

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 69 (1943)  
**Heft:** 13

**Artikel:** Poutres et dalles sur appuis élastiques: platelages de ponts en béton armé  
**Autor:** Paris, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-52518>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE

## DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

## ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 13.50 francs

Etranger : 16 francs

## Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 11 francs

Etranger : 13.50 francs

## Prix du numéro :

75 centimes.

## Pour les abonnements

s'adresser à la librairie

F. Rouge & C<sup>o</sup>, à Lausanne.

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : M. IMER, à Genève ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg* : MM. L. HERTLING, architecte ; P. JOYE, professeur ; *Vaud* : MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. ELSKES, ingénieur ; EPITAUX, architecte ; E. JOST, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; CH. THÉVENAZ, architecte ; *Genève* : MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. MARTIN, architecte ; E. OPIER, architecte ; *Neuchâtel* : MM. J. BÉGUIN, architecte ; R. GUYE, ingénieur ; A. MÉAN, ingénieur ; *Valais* : M. J. DUBUIS, ingénieur ; A. DE KALBERMATTEN, architecte.

REDACTION : D. BONNARD, ingénieur, Case postale Chauderon 475, LAUSANNE.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE  
A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; M. IMER.

## Publicité :

## TARIF DES ANNONCES

Le millimètre

(larg. 47 mm.) 20 cts.

Tarif spécial pour fractions de pages.

En plus 20 % de majoration de guerre.

Rabais pour annonces répétées.



ANNONCES-SUISSES S.A.

5, Rue Centrale,

LAUSANNE

&amp; Succursales.

SOMMAIRE : *Poutres et dalles sur appuis élastiques. Platelages de ponts en béton armé*, par A. PARIS, ingénieur, professeur à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne. — *Société suisse des ingénieurs et des architectes : Rapport de gestion pour l'année 1942 (suite)*. — *Association amicale des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne : Assemblée générale annuelle*. — NÉCROLOGIE : *André Chevalley, ingénieur*. — BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT.

## Poutres et dalles sur appuis élastiques.

### Platelages de ponts en béton armé.

par A. PARIS, ingénieur, professeur à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne.<sup>1</sup>

L'étude habituelle de la dalle d'un tablier de pont, d'un plancher sous forte surcharge, d'un pont droit par exemple, se présente au fond comme une émanation directe de la conception ancienne : des planches parallèles posées côte à côte sans interdépendance, ou des fers Zorès enrobés d'un béton quelconque, le tout reposant sur des poutres dont la flexibilité est réputée si faible, qu'on peut négliger les effets de la déformation sur les organes portés. Du reste, même si cette flexibilité des appuis de la dalle augmente sensiblement ses moments fléchissants, ou même renverse ses signes, les matériaux homogènes, tels que le bois ou le fer, peuvent supporter l'excès de contrainte, vu la lointaine approximation du calcul de résistance.

Le cas de la dalle en béton armé diffère profondément de cette conception ancienne. Sa *solidarité avec les sommiers*, qui la portent, se manifeste tant par l'entraînement des poutres dans ses rotations, qui leur sont transversales, que par l'égale flexion longitudinale des éléments unis. La tranche de dalle, isolée dans l'épure, entraîne ainsi dans sa flexion celle du platelage complet, lui imposant des contraintes hors charge, auxquelles répondent d'importants soulagements du secteur chargé ;

<sup>1</sup> Conférence faite le 27 février 1943, à Lausanne, devant les membres du Groupe des ponts et charpentes de la Société suisse des ingénieurs et des architectes.

la flexibilité des sommiers d'appui est fonction du cas de charge, facteur difficile à introduire à l'épure ; on en tient compte en concevant une *flexibilité moyenne du sommier* d'appui, évaluée sur la base du cas de charge le plus dangereux pour l'ensemble. Il y a ici un élément de sécurité supplémentaire, qui profite à la dalle considérée comme solidaire d'appuis un peu plus flexibles qu'ils ne le sont en réalité.

La résistance des sommiers à la *torsion* introduit un facteur d'encastrement des dalles, qu'on néglige en général faute de pouvoir le chiffrer de manière assez satisfaisante pour justifier la complication apportée au calcul. Ce soulagement ne doit pas être insignifiant, en période élastique du moins, puisque la localisation des charges diminue proportionnellement l'angle de rotation des sommiers.

Un *renversement du signe des moments résultants* peut se produire dans les régions d'appuis, où l'armature reste double, partiellement au moins. Dans l'exemple concret, dont nous citons plus loin des résultats, l'ordonnée positive de la ligne d'influence du moment sur premier appui intermédiaire atteint 120 % de l'ordonnée positive de la ligne relative à la section médiane, dans la travée de bord supposée sur appuis rigides ; l'ordonnée négative diminue par contre d'un bon tiers. On en conclut à la nécessité, au bas de la section d'appui, d'une armature droite équivalente à celle due aux moments positifs des travées sur appuis rigides ; on trouvera quand même l'armature montante nécessaire, puisque les moments positifs résultants dans la section médiane sont augmentés de moitié.

Le problème, que nous allons examiner en statique plane, est ainsi d'essence *spatiale*; le laboratoire de statique y a un champ d'étude intéressant.

Tel que posé néanmoins, le *problème plan* se résoud commodément grâce à la méthode du professeur Dr W. Ritter, basée sur l'emploi de l'*ellipse d'élasticité*. Cette méthode s'exprime par les étapes suivantes :

- 1) ellipses des éléments (travées et appuis isolés),
- 2) ellipses des nœuds,
- 3) ellipses finales des travées ou fractions de travées,
- 4) ellipses totales des points de charges localisées.

Tout barreau prismatique homogène possède une ellipse d'élasticité connue d'avance, et qui incarne les déformations de l'extrémité libre par rapport à l'autre extrémité, supposée encastree pour la commodité du calcul. Le barreau est ainsi stabilisé par les efforts mêmes entre lesquels il réalise l'équilibre. Si le système est instable en soi, comme l'est une travée de rive séparée du premier appui intermédiaire et librement appuyée à l'autre, son calcul revêt un aspect particulier. La première ellipse proprement dite calculée sera par conséquent celle du premier nœud intermédiaire complet. On opère ensuite en alternant encorbellements et coordinations, la première travée intermédiaire s'insérant dans l'appui muni de son ellipse, puis se combinant en un nœud solidaire avec l'appui, qui la termine. Cette alternance se poursuit d'une extrémité de la poutre à l'autre, d'abord de gauche à droite puis de droite à gauche.

Le premier élément de ce calcul consiste à définir un *indice d'élasticité des poutres d'appui*. Le professeur W. Ritter a défini la mesure du déplacement vertical élastique de la poutre, son « indice d'élasticité », par le quotient

$$\epsilon = \frac{E_d I_d}{a^3} \times \frac{w}{A}$$

formule où la première fraction concerne la dalle portée ( $E_d$  et  $I_d$  ses facteurs de raideur, et  $a$  sa portée théorique entre axes des poutres d'appui). Le rapport  $w/A$  représente le déplacement vertical subi par l'appui sollicité par une charge  $A$  unitaire; son expression habituelle

$$\frac{w}{A} = \frac{l^3}{n E_s I_s}$$

contient la portée  $l$ , la raideur  $E_s I_s$  du sommier, et un facteur  $1/n$  sans dimensions qui dépend du cas de charge; par exemple  $5/384 = 1/76,8$  pour le sommier simple et librement appuyé portant une charge uniformément répartie;  $1/384$  si cette même barre repose par encastrement rigide à ses insertions dans des massifs inébranlables.

L'indice d'élasticité s'exprime par conséquent, au milieu de la barre, par

$$\epsilon = \frac{1}{n} \times \frac{E_d \cdot I_d}{E_s \cdot I_s} \left( \frac{l}{a} \right)^3.$$

La raideur  $E_d \cdot I_d$  de la dalle portée intéresse toute sa longueur active sur le sommier, et non pas seulement la

largeur de la bande unitaire dont on fait le calcul de stabilité; l'indice  $\epsilon$  croît ainsi avec la longueur de la dalle attenante, c'est-à-dire la portée  $l$  si le profil à  $T$  de la poutre ne souffre d'aucune discontinuité.

Chiffrant le dénominateur  $n$  pour certains cas de charge et d'appuis déterminés, nous en déduirons une valeur pratique de l'indice  $\epsilon$  en nous fondant sur sa valeur moyenne le long de la travée d'appui

$$\epsilon_m = \frac{1}{l} \int_0^l \epsilon_x \cdot dx$$

nous réservant de graduer l'armature entre le milieu de la portée ( $\epsilon > \epsilon_m$ ) et les extrémités de la poutre ( $\epsilon = 0$ ). Une charge uniformément répartie  $p$  sur une poutre simple donne, à l'abscisse variable  $x$ , une flexion verticale (la raideur supposée constante)

$$E_s \cdot I_s \cdot w_x = \frac{P}{24} (+ i^3 \cdot x - 2 l \cdot x^3 + x^4)$$

d'où résulte l'indice local, pour  $P = p \cdot l$  et  $E_s = E_d = E$ ,

$$\epsilon_x = E \cdot \frac{w_x}{P} \times \frac{I_d}{a^3} = \frac{+ i^3 x - 2 l x^3 + x^4}{24 I_s l} \times \frac{I_d}{a^3}$$

qui donne, par intégration de 0 à  $l$ , l'indice moyen

$$\epsilon_m = \frac{1}{120} \times \frac{i^3}{a^3} \times \frac{I_d}{I_s} \text{ faisant } \frac{1}{n} = \frac{1}{120}.$$

Une charge concentrée au milieu de la même travée libre aurait donné  $\frac{1}{n} = \frac{1}{76}$ .

La liberté de rotation des appuis fait en général place, dans la construction du bâtiment, à une continuité mélangée d'encastrement, état connu mais indéfinissable mathématiquement; on gradue par conséquent le facteur d'insertion d'une manière qui peut être la suivante :

poutres de pont non continues	$n = 100$
sommiers partiellement encastres	$n = 150$
poutres continues	$n = 200$ et plus.

Ces définitions de l'indice de flexibilité, qui demandent une vérification expérimentale, conduisent dans quelques ouvrages exécutés, dont la littérature donne la description, aux valeurs relevées au tableau 1.

A ces quatre exemples, dont les bases proviennent du manuel d'Emperger, nous ajouterons des chiffres que le professeur *Hübner* a tirés de sa pratique du contrôle des ponts en Suisse <sup>1</sup>.

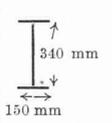
#### Ponts en béton armé.

(solidarité complète entre tablier et poutres maîtresses).

I. Cadres à deux jambes de force, profil 45.105 cm<sup>2</sup>, portée 17,50 m, entre-axes des 4 sommiers 1,70 m, dalle de 15 cm,

<sup>1</sup> Université de Lausanne. Ecole d'Ingénieurs. *Recueil de travaux publiés à l'occasion du quatrième centenaire*. Lausanne 1937. Edition Rouge & Co.

TABEAU I.

Nature	Poutres porteuses					Dalle		Indice	
	Portée	Entre axes	Profil	Inertie	<i>n</i>	Epaisseur	Inertie $\frac{l d^3}{12}$	$\epsilon$	Remarque
1. Principales margelles	m	m	cm × cm	m <sup>4</sup>		cm	m <sup>4</sup>		
	15,0 15,0	1,63 1,63	35 × 80 35 × 105	0,02670 0,04600	150 150	16 16	0,00513 0,00513	1,01 0,58	} béton armé
	$(\frac{l}{a})^3 = 790$		(raidissement pour entretoises)			$\frac{I_d}{I_s} = 0,193$ et $0,113$		mixte	
2. Longérons métal	3,10	1,42		10 × 0,00014	100	21	0,00240	0,177	béton armé
	$(\frac{l}{a})^3 = 10,5$					$\frac{I_d}{I_s} = 17,2$			
3. Principales	7,60	1,63	40 × 80	0,03035	100	20	0,00465	0,156	béton armé
	$(\frac{l}{a})^3 = 104$					$\frac{I_d}{I_s} = 0,154$			
4. Médiannes (continues) margelles	10,30 19,30	2,05 2,05	25 × 58 25 × 81	0,00890 0,01863	200 200	16 16(12)	0,00352 0,00352	0,252 0,121	n/exemple ci-après béton armé
	$(\frac{l}{a})^3 = 130$		(entretoises négligées)			$\frac{I_d}{I_s} = 0,397$ et $0,190$			

chaussée ballastée de 5,0 m de large entre garde-corps ; aucune entretoise :

indice d'élasticité  $\epsilon = 0,50$ .

II. Tablier de 25 cm d'épaisseur sans entretoises, porté par voûte élastique de 15 cm d'épaisseur et 1,70 m de montée, couvrant un vide de 16,8 m entre culées ; largeur 12,5 m. Dalle faisant corps avec la voûte sur le tiers médian de la portée ; indice très variable admis à

$\epsilon = 1,40$ .

III. Dalle de 20 cm, munie d'une nervure de raidissement médiane, et reposant sur 6 sommiers de 85 cm de hauteur totale, relativement massifs (largeurs cumulées environ le tiers de la largeur de 18,30 m du tablier) ; entre-axes des poutres 5 × 1,66 m ; portée des sommiers 10,0 m. Rapport des moments d'inertie

entretoise : poutre médiane : poutre bordure = 5 : 4 : 6

IV. Tablier fortement entretoisé (4 nervures raidissantes sur 17,0 m de largeur) porté par 8 cadres surbaissés de profil équivalent à celui des nervures (hauteur 80 cm). Portée des cadres principaux 16,50 m. Dalle de 22 cm

indice d'élasticité  $\epsilon = 8,50$  (cas exceptionnel).

*Ponts métalliques.*

(solidarité assurée si la dalle fait corps avec la membrure supérieure des poutres maîtresses).

V. Tablier de 19,60 m de largeur ; poutres maîtresses continues arquées de 26,5 m de portée principale ; dalle de 16 cm raidie par de nombreuses entretoises métalliques. Solidarité assurée par enrobage des têtes de poutres

indice de flexibilité  $\epsilon = 1,50$ .

L'indice d'élasticité  $\epsilon$ , déjà si inégal suivant les ouvrages, varie encore fortement le long des poutres d'appui, puisqu'il s'annule aux appuis des poutres porteuses ; l'étude du professeur *Hübner* donne, à cet égard, un diagramme sug-

gestif, que reproduit la figure 1 ; toutefois, malgré ces forts changements de  $\epsilon$ , la charge *A* supportée par la poutre directement surmontée reste à peu près constante dans la partie centrale de la portée (ses trois quarts environ) ; ce n'est que dans les régions extrêmes (le huitième environ de la longueur de la poutre), que la répartition des surcharges se rapproche rapidement de l'effet assuré par la poutre continue sur appuis fixes.

Basé sur ses mesures de déformations d'ouvrages existants, M. *Hübner* arrive à la conception suivante du calcul de la dalle.

Conformément au principe de la superposition, on considère d'abord les effets subis par la dalle censée reposer sur des appuis rigides. La tranche de dalle direc-

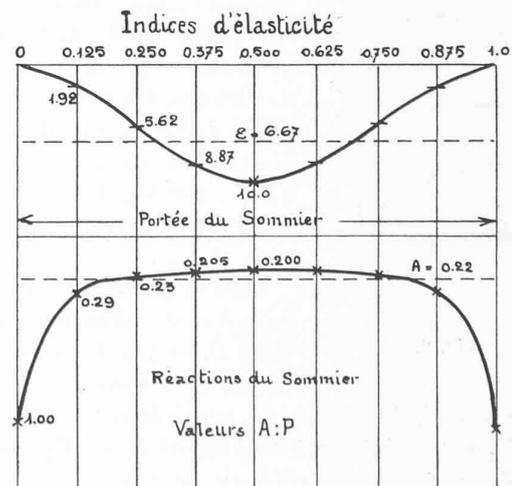


Fig. 1. — Indices d'élasticité et réaction des sommiers d'après M. le professeur *Hübner*.

tement intéressée par une charge isolée  $P$  est alors celle indiquée dans nos normes par le symbole  $b_3$ .

On ajoute ensuite l'effet de l'élasticité des poutres d'appui ; comme nous l'avons vu, cet effet intéresse le tablier en entier, c'est-à-dire qu'il se répartit sur toute la longueur de la travée porteuse en fonction des moments d'inertie des éléments considérés côte à côte, et des flexions qu'ils subissent individuellement. On répartit, durant cette seconde étape, l'excédent du moment fléchissant obtenu dans le cas des appuis élastiques sur celui dont il vient d'être question (appuis rigides).

Ce cumul se rapprochera d'autant plus du moment issu de l'épure d'élasticité, que les charges occuperont une longueur plus importante des poutres porteuses.

Le problème immédiat, celui de la dalle appuyée sur sommiers flexibles, s'introduit par la détermination des ellipses d'élasticité de la poutre continue.

On considérera désormais un secteur de dalle de largeur unitaire, un mètre par exemple, qui, soumis à des charges utiles proportionnées, provoquera des réactions des sommiers à la mesure des déplacements verticaux calculés en conformité des formules ci-dessus ; ce sera donc dans la supposition que la dalle entière agit d'un bout à l'autre de la poutre ; le secteur unitaire de dalle, introduit au calcul, participe ainsi seulement pour sa quote-part à la résistance élastique de l'ensemble.

La recherche des ellipses successives se trouve bien simplifiée par la rectitude des axes des pièces et l'immobilité admise de la poutre qui, seule capable de résister à l'action de forces longitudinales, contient tous les centres d'ellipses ; les forces verticales extérieures provoquent seulement des déplacements verticaux des points d'appui et des sections intermédiaires. La définition des ellipses se réduit ainsi à celle de leurs masses adjointes, de leurs axes longitudinaux, et de leurs centres alignés sur l'axe de la poutre continue, que forme le secteur de dalle considéré. L'aboutissement du tracé étant la connaissance des ellipses totales des points notés de la poutre continue, on commence l'étude de chacune des deux séries d'ellipses, de droite marquées en seconde (") et de gauche en prime ('), par le calcul de l'ellipse d'élasticité du premier nœud intérieur (fig. 2).

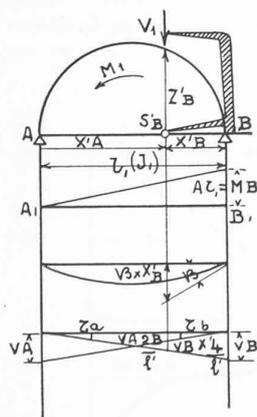


Fig. 2.

Celle-ci est définie par les indices d'élasticité des deux appuis  $A$  et  $B$ , et par la déformation propre de la travée.

Le centre  $S'_B$  de l'ellipse du nœud  $B$  se trouve sur une force  $V_1$  apte à infliger à l'extrémité  $B$  un déplacement parallèle. Si  $\beta$  représente l'angle de rotation de  $B$  dans la travée, et  $\tau_a$  et  $\tau_b$  les deux rotations de  $B$  dues aux déplacements des appuis, on a

La condition  $\beta + \tau_b - \tau_a = 0$  nous donne les abscisses de droite et de gauche du centre de l'ellipse

$$E \cdot J_1 \cdot \beta = M_B \cdot \frac{l_1}{3} = V_1 \frac{x'_B \cdot l_1}{3}$$

$$\tau_b = \frac{v_a}{l_1} = V_1 \frac{x'_B}{l_1} \times \frac{l_1}{E \cdot I_1} \times \epsilon_a = V_1 \times \frac{l_1 x'_B}{E \cdot I_1} \epsilon_a$$

$$\tau_a = \frac{v_b}{l_1} = V_1 \frac{x'_A}{l_1} \times \frac{l_1^2}{E \cdot I_1} \times \epsilon_b = V_1 \times \frac{l_1 x'_A}{E \cdot I_1} \epsilon_b$$

La condition  $\beta + \tau_b - \tau_a = 0$

nous donne les abscisses de droite et de gauche du centre de l'ellipse

$$x'_A \cdot \epsilon_b = x'_B \left( \epsilon_a + \frac{1}{3} \right) \quad x'_B = l - x'_A$$

c'est-à-dire

$$x'_B = l \frac{\epsilon_b}{\epsilon_a + \epsilon_b + \frac{1}{3}} \quad x'_A = l \frac{\epsilon_a + \frac{1}{3}}{\epsilon_a + \epsilon_b + \frac{1}{3}}$$

Un couple  $M_1$  agissant sur le centre  $S'_B$  supposé lié par un disque rigide à l'extrémité  $B$ , provoque en  $S'_B$  une rotation sans déplacement

$$\tau_s = M_1 \frac{l_1}{E \cdot I_1} \left( \epsilon_a + \epsilon_b + \frac{1}{3} \right)$$

égale au produit du couple par la masse adjointe

$$\tau_s = M_1 m'_B \quad \text{d'où résulte} \quad m'_B = \frac{l_1}{E \cdot I_1} \left( \epsilon_a + \epsilon_b + \frac{1}{3} \right)$$

Le déplacement parallèle  $v_B$  dû à la force centrée  $V_1$  donne ensuite le demi-axe longitudinal  $z'_B$  sous la forme

$$z'_B{}^2 = x'_A \cdot x'_B$$

grandeur que la figure donne dressée verticalement par le demi-cercle de Ritter.

L'ellipse du nœud intermédiaire  $B$  est ainsi connue. Elle conduit au calcul de l'ellipse finale du point  $C$  (fig. 3).

La travée elle-même se définit par son ellipse propre

$$m_2 = \frac{l_2}{E \cdot I_2} \quad x_2 = \frac{l_2}{2} \quad i_2 = l_2 \sqrt{\frac{1}{12}}$$

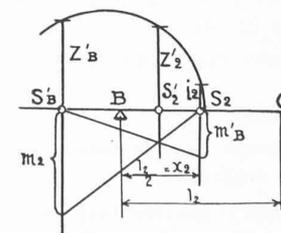


Fig. 3.

Sa masse adjointe s'ajoute simplement à celle du nœud  $C$  pour donner la masse adjointe du point extrême

$$m'_2 = m'_B + m_2$$

Le centre de gravité des deux masses donne le centre de l'ellipse, puis un demi-cercle, centré sur l'axe  $BC$  et passant par les extrémités des deux demi-axes  $z'_b$  et  $i_2$  donne le nouveau demi-axe  $z'_2$ , puisque ses deux départs sur  $BC$  sont en relation de pôle à antipolaire aussi bien relativement à  $z'_2$  qu'aux deux demi-axes  $z'_B$  et  $i_2$ .

L'ellipse du nœud  $C$  (fig. 4) résulte du concours de

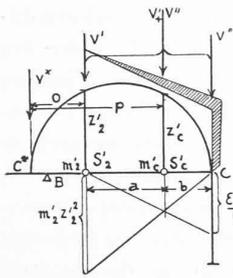


Fig. 4.

l'ellipse finale de gauche  $C'$  et de l'élasticité  $\epsilon_c$  de l'appui  $C$ . Le centre de l'ellipse du nœud  $S'_C$  se trouve sur la résultante de deux forces  $V'$  et  $V''$ , qui infligent séparément le même déplacement simple au point  $C$ ; la première agit par le centre  $S'_2$  de l'ellipse finale et la seconde porte sur l'appui élastique  $C$ ; les deux proportions

des déplacements égaux  $V' m'_2 z'^2_2 = V'' \frac{\epsilon_c l^3_1}{E I_1}$   
 et de l'équilibre  $V' \cdot a = V'' \cdot b$

justifient le tracé de la figure. Connaissant la verticale par le centre  $S'_C$ , on trace le demi-cercle  $C-C^*$  de Ritter, qui intercepte la longueur  $z'_c$  du demi-axe de l'ellipse. Une force  $V^*$  par  $C^*$ , donc antipolaire de  $C$  par rapport à  $S'_2$ , fait tourner l'extrémité  $C$  sur elle-même; il n'y a pas de réaction de l'appui, et l'on peut écrire, entre l'ellipse finale et celle du nœud, la relation

$$V^* \cdot m'_2 \cdot o = V^* \cdot m'_c \cdot p$$

ce qui donne la masse adjointe

$$m'_c = m'_2 \frac{o}{p}$$

Continuant ainsi jusqu'à l'appui extrême  $F$  de la poutre continue, nous établissons de proche en proche toutes les ellipses de gauche aux nœuds successifs. Repartant alors de  $F$ , nous déterminons pareillement la série des ellipses de droite.

Ceci fait, nous pouvons passer à l'étude de l'action des charges concentrées.

Une charge locale  $P$  agit directement sur un point quelconque de la poutre; son action se définit grâce à l'ellipse totale de ce point d'impact (fig. 5). Supposons cette ellipse connue; le déplacement du pied  $P$  se fera autour de l'antipôle  $P^*$  de  $P$  par rapport à l'ellipse totale.

Résultant des deux ellipses finales en présence, cette ellipse totale exprime leur solidarisation; les deux efforts tranchants  $Q'$  et  $Q''$ , de gauche et de droite, se placeront donc dans les antipolaires de  $P^*$  par rapport aux deux ellipses finales  $S'_p$  et  $S''_p$  des fractions de poutre de gauche et de droite, qui aboutissent en  $P$ .

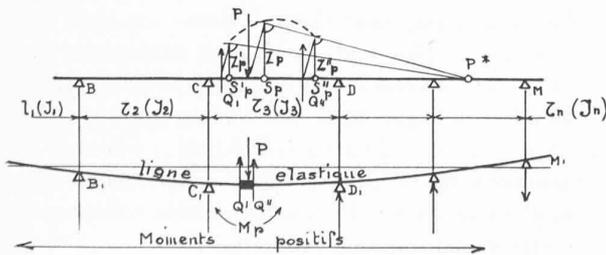


Fig. 5.

L'équilibre donnant la grandeur des deux efforts tranchants ainsi connus en position, le problème est désormais résolu par une succession de recherches d'antipôles et d'antipolaires dans les ellipses régressives des deux systèmes, contigus en  $P$ .

Deux cas se présentent alors. Ou bien le pied de la charge divise la poutre en deux fractions individuellement stables; ou bien, reposant sur une travée extrême, elle laisse d'un côté une partie instable appartenant à la dite travée de rive. Soit d'abord une charge localisée sur une travée intérieure (fig. 6).

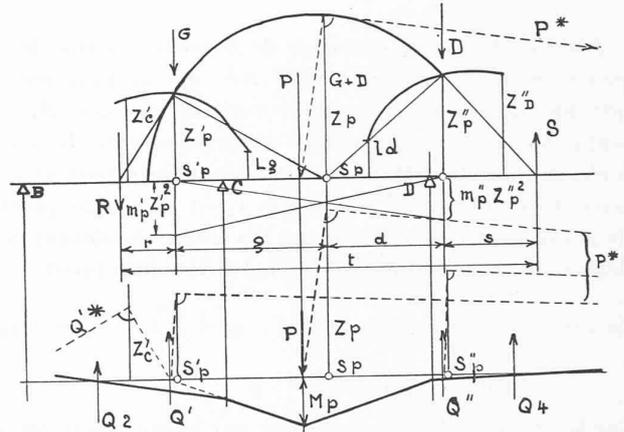


Fig. 6.

Deux forces verticales  $G$  et  $D$ , passant par les centres des deux ellipses finales en présence, produiront deux déplacements parallèles du pied de  $P$ , qu'on fera égaux; leur résultante passe par le centre  $S_p$  de l'ellipse totale. Nous avons la double proportion

déplacements égaux  $G \cdot m'_p \cdot z'^2_p = D \cdot m''_p \cdot z''^2_p$   
 équilibre  $G \cdot g = D \cdot d$

d'où résulte le tracé des diagonales dans l'épure.

Le demi-cercle de Ritter, passant par les extrémités de  $z'_p$  et  $z''_p$  intercepte le demi-axe  $z_p$  sur la verticale par le centre  $S_p$ . Alors deux rotations égales du point  $S_p$ , lié successivement aux deux fractions de poutre sollicitées par les forces  $R$  et  $S$  antipolaires de  $S_p$  dans les ellipses finales, permettent de calculer la masse adjointe de l'ellipse finale. Les forces  $R$  et  $S$  forment en effet un couple de moment  $R \cdot t$ .

Le moment, sur  $S'_p$  par exemple, donne alors les rotations égales pour  $R = 1$ ,

$$r \cdot m'_p = t \cdot m_p$$

d'où résulte la masse cherchée

$$m_p = m'_p \frac{r}{t} = m''_p \frac{s}{t}$$

bien plus petite naturellement que chacune de ses composantes.

Plaçons maintenant la charge  $P$  sur une travée extrême (fig. 7), la première  $AB$  par exemple.

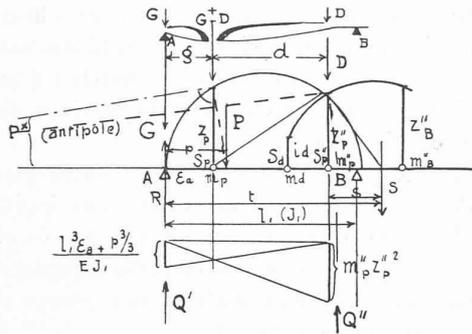


Fig. 7.

L'ellipse totale  $S_P$  participe de la portion stable de la poutre et de la partie instable  $AP$ , qui ne peut réagir que par des forces suivant la verticale d'appui  $A$ . Le centre  $S_P$  se place au passage de la résultante de deux forces  $G$ , par  $A$ , et  $D$ , par  $S''_P$ , aptes à infliger deux déplacements simples verticaux égaux  $v'_A$  et  $v''_P$  à leurs points de passage, et par conséquent à  $S_P$  à eux lié, puisque ces déplacements sont sans rotation. Le double rapport

$$\text{déplacements égaux } G \frac{1}{E \cdot I_1} \left( l_1^2 \epsilon_a + \frac{p^3}{3} \right) = D \cdot m''_P \cdot z''_P{}^2$$

équilibre  $G \cdot g = D \cdot d$

fixe la verticale du centre  $S_P$  soit par le calcul soit par le tracé des diagonales. Puis le demi-cercle de Ritter donne la longueur du demi-axe  $z_P$  redressé. Deux rotations égales du centre  $S_P$  tournant sur soi-même déterminent ensuite la masse adjointe totale grâce à l'abscisse de la force antipolaire  $S$  de  $S_P$  dans l'ellipse finale  $S''_P$ ; nous avons

$$m_P = m''_P \frac{s}{t}$$

puisque  $R$  et  $S$  forment un couple d'action sur l'ellipse totale.

L'antipôle  $P^*$ , de  $P$  par rapport à l'ellipse  $S_P$ , définit par son antipolaire  $Q''$  dans  $S''_P$  la position de l'effort tranchant de droite; celui de gauche passe par  $A$ .

Reste à examiner le cas d'une charge sur un appui.

C'est un cas limite qu'on résoud par une opération double, en considérant successivement deux sections immédiatement voisines de la charge, de part et d'autre de l'appui; les deux efforts tranchants, ainsi obtenus chacun d'une de ces opérations, laissent la grandeur de la réaction comme différence entre leur somme et la charge. Chaque opération donne en effet deux efforts tranchants, celui d'une travée et l'autre intéressant l'appui complexe, qui lui fait face; nous retenons successivement les deux efforts dans les travées représentées par leurs ellipses finales.

Si la charge se place sur un appui extrême, elle se confond avec la réaction du dit appui; l'effort tranchant de la travée se place dans la même verticale; l'égalité de déformation permet le calcul de la répartition de  $P$  entre ces deux efforts tranchants superposés.

Un cas particulier intéressant concerne la poutre à nombre illimité de travées égales.

La supposition naturelle d'appuis d'égale déformabilité a permis au professeur W. Ritter <sup>1</sup> d'établir des tableaux des moments trouvés, en vertu d'indices d'élasticité variant entre de larges limites. Nous retiendrons les chiffres qui intéressent plus spécialement le béton armé, et les comparerons à ceux obtenus par la méthode de l'ellipse totale; cette comparaison est possible sans réserve, car aucune différence ne subsiste entre les résultats des deux calculs en cas de symétrie parfaite. W. Ritter utilise les deux facteurs essentiels

$$\alpha = \sqrt{4 \left( \frac{i}{l} \right)^2 + 16 \epsilon} \quad \beta = \sqrt{1 + 4 \left( \frac{i}{l} \right)^2 + 2 \alpha}$$

qu'il introduit au calcul des réactions d'appuis et des moments fléchissants par les formules

Charge  $P$  au milieu d'une travée intérieure

$$M_P = \frac{2 \alpha + 1}{8 \beta} \cdot P \cdot l \quad (\text{milieu})$$

$$M_a = M_P - \frac{P \cdot l}{4} \quad (\text{appuis}),$$

Charge  $P$  sur un appui intérieur  $R$

$$M_R = \frac{4 \epsilon}{\alpha \cdot \beta} P \cdot l$$

$$M_{R-1} = M_{R+1} = \frac{\alpha - \beta - 1}{\alpha + \beta + 1} \times M_R.$$

Charge  $P$  au milieu d'une travée terminale

$$A = \frac{\alpha \cdot \beta + \alpha + 0,5}{(\alpha + \beta + 1) \beta + 8 \epsilon} \times P.$$

Complétées par le calcul des efforts tranchants successivement plus lointains, ces formules ont permis à W. Ritter l'établissement de tableaux largement limités, dont nous extrayons les chiffres de notre tableau II.

Les tableaux du professeur Dr W. Ritter donnent, pour les travées intérieures, pratiquement les mêmes efforts que l'épure, car la charge placée au milieu d'une travée introduit le cas de symétrie parfaite, qui repousse le centre de rotation à l'infini, assurant la concordance des résultats. L'emploi de ces tableaux contrôle les résultats de l'épure; il peut même conduire à l'établissement rapide des lignes d'influence des moments fléchissants et des efforts tranchants de la dalle continue sur appuis élastiques. On admet alors que les charges concentrées se répartissent uniformément sur la largeur  $b_2$  indiquée par l'Ordonnance, et ceci dans la position la plus désavantageuse. Comme notre exemple numérique le montre plus loin, le moment fléchissant issu de l'élasticité des poutres d'appui croît dans une proportion considérable, puisque nous le verrons passer, sous la roue de 8 t., de + 1,35 mt à + 2,93 mt.; toutefois cette augmentation déborde le secteur normalement intéressé en cas d'appuis fixes: elle touche la dalle entière grâce à la cuvette de déformation généralisée.

<sup>1</sup> W. Ritter. Der kontinuierliche Balken. Edition Raustein, Zurich.

TABLEAU II.

ε	Charge milieu travée					Charge appuis intermédiaires					
	Pied P M : Pl	Appuis voisins M : Pl    A : P		Appuis suivants M : Pl    A : P		Appui chargé M : Pl    A : P		Appuis voisins M : Pl    A : P		Appuis suivants M : Pl    A : P	
0	+ 0,171	- 0,079	+ 0,600	+ 0,021	- 0,127	0	+ 1	0	0	0	0
0,20	+ 0,264	+ 0,014	+ 0,429	- 0,058	+ 0,107	+ 0,189	+ 0,522	- 0,051	+ 0,250	- 0,040	+ 0,022
0,40	+ 0,303	+ 0,053	+ 0,381	- 0,066	+ 0,142	+ 0,241	+ 0,442	- 0,038	+ 0,256	- 0,060	+ 0,058
0,70	+ 0,342	+ 0,092	+ 0,343	- 0,066	+ 0,160	+ 0,289	+ 0,385	- 0,018	+ 0,252	- 0,074	+ 0,084
1,0	+ 0,370	+ 0,120	+ 0,319	- 0,061	+ 0,167	+ 0,323	+ 0,353	- 0,001	+ 0,245	- 0,079	+ 0,098

Si la dalle est homogène, dépourvue donc de nervures raidissantes, la répartition du supplément se fait suivant la fonction sinusoïdale de Fourier, sans autre calcul accessoire.

Si, au contraire, la dalle est munie de nervures de raidissement, le problème se complique un peu en suite des inégalités de raideur locale. Voici comment on peut le résoudre.

Basé sur la loi de Navier, le calcul d'un profil quelconque en béton armé, d'un profil à T par exemple,

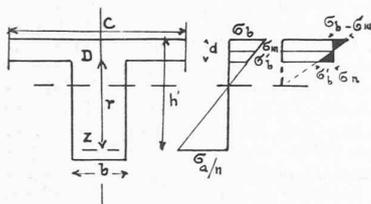


Fig. 8.

décèle des contraintes proportionnelles à leur distance à l'axe neutre. La dalle, qui forme table de compression, figure 8, subit ainsi, en période semi-élastique II, des contraintes en diagramme linéaire, qui vont de  $\sigma_b$  (arête extrême) à  $\sigma_b'$  (face inférieure de la dalle).

La contrainte moyenne  $\sigma_m$  représente la part de cette table de compression à l'équilibre de la composante du moment fléchissant

$$D \cdot r = M$$

tandis que le trapèze rabattu  $(\sigma_b - \sigma_m) - (\sigma_b' - \sigma_m)$  marque l'effet du moment fléchissant subi par la table de compression pour suivre la déformation élastique de la nervure. Si donc on désigne par  $I_d$  le moment d'inertie total du profil à T, on constate que le moment fléchissant, qui provoque le trapèze rabattu des contraintes de la dalle, a la valeur

$$M_d = M_T \frac{I_d}{I_t}$$

si  $M_t$  représente le moment fléchissant total imposé au profil complet.

On peut donc évaluer de cette manière la part prise par la dalle en fonction de son moment d'inertie propre, dans le cas où cette table de compression suit exactement la flexion de la nervure solidaire, ceci en présence d'une charge localisée.

La solidarité intérieure du tablier restant aussi complète, le cas se complique puisqu'une cuvette de déformation de plaque remplace la surface élastique cylindrique envisagée ci-dessus. La dalle munie de ses nervures raidissantes, limitée par les points nuls de sa

ligne d'influence et par les horizontales immobiles passant par les extrémités des poutres porteuses, se comporte comme une plaque rectangulaire soumise à la charge utile, et soulagée par les réactions des sommiers élastiques inclus dans les limites sus-dites. La surface élastique de cette plaque ne sera naturellement pas celle à courbure uniforme d'une plaque librement posée sur son contour rectangulaire ; ce sera une surface gaufrée, qui s'ondule au passage des poutres porteuses élastiques, et qui se conforme aux conditions d'appuis continus ou semi-encastés des extrémités des poutres. La première réserve n'est pas de grande importance, puisque le moment fléchissant total d'une tranche rectangulaire est égal au produit de sa raideur  $E \cdot I$  par la déformation angulaire moyenne  $\alpha/l$  subie par la tranche. Si donc on peut conclure d'une égale flexion médiane à une égale déformation angulaire moyenne, on peut poser que le moment fléchissant total  $M_T$  se répartit entre les divers secteurs du tablier de manière à satisfaire à l'équation

$$M_T = M_o \sum I_y \cdot w_y$$

où  $M_o$  est une constante à calculer en vertu des efforts imposés, et  $I_y$  et  $w_y$  représentent les moments d'inertie et les flexions verticales d'une tranche quelconque d'abscisse  $y$  à partir de l'extrémité des poutres élastiques.

Considérant la plaque rectangulaire à laquelle on fit allusion ci-dessus, on lui fait porter une charge répartie localisée incarnée dans l'excédent du moment indiqué par l'épure d'appuis élastiques sur le résultat fourni par la poutre continue ordinaire. Si l'on considère l'action localisée du rouleau compresseur seul, la charge répartie se limite à un rectangle normal  $OPQR$ , que nous supposons ininterrompu pour ne pas compliquer les formules (fig. 9). Nous supposons ce rectangle placé symétriquement par rapport aux limites  $STUV$  de la plaque représentative, dont il atteint les deux longs côtés  $ST$

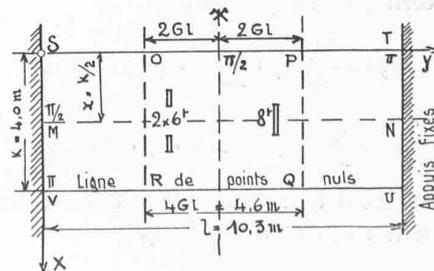


Fig. 9.

et  $VU$ , de longueur  $l$ . La série de Fourier, qui représente la flexion verticale  $w$  de cette dalle, supposée appuyée librement et rigidement sur son contour, s'exprime<sup>1</sup> par la série

$$w = \frac{64 p k^4}{\pi^6 \cdot D} \sum_{1,3,5}^m \sum_{1,3,5}^n \frac{1}{m \cdot n} \frac{f(x) \cdot g(y)}{(m^2 + n^2 \cdot K^2)^2}$$

$$\text{si } D = \frac{1}{1 - \mu^2} E \cdot I \sim E \cdot I \quad p = \frac{P}{k \times 4 G l} \quad K = \frac{k}{l}$$

$$f(x) = \sin m (A + E) \pi \cdot \sin m E \pi \cdot \sin m \frac{\pi \cdot x}{k}$$

ce qui est  $\sin m X$  puisque ici  $A = 0$  et  $E = 1$

$$g(y) = \sin n (B + G) \pi \cdot \sin n G \pi \cdot \sin n \frac{\pi y}{l} = \\ = \sin \left( \frac{1}{2} - G \right) \pi \cdot \sin n G \pi \cdot \sin n Y$$

$$X = \frac{\pi x}{k} \quad Y = \frac{\pi y}{l}$$

Le moment d'inertie unitaire  $I$  n'est évidemment pas le même en long et en travers de la dalle, puisque les nervures raidissantes sont unilatérales ; mais nous devons supposer ici cette constance pour que  $D \sim E \cdot I$  conduise à une solution maniable.

Nous comparerons les flexions des éléments élastiques le long de la médiane  $MN$  (fig. 9), ce qui limite la variable  $X$  à

$$x = \frac{l}{2} \quad X = \frac{\pi}{2} \quad \sin m X = \pm 1.$$

La série se réduit à la forme simple

$$w_y = \left\{ \frac{64 p k^4}{\pi^6 E \cdot I} \sum_{1,3,5}^m \sum_{1,3,5}^n \left[ \frac{1}{m \cdot n} \frac{1}{(m^2 + n^2 K^2)^2} \sin m X \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \sin n \left( \frac{1}{2} - G \right) \pi \cdot \sin n G \pi \right] \sin n Y = \right. \\ \left. = S \sum_{1,3,5}^m \sum_{1,3,5}^n \left[ - \right] \sin n Y = S(-) \sin n Y \right.$$

On trouve ainsi le moment de participation d'une tranche à l'abscisse  $y$  par

$$M_y = M_o I_y w_y$$

$$\text{où } M_o = \sum \frac{M_T}{S(-) \Delta y \cdot I_y \cdot \sin n Y}$$

ce qu'on écrit plus simplement

$$M_y = \frac{M_T}{N} I_y \cdot \sum S \cdot (-) \sin n Y$$

$$\text{où } N = \sum S (-) \Delta y \cdot I_y \cdot \sin n Y.$$

et  $\Delta y$  = segment de médiane  $MN$  entre deux abscisses  $y$ , où règne le moment d'inertie  $I_y$ .

<sup>1</sup> A. Paris. Cours béton I. Rouge & C<sup>ie</sup>, Lausanne.

La flexion propre de la dalle entre les raidissements et les poutres élastiques, le gaufrement signalé ci-avant, augmente naturellement un peu sa part de moment fléchissant, mais d'une quantité qui rentre dans le facteur de sécurité de l'ouvrage et qu'il serait illusoire de vouloir déterminer ici.

Tous les facteurs inscrits dans ces formules sont connus dans l'ouvrage entièrement dimensionné.

(A suivre.)

## SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

### Rapport de gestion pour l'année 1942.<sup>1</sup>

#### Protection des titres.

A l'assemblée des délégués du 18 octobre 1941, à Zurich, le Comité central a présenté les propositions suivantes, qui ont été approuvées à l'unanimité après une discussion approfondie.

1. Le Comité central laisse aux sections le soin de traiter toutes questions relatives à la protection du titre sur le plan cantonal.
2. Le Comité central reconnaît qu'une protection cantonale du titre présenterait de graves inconvénients et qu'il faut lui préférer une protection fédérale. Il est d'avis que l'étude du problème doit donc se poursuivre dans cette direction.
3. Il constate en outre que le point de vue adopté jusqu'à aujourd'hui dans les transactions relatives à la protection du titre avec les autorités fédérales n'est pas le bon. En conséquence, la S. I. A. est fermement décidée à rechercher, d'entente avec les groupements intéressés, de quelle manière pourrait intervenir le plus tôt possible une réglementation générale des professions d'ingénieur, d'architecte et de technicien.

Par suite de cette décision, le Comité central s'en est remis aux sections pour la poursuite de l'action sur le terrain cantonal. Le canton de Vaud a édicté une nouvelle loi sur la police de construction, du 5 février 1941, qui protège le titre et la profession d'ingénieur et d'architecte. D'après cette loi, toute demande d'autorisation de construire doit être présentée par un ingénieur ou un architecte, à qui le canton reconnaît ce titre. Le titre d'ingénieur et d'architecte, suivant les prescriptions légales, est reconnu aux porteurs du diplôme d'une haute école et aux praticiens qui, sans avoir de formation universitaire, ont subi un examen de capacité institué à cet effet.

La section de Genève a également élaboré un régime légal, pour lequel on a cherché à obtenir l'adhésion des associations et des organisations intéressées. Un projet de loi a été soumis à l'autorité législative, mais la mise en discussion se fait encore attendre.

Dans le canton de Fribourg, des démarches semblables sont en cours. On envisage l'introduction d'un registre professionnel pour les ingénieurs et les architectes, dans lequel l'inscription serait subordonnée à la présentation du diplôme d'une école polytechnique ou à un examen devant une commission nommée par les associations professionnelles.

Tous ces efforts montrent suffisamment que de nombreux milieux considèrent la réglementation du titre comme une nécessité inéluctable. Pour ces motifs et conformément aux décisions de l'assemblée des délégués précitée, le Comité central a repris plusieurs fois les questions de principe et a tenu, le 14 septembre 1942, une conférence avec une délégation du comité de l'Union suisse des techniciens. A cette réunion, on s'est montré disposé des deux côtés à faire son possible pour arriver à une solution satisfaisante sous tous

<sup>1</sup> Voir Bulletin technique du 21 juin 1943, p. 146.