plastiques et des déformations élastiques qui les accompagnent ; composantes liées aux six composantes de la déformation par les six relations

$$\epsilon_x + \overline{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \epsilon_y + \overline{\epsilon}_y = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \epsilon_z + \overline{\epsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz}+\overline{\gamma}_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z} \qquad \gamma_{zx}+\overline{\gamma}_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \gamma_{xy}+\overline{\gamma}_{xy}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

Tout cela posé, on appliquera le théorème des travaux virtuels en adoptant, pour exprimer les conditions d'équilibre des forces agissant sur l'un des états, la variation de configuration qui caractérise l'autre.

On obtient ainsi, dans un cas

$$\int_V (F'_x u + F'_y v + F'_z w)\, dV) =$$

$$= \int_V \left[\sigma'_x\,(\epsilon_x + \overline{\epsilon_x}) + \sigma'_y\,(\epsilon_y + \overline{\epsilon_y}) + \ldots + \tau'_{xy}\,(\gamma_{xy} + \overline{\gamma}_{xy})\right] dV$$

et dans l'autre

$$\int_V (\sigma_x\,\epsilon'_x + \sigma_y\,\epsilon'_y + \ldots + \tau_{xy}\,\gamma'_{xy})\, dV = 0$$

Or on peut très facilement démontrer que, φ étant une fonction quadratique,

$$\sigma_x\,\epsilon'_x + \sigma_y\,\epsilon'_y + \ldots + \tau_{xy}\,\gamma'_{xy} = \sigma'_x\,\epsilon_x + \sigma'_y\,\epsilon_y + \ldots + \tau'_{xy}\,\gamma_{xy}$$

La seconde des équations que nous venons d'établir pourra donc s'écrire

$$\int_V (\sigma'_z\,\epsilon_x + \sigma'_y\,\epsilon_y + \ldots + \tau'_{xy}\,\gamma_{xy})\, dV = 0$$

Après quoi la première équation devient

$$\int_V (F'_x u + F'_y v + F'_y w)\, dV =$$

$$= \int_V (\sigma'_x\,\overline{\epsilon}_x + \sigma'_y\,\overline{\epsilon}_y + \ldots + \tau'_{xy}\,\overline{\gamma}_{xy})\, dV$$

Ce résultat peut s'énoncer sous la forme suivante :

« *L'intégrale, étendue à tout le corps, de la somme des produits des composantes de la déformation plastique par les composantes spéciales de tension correspondantes dues à un système quelconque de forces extérieures, est égale au travail que ces forces extérieures accompliraient dans le changement de configuration auquel donne lieu la déformation plastique.* »

Faisons maintenant l'hypothèse que le système de forces extérieures, dont l'action détermine le premier état d'équilibre, se réduise à une force unique d'intensité unitaire appliquée en un point donné du corps suivant une direction donnée.

Le deuxième membre de l'équation se réduit alors à l'expression du travail que cette force accomplirait dans le changement de configuration déterminé par le système donné de déformations plastiques.

Dans ces conditions un même nombre mesure évidemment le travail et la composante du déplacement du point considéré dans la direction choisie.

Le théorème devient :

« *Le déplacement d'un point quelconque du corps, dans une direction donnée, dû à un système de déformations plastiques, est égal à l'intégrale, étendue à tout le corps, de la somme des produits des composantes de la déformation plastique par les composantes correspondantes de l'état de tension déterminé dans le même corps par une force unitaire supposée appliquée en ce point et suivant cette direction.* »

Ce théorème est valable non seulement dans le cas des déformations plastiques dont nous nous occupons ici, mais aussi dans le cas bien plus général de déformations imposées absolument quelconques. Je l'avais énoncé sous cette forme pour la première fois en 1912 ; sa démonstration a été améliorée en 1915.

Dans le cas des corps parfaitement élastiques, ce théorème s'est montré un utile point de départ de la théorie des lignes d'influence des tensions intérieures.

Dans le cas des corps en régime élasto-plastique, il pourra aussi bien servir de base à une théorie des lignes d'influence des déformations permanentes.

Considérons en effet la poutre cylindrique ou prismatique dont nous avons parlé à maintes reprises, et proposons-nous d'en caractériser les déformations au moyen du déplacement δ qu'un point quelconque de la poutre subit — dans une direction choisie d'avance — en conséquence d'un système donné de déformations plastiques $\overline{\epsilon}_z$.

Du fait que, des différentes composantes de la déformation plastique, une seule est par hypothèse différente de zéro, il s'ensuit que l'expression du déplacement peut s'écrire sous la forme

$$\delta = \int_V \sigma'_z\,\overline{\epsilon}_z\, dV$$

où σ'_z est la tension normale déterminée sur une section droite quelconque de la poutre par la force $F' = 1$ appliquée dans le point duquel on cherche le déplacement et dans la directions selon laquelle ce déplacement doit être évalué.

Evidemment, on exprime la tension par

$$\sigma'_z = \frac{\mathfrak{N}'}{A} + \frac{\mathfrak{M}'y}{J}$$

si $\mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{M}'$ sont, comme d'habitude, l'effort normal et le moment de flexion que la force $F' = 1$ produit dans la section considérée.

En introduisant les expressions bien connues de la dilatation plastique $\overline{\lambda}$ et de la courbure plastique $\overline{\mu}$ dues au système donné de déformations plastiques, on aura en définitive

$$\delta = \int_z (\mathfrak{M}'\overline{\lambda} + \mathfrak{M}'\overline{\mu})\, dz$$

L'application de cette formule est immédiate.

Prenons par exemple le cas d'une poutre simplement appuyée (fig. 22), ou bien rigidement encastrée à ses bouts (fig. 23).

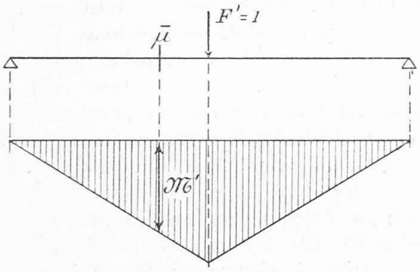

Fig. 22.

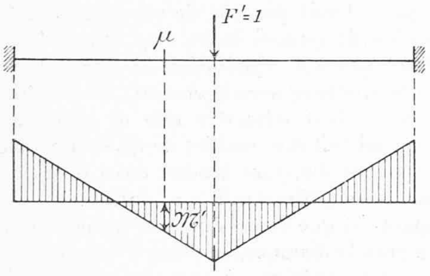

Fig. 23.

Et supposons que, sous l'action d'une condition de charge bien déterminée, la limite élastique du matériau soit atteinte dans certaines régions de la poutre, et que le calcul des déformations plastiques, et des valeurs de $\overline{\lambda}$ et $\overline{\mu}$ qui en dérivent, soit effectué.

Le déplacement, qui se produit dans un point quelconque de la poutre à la suite de ces déformations plastiques s'obtiendra en imaginant la force $F' = 1$ appliquée en ce point.

Si pour cette sollicitation $\mathfrak{N}' = 0$, on aura tout simplement

$$\delta = \int_z \mathfrak{M}'\overline{\mu}\, dz$$

Il suffit donc de considérer le diagramme des courbures plastiques $\overline{\mu}$ comme un diagramme de charge ; le diagramme des moments de flexion $\mathfrak{M}'$ dus à la sollicitation $F' = 1$ pourra alors s'interpréter comme ligne d'influence du déplacement δ.

Comparaison du coût de transmissions d'énergie à grande distance par courants continu et alternatif.

Il y a quelques semaines, la Société anonyme Brown, Boveri, & C[ie], *à Baden, fêtait le 50e anniversaire de sa fondation. A l'occasion de ce jubilé, elle convia en ses ateliers les représentants des milieux les plus divers de la technique et de la presse. Elle avait préparé, à l'intention de ses invités, des séances de démonstration d'un intérêt remarquable, illustrant avec une rare clarté la variété de la production de ses usines et précisant en outre les difficultés techniques qu'il fallut vaincre pour mener à chef la mise au point de quantité de machines et d'appareils du type le plus récent et spécialement adaptés aux exigences actuelles.*

Il n'est pas besoin de rappeler à nos lecteurs ce qui fit, au cours des dernières décades, la réputation de l'une des maisons qui honorent le plus notre industrie suisse. Le souci continuel d'innover et d'améliorer les produits de ses ateliers, l'importance qu'elle attache aux travaux de recherches de longue haleine ont permis à la Société Brown Boveri *d'acquérir une expérience incontestée dans une foule de domaines dont nous citons ici les principaux : Equipement électrique des locomotives, alternateurs, disjoncteurs, mutateurs, relais, turbines à vapeur, turbo-compresseurs, turbo-soufflantes, compresseurs, machines frigorifiques, installation de soudure à l'arc, turbines à gaz, fours électriques, etc.*

Nous ne saurions mieux faire, pour associer notre périodique aux témoignages d'estime dont furent l'objet les dirigeants, les cadres techniques et administratifs et le personnel de cette importante entreprise, que de reproduire ici l'essentiel de l'un des articles qu'a publiés la Revue B. B. C. *dans son numéro du jubilé, brochure entièrement consacrée au problème du transport à grande distance de l'énergie électrique* [1]. *Cette étude est due à la plume de M. Ch. Ehrensperger. (Réd.)*

I. *Généralités.*

Nous avons admis dans notre étude qu'une quantité d'énergie donnée est transmise d'une station émettrice, alimentée elle-même par plusieurs centrales, à une station réceptrice à partir de laquelle l'énergie est distribuée à un ou plusieurs réseaux de consommateurs. Nous admettons dans ce qui suit que le groupe de centrales alimentant la station émettrice, de même que les réseaux distributeurs alimentés par la station réceptrice, sont exploités à des tensions absolument indépendantes de celle de la ligne de transmission. La tension des groupes de centrales et des réseaux distributeurs a été fixée arbitrairement à 110 kV. Il a donc été nécessaire, dans

[1] Nous trouvons au sommaire de cette publication : Introduction. Comparaison du coût de transmissions d'énergie à grande distance par courants alternatif et continu. Le problème de la stabilité des transmissions à grande distance par courant triphasé. Considérations techniques et économiques sur les lignes électriques aériennes. Application de la construction articulée aux lignes à très haute tension. Réalisations modernes de transmission d'énergie électrique par courant alternatif. Disjoncteur ultra-rapide à courant alternatif à pouvoir de coupure très élevé, pour très hautes tensions. Mise à la terre du neutre dans les réseaux à courant alternatif à très haute tension (superréseaux). Phénomènes d'arcs à la terre dans une ligne de transport d'énergie en courant continu avec point milieu isolé. La terre utilisée comme conducteur de retour dans la transmission d'énergie à grande distance. Le circuit magnétique des transformateurs de grande puissance pour très haute tension. Dispositif pour la mesure de la tension aux bornes d'un transformateur. Le couplage des transformateurs pour la transmission d'énergie par courant continu à très haute tension. Mutateur à vide très poussé pour la transmission d'énergie à courant continu. Mutateur de grande puissance pour la transmission d'énergie par courant continu. Disposition d'une station d'extrémité pour la transmission à grande distance d'énergie électrique à haute tension. Les harmoniques des transmissions à haute tension continue. Données expérimentales sur la première ligne de transport d'énergie Wettingen-Zurich. Le problème des télécommunications et transmissions de signaux.