Les essais de cisaillement sur l'argile sont difficiles parce que les résultats n'ont de valeur que si ils s'appliquent à un matériau bien déterminé. En réalité, si l'on cisaille différents échantillons d'une même argile consolidée sous différentes charges verticales, la teneur en eau et par suite l'indice de vide est variable d'un échantillon à l'autre. Pour obtenir des courbes intrinsèques, il faut disposer d'un matériau bien défini ce qui n'est pas facile avec les argiles qui sont des corps comportant trois phases : solide, eau absorbée, eau libre [1].

Le problème se complique encore pour les sols routiers parce qu'il est rare que l'on soit en présence de sols saturés ou presque, comme c'est le cas dans les fondations. Ces sols contiennent de l'air en proportion notable. Il ne faut pas perdre de vue que les lois principales établies pour les terrains argileux ne sont valables que pour un matériau saturé d'eau, c'est-à-dire sans air. Divers expérimentateurs spécialisés dans les problèmes routiers ont mis en doute certains résultats acquis de la géotechnique pour cette simple raison qu'ils ne travaillent pas sur les mêmes matériaux et ne parlent pas le même langage.

*(A suivre.)*

[1] La proportion entre eau libre et eau absorbée semble varier suivant la valeur des sollicitations imposées.

# Sur la généralisation d'une analogie entre cinq phénomènes de Mécanique,

par Henry FAVRE

professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich.

*(Suite et fin.)* [2]

### § 6. Quelques cas d'intégration du système d'équations régissant les cinq phénomènes.

Nous voulons maintenant donner quelques indications concernant l'intégration du système qui régit les cinq phénomènes analogues :

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{\partial z_1}{\partial t} + \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial}{\partial x}(\beta z_2) = 0, & \text{(I)} \\ \dfrac{1}{\omega^2}\cdot\dfrac{\partial z_2}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial z_1}{\partial x} = 0. & \text{(II)} \end{cases}$$

Voici comment on peut procéder. Dérivons (I) par rapport à $t$ et (II) par rapport à $x$, après avoir multiplié cette dernière équation par $\omega^2$. On obtient :

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial t} + \dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{d\beta}{dx}\cdot\dfrac{\partial z_2}{\partial t} = 0, & \text{(I')} \\ \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial t} + \dfrac{d(\alpha\omega^2)}{dx}\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \alpha\omega^2 \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} = 0. & \text{(II')} \end{cases}$$

[2] Voir *Bulletin technique* des 11 et 25 novembre 1944.

Remplaçons, en vertu de (II), $\dfrac{\partial z_2}{\partial t}$ par $-\alpha\omega^2 \dfrac{\partial z_1}{\partial x}$ dans (I') :

$$\alpha \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial t} - \frac{\alpha\omega^2}{\beta}\frac{d\beta}{dx}\frac{\partial z_1}{\partial x} = 0. \qquad \text{(I'')}$$

puis soustrayons (I'') de (II') :

$$\alpha\omega^2 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \left(\frac{d(\alpha\omega^2)}{dx} + \frac{\alpha\omega^2}{\beta}\frac{d\beta}{dx}\frac{\partial z_1}{\partial x}\right) - \alpha\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = 0.$$

Divisons par $\alpha\omega^2$, il vient :

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha\beta\omega^2}\frac{d}{dx}(\alpha\beta\omega^2)\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = 0\ ;$$

en posant

$$\alpha\beta\omega^2 = \gamma, \qquad (25)$$

on obtient finalement

$$\boxed{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx}\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = 0.} \qquad \text{(III)}$$

La signification de $\gamma$ pour chacun des cinq phénomènes est indiquée à la colonne 10 du tableau 2.

Telle est l'équation à laquelle doit satisfaire $z_1$ [1]).

Supposons que l'on ait trouvé une solution $z_1(x, t)$ de (III). Pour avoir $z_2$, introduisons cette solution dans (II) et intégrons par rapport au temps, ce qui donne :

$$z_2 = \alpha\omega^2 \int \frac{\partial z_1}{\partial x}\, dt. \qquad \text{(IV)}$$

Le calcul de $z_2$ est alors ramené à une quadrature.

La principale difficulté du problème réside dans l'intégration de l'équation (III).

Remarquons que pour les trois premiers phénomènes, $z_1$ désigne une vitesse $v$ (tableau 2) et peut se mettre sous la forme d'une dérivée partielle par rapport au temps. Par exemple, pour la corde, nous avons $v = \dfrac{\partial y}{\partial t}$, où $y$ désigne l'écart d'un point $P$ (voir fig. 1 et § 2, 1°). Si nous mesurons les écarts $y$ en prenant la position de repos comme origine, une intégration de (III) par rapport au temps donne

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \qquad \text{(III*)}$$

Telle est l'équation qui régit *les écarts* de la corde. C'est exactement la même que (III), qui régit les vitesses $v$.

Si $\gamma$ et $\omega$ sont constants (indépendants de $x$), la dernière équation écrite se réduit à

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

qui n'est autre que l'« équation ordinaire des cordes vibrantes ». (III*) ou (III) peut donc être appelée : « équation générale des cordes ». On peut alors dire que *toutes les grandeurs* $z_1$ *figurant à la quatrième colonne du*

[1] En éliminant $z_1$ entre (I) et (II), on obtiendrait pour $z_2$ une équation beaucoup moins simple que (III).

*tableau 2 satisfont à l'équation générale des cordes vibrantes* [1].

Voici quelques cas d'intégrabilité de l'équation (III) :

1° $\gamma = const.$, $\omega = const.$

C'est celui des caractéristiques constantes envisagé au paragraphe 1. (III) se réduit à l'équation ordinaire des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(III, 1°)}$$

dont la solution générale est

$$z_1 = F\left(t - \frac{x}{\omega}\right) + f\left(t + \frac{x}{\omega}\right); \qquad (26)$$

où $F$ et $f$ désignent deux fonctions arbitraires (Solution d'Euler-d'Alembert). $F$ représente une onde qui se propage sans se déformer dans le sens des $x$ croissants avec la vitesse constante $\omega$, $f$ une onde de mêmes propriétés se déplaçant dans le sens des $x$ décroissants.

On peut aussi intégrer l'équation (III, 1°) à l'aide des séries trigonométriques (méthode de D. Bernoulli) ou encore en utilisant la transformation de Laplace.

2° $\gamma = const.$, $\omega$ *variable.*

Une corde de traction constante ($\epsilon F = \gamma = $ const.), mais de profil ou de masse spécifique variable $\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}} = \omega \text{ variable}\right)$ satisfait aux conditions ci-dessus. Il en est de même d'une conduite forcée de diamètre constant remplie d'un liquide homogène $\left(\frac{F}{\rho} = \gamma = \text{const.}\right)$, mais dont l'épaisseur des parois varie ($a = \omega$ variable). Les trois autres phénomènes, par contre, peuvent difficilement réaliser ces conditions (voir tableau 2).

L'équation (III) devient ici

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = 0, \qquad \text{(III, 2°)}$$

où $\omega^2$ est une fonction de $x$.

Dans un mémoire paru en 1766, Leonard Euler a donné des indications intéressantes sur l'intégration de (III, 2°) [2]. Il ne lui a pas été possible de trouver la solution générale de cette équation lorsque $\omega^2$ est une fonction quelconque de $x$. Mais il est arrivé à la conclusion que dans chaque cas où il est possible de l'intégrer, la solution générale peut se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} z_1 = &P\Gamma(\textstyle\int u dx + t) + Q\Gamma'(\int u dx + t) + R\Gamma''(\int u dx + t) + \ldots.. \\ &+ P\Delta(\textstyle\int u dx - t) + Q\Delta'(\int u dx - t) + R\Delta''(\int u dx - t) + \ldots.. \end{aligned}\right\} (27)$$

où $P, Q, R, \ldots$ et $u$ sont des fonctions déterminées de $x$, tandis que $\Gamma$ et $\Delta$ désignent des fonctions arbitraires des arguments entre parenthèses.

[1] Il n'en est pas de même des grandeurs $z_2$ qui satisfont à une tout autre équation.

[2] « Recherches sur le mouvement des cordes inégalement grosses », par L. Euler. *Mélanges de philosophie et de mathématique* de la Société Royale de Turin, 1766.

Euler déduit de (27) la solution rigoureuse pour le cas où $\omega^2 = \frac{C}{x^n}$, $C$ désignant une constante et l'exposant $n$ étant égal à 4, $^4/_3$, $^8/_3$, $^8/_5$, $^{12}/_5$, $^{12}/_7$, $^{16}/_7$, .....

Nous nous permettons de renvoyer le lecteur à l'examen de ce mémoire, qui pourrait peut-être conduire à des applications intéressantes.

3° $\gamma$ *et* $\omega$ *sont des fonctions linéaires de* x, *qui varient peu dans le domaine considéré.*

C'est le cas où les caractéristiques accusent une faible variation linéaire (corde pesante verticale suffisamment tendue, barre légèrement conique animée de vibrations longitudinales ou de torsion, conduite dont le diamètre et l'épaisseur accusent une faible variation linéaire, canal découvert de largeur et de profondeur légèrement variables).

On peut alors poser :

$$\gamma = \gamma_0(1 + \delta_1 x), \qquad \omega = \omega_0(1 + \delta_2 x); \qquad (28)$$

où $\gamma_0$, $\omega_0$, $\delta_1$ et $\delta_2$ désignent des constantes, les deux dernières étant petites par rapport à 1.

L'équation (III) devient :

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\delta_1}{1+\delta_1 x}\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1}{\omega_0^2(1+\delta_2 x)^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = 0.$$

Multiplions par $1 + \delta_1 x$ et remplaçons, au dernier terme, $\frac{1+\delta_1 x}{(1+\delta_2 x)^2}$ par $1 + (\delta_1 - 2\delta_2)x$.

On obtient :

$$(1+\delta_1 x)\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \delta_1\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1+(\delta_1 - 2\delta_2)x}{\omega_0^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = 0. \qquad \text{(III, 3°)}$$

Nous pouvons chercher à satisfaire à cette équation par une expression de la forme [1]

$$z_1 = z_1^0 + (1+\epsilon_1 x)\left\{F\left[t - \frac{(1+\epsilon_2 x)x}{\omega_0}\right] + f\left[t + \frac{(1+\epsilon_2 x)x}{\omega_0}\right]\right\},$$

où $F$ et $f$ désignent des fonctions quelconques, $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ des constantes du même ordre que $\delta_1$ et $\delta_2$, $z_1^0$, une constante. En introduisant cette expression de $z_1$ dans l'équation différentielle et en identifiant [2], on obtient pour $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ les valeurs suivantes :

$$\epsilon_1 = -\frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2), \qquad \epsilon_2 = \frac{\delta_2}{2}.$$

La solution approchée de l'équation (III, 3°) devient :

[1] On obtient cette expression en modifiant légèrement le second membre de (26), car (III, 3°) devient (III, 1°) lorsque $\delta_1$ et $\delta_2$ sont nuls.

[2] Dans les calculs, on néglige les produits et les puissances des petites quantités $\epsilon_1$, $\epsilon_2$, $\delta_1$, $\delta_2$.

$$z_1 = z_1^0 + \left[1 - \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2)x\right]\left\{F\left[t - \frac{\left(1 - \frac{\delta_2}{2}x\right)x}{\omega_0}\right] + \right.$$
$$\left. + f\left[t + \frac{\left(1 - \frac{\delta_2}{2}x\right)x}{\omega_0}\right]\right\}. \qquad (29)$$

Cette expression représente la somme de deux ondes qui se propagent *en se déformant*[1].

On démontre que $\omega = \omega_0(1 + \delta_2 x)$ est la *vitesse de propagation des ondes au profil* x. Cette vitesse dépend donc du lieu.

4° $\gamma = const.\ x^2$, $\omega = const.$

Les vibrations d'une corde pourraient difficilement satisfaire à ces conditions. Par contre, les quatre autres phénomènes le peuvent, pourvu que la matière soit homogène ($\rho$ = const., $E$ = const., etc.) et que $F$, $J$ ou $F_p$ soient proportionnels à $x^2$ (voir tableau 2 ; s'il s'agit d'une conduite il faudrait encore que $\frac{D}{e}$ soit constant, c'est-à-dire $e$ proportionnel à $x$).

L'équation (III) devient :

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = 0, \qquad (\text{III, } 4^\circ)$$

où $\omega$ est constant.

C'est l'équation que l'on rencontre dans la théorie des ondes sphériques se propageant dans un milieu continu. Sa solution rigoureuse est :

$$z_1 = z_1^0 + \frac{x_m}{x}\left[F\left(t - \frac{x - x_m}{\omega}\right) + f\left(t + \frac{x - x_m}{\omega}\right)\right], \qquad (30)$$

où $F$ et $f$ désignent des fonctions arbitraires, $z_1^0$ et $x_m$, des constantes. Cette expression représente la somme de deux ondes qui se propagent *en se déformant*. La vitesse de propagation $\omega$ de ces ondes est constante. Leur longueur ne varie pas, mais seulement la hauteur.

5° $\gamma = const.\ x^2$, $\omega$ *est une fonction linéaire de* x *qui varie peu dans le domaine considéré.*

C'est le cas des conduites à caractéristiques linéairement variables le long de l'axe que l'on rencontre dans la pratique. Exception faite de la corde, les autres phénomènes peuvent satisfaire aux conditions ci-dessus.

Posons

$$\omega = \omega_m\left(1 - 2\nu\,\frac{x - x_m}{L}\right), \qquad (31)$$

où $L$ désigne la longueur de la conduite, du canal ou de la barre, $x_m$ l'abscisse du milieu, $\omega_m$ la valeur de $\omega$ relative à ce point, $\nu$ une constante positive petite par rapport à 1.

[1] C'est par la même méthode que nous avons trouvé une solution approchée de l'équation régissant les vibrations transversales des cordes pesantes verticales (voir *Schweiz. Bauzeitung* des 20 novembre et 4 décembre 1943, équation (9). Cette solution est un cas particulier de (29).

L'équation (III) s'écrit ici :

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1}{\omega_m^2}\left(1 + 4\nu\,\frac{x - x_m}{L}\right)\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = 0. \qquad (\text{III, } 5^\circ)$$

Sa solution approchée est[1] :

$$z_1 = z_1^0 + \frac{x_m}{x}\left(1 - \nu\,\frac{x - x_m}{L}\right)\left\{F\left[t - \frac{x - x_m}{\omega_m\left(1 - \nu\,\frac{x - x_m}{L}\right)}\right] + \right.$$
$$\left. + f\left[t + \frac{x - x_m}{\omega_m\left(1 - \nu\,\frac{x - x_m}{L}\right)}\right]\right\}, \qquad (32)$$

où $F$, $f$ désignent des fonctions arbitraires, $z_1^0$, $x_m$ des constantes. Cette expression est la somme de deux ondes qui se propagent *en se déformant.* La vitesse de propagation $\omega$ est une fonction du lieu.

En faisant $\nu = 0$ on retrouve l'équation (30).

6° *Si l'équation (III) peut se mettre sous la forme*

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \left[\frac{2A\Psi'(x)}{A\Psi(x) + B} - \frac{\Psi''(x)}{\Psi'(x)}\right]\frac{\partial z_1}{\partial x} - \Psi'^2(x)\,\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{III, } 6^\circ)$$

où $A$ et $B$ sont des constantes, on peut l'intégrer en appliquant la transformation de Laplace, comme l'a montré M. Blanc, professeur à l'Ecole d'ingénieurs de Lausanne[2]. C'est l'équation du cas le plus général sans diffusion.

7° *Cas des ondes stationnaires.*

Posons

$$z_1 = \varphi \cdot \sin\frac{2\pi t}{T},$$

où $\varphi$ désigne une fonction de $x$, et $T$ une constante. L'équation (III) devient

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{4\pi^2}{T^2\omega^2}\varphi = 0. \qquad (\text{III, } 7^\circ)$$

Elle ne contient que la variable indépendante $x$, ce qui démontre que des ondes stationnaires peuvent exister dans le cas général. Le problème est donc ramené à l'intégration de cette équation différentielle ordinaire. En tenant compte des conditions aux limites, sa solution permettra de déterminer la période $T$ des différentes vibrations, ainsi que la position des nœuds et des ventres. Dans certains cas, elle pourra être ramenée à l'équation de Bessel.

Zurich, le 16 septembre 1944.

[1] Voir notre article déjà cité de la *Revue générale de l'hydraulique*, formule (9).

[2] « Transformation de Laplace et équations différentielles », par *Ch. Blanc*. *Bulletin technique de la Suisse romande* du 6 février 1943.