Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 75 (1949)
Heft: 18

Artikel: Sur un type de plaque circulaire encastrée d'épaisseur linéairement variable

Autor: Favre, Henry

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56879

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

75e année 27 août 1949 No 18

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. — Membres : *Fribourg :* MM. † L. HERTLING, architecte ; P. JOYE, professeur ; *Vaud :* MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. D'OKOLSKI, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; CH. THÉVENAZ, architecte : *Genève :* MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. MARTIN, architecte ; E. ODIER, architecte, *Neuchâtel :* MM. J. BÉGUIN, architecte ; G. FURTER, ingénieur ; R. GUYE, ingénieur ; *Valais :* MM. J. DUBUIS, ingénieur ; D. BURGENER, architecte.

Rédaction : D. BONNARD, ingénieur. Case postale Chauderon 475, LAUSANNE

ABONNEMENTS :
Suisse : 1 an, 20 francs
Etranger : 25 francs
Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 17 francs
Etranger : 22 francs
Pour les abonnements s'adresser à la librairie
F. ROUGE & Cie
à Lausanne
Prix du numéro :
1 fr. 25

TARIF DES ANNONCES
Le millimètre (larg. 47 mm) 20 cts
Réclames : 60 cts le mm (largeur 95 mm)
Rabais pour annonces répétées
ANNONCES SUISSES S.A.
5, Rue Centrale
Tél. 2 33 26
LAUSANNE
et Succursales

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE
A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte : R. NEESER, ingénieur.

SOMMAIRE : *Sur un type de plaque circulaire encastrée d'épaisseur linéairement variable*, par HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich. — *Technique et techniciens du Vide.* par CÉCILE ROY-POCHON, ingénieur E.P.L., ancien président de la Société Française des Ingénieurs Techniciens du Vide. — Société suisse des ingénieurs et des architectes : *Communiqué du Secrétariat.* — LES CONGRÈS : *Association Internationale des Ponts et Charpentes.* — BIBLIOGRAPHIE. — CARNET DES CONCOURS. — SERVICE DE PLACEMENT.

SUR UN TYPE DE PLAQUE CIRCULAIRE ENCASTRÉE D'ÉPAISSEUR LINÉAIREMENT VARIABLE

par HENRY FAVRE
Professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich

La flexion des plaques circulaires d'épaisseur variable a déjà fait l'objet de diverses recherches théoriques [1]. La plupart de ces études concernent des cas où les deux faces de la plaque sont des surfaces de révolution coaxiales et où l'épaisseur h est une *fonction non linéaire* de la distance r d'un point au centre. Seul *D. Conway* semble avoir étudié certains types de plaques où l'épaisseur varie linéairement en fonction de cette distance [2]. Les cas traités par cet auteur intéressent cependant surtout l'ingénieur mécanicien ; il a supposé en effet qu'un noyau rigide était placé au centre de la plaque (cas d'un piston, par exemple).

Nous nous proposons d'étudier ici la flexion d'un type de plaque circulaire encastrée, d'épaisseur linéairement variable, intéressant aussi bien l'ingénieur constructeur que l'ingénieur mécanicien. C'est celui où h a une valeur constante h_o à l'intérieur d'un cercle de rayon b et croît de h_o à une autre valeur H d'après la loi $h = cr$, où c désigne une constante, lorsque r croît de la valeur b à celle, a, du rayon du contour limitant la plaque (fig. 1).

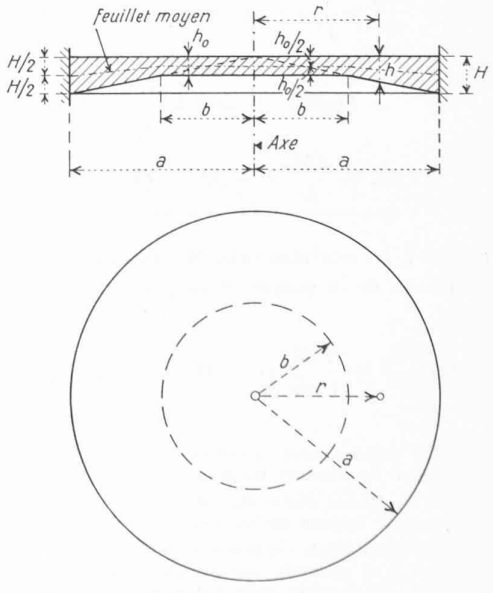

Fig. 1.

[1] Citons, entre autres :
H. HOLZER, *Kreisförmige Platten mit veränderlicher Dicke und günstigste Formen solcher Platten.* Zeitschr. für das gesamte Turbinenwesen, Vol. XV, 1918, p. 21.
L. FÖPPL, *Über eine Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte.* Zeitschr. für angew. Math. u. Mech., Vol. 2, 1922, p. 92.
O. PICHLER, *Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke.* Thèse de l'Ecole polytechnique de Stuttgart. Springer, Berlin, 1928.
R. GRAN OLSSON, *Biegung kreisförmiger Platten von radial veränderlicher Dicke,* Ing. Archiv, Vol. VIII, 1937, p. 81, et *Unsymmetrische Biegung der Kreisringplatte von quadratisch veränderlicher Steifigkeit,* Ing. Arch., Vol. X, 1939, p. 14 ; Vol. XI, 1940, p. 259 ; Vol. XIII, 1942-1943, p. 147.
H. D. CONWAY, *The Bending of Symmetrically Loaded Circular Plates of Variable Thickness.* Journal of Applied Mechanics, Vol. 15, 1948, p. 1.

[2] Voir, note 1, le dernier mémoire cité.

Dans le paragraphe 1, nous établirons l'équation différentielle régissant la flexion d'une plaque circulaire d'épaisseur variable. Dans le paragraphe 2, nous étudierons le cas d'une surcharge uniforme agissant sur la plaque encastrée de la figure 1 et, dans le paragraphe 3, celui où une force est appliquée au centre.

§ 1. Equation différentielle d'une plaque circulaire fléchie, d'épaisseur variable

Nous supposons essentiellement que l'épaisseur h, la surcharge par unité de surface p et les conditions d'appuis soient uniquement fonctions de r. La plaque sera donc encore, après la déformation, un corps de révolution. Nous admettons en outre que l'épaisseur soit partout petite par rapport aux autres dimensions et que la dérivée $\frac{dh}{dr}$ soit également un petit nombre. Enfin, nous supposons que la courbure du feuillet moyen [1] soit très faible, de façon que les forces intérieures agissant dans cette surface soient négligeables.

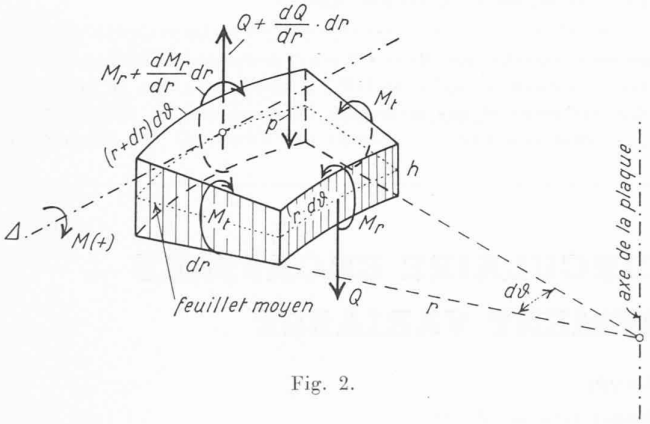

Fig. 2.

Sur un élément de volume $h.dr.rd\theta$ agissent les forces et couples indiqués dans la figure 2, où M_r, M_t et Q désignent les moments de flexion et l'effort tranchant *relatifs à l'unité de longueur* [2]. La somme des moments des forces par rapport à l'axe $\triangle$ étant nulle, nous avons l'équation :

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr}\,dr\right)(r+dr)\,d\theta - M_r r d\theta - 2M_t dr\,\frac{d\theta}{2} + \underbrace{+ Q r d\theta dr + p r d\theta dr\,\frac{dr}{2}}_{\sim 0} = 0,$$

ou

$$M_r + \frac{dM_r}{dr}\,r - M_t + Qr = 0. \qquad (1)$$

D'autre part, les relations entre M_r, M_t et le déplacement ζ_0, parallèle à l'axe de la plaque, d'un point du feuillet moyen, sont [3] :

$$M_r = -D\left(\frac{d^2\zeta_0}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{d\zeta_0}{dr}\right), \qquad M_t = -D\left(\frac{1}{r}\frac{d\zeta_0}{dr} + \nu\frac{d^2\zeta_0}{dr^2}\right),$$

où ν désigne le nombre de Poisson et $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E étant le module d'élasticité.

Si nous introduisons la variation φ (due à la déformation) de la pente du feuillet moyen, nous aurons [1] :

$$\boxed{M_r = D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu\frac{\varphi}{r}\right), \qquad M_t = D\left(\frac{\varphi}{r} + \nu\frac{d\varphi}{dr}\right),} \qquad (2)$$

où $\boxed{D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}}$ (3) et $\boxed{\varphi = -\frac{d\zeta_0}{dr}}$. (4)

En introduisant les valeurs (2) de M_r et M_t dans la condition d'équilibre (1), on obtient après quelques transformations l'équation différentielle du second ordre [2] :

$$\boxed{D\,\frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r}\right) + \frac{dD}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu\frac{\varphi}{r}\right) = -Q,} \qquad (5)$$

dans laquelle D et Q désignent des fonctions connues de r. Dans le cas où il n'y a pas d'ouverture au centre, on a, par exemple :

$$Q = \frac{1}{2\pi r}\int_0^r p(2\pi r dr) = \frac{1}{r}\int_0^r p r dr. \qquad (6)$$

L'intégration de l'équation (5), compte tenu de deux conditions aux limites, donnera $\varphi(r)$. En substituant ensuite cette fonction dans les relations (2), on obtiendra M_r et M_t, puis les tensions normales σ_r, σ_t par les formules :

$$\boxed{\sigma_r = \frac{M_r}{h^3/12}\,z, \qquad \sigma_t = \frac{M_t}{h^3/12}\,z,} \qquad (7)$$

z désignant la distance d'un point de la plaque au feuillet moyen. Les valeurs de ces tensions aux *points de la face inférieure* $z = \frac{h}{2}$ seront en particulier :

$$\boxed{(\sigma_r)_i = \frac{6M_r}{h^2}, \quad (\sigma_t)_i = \frac{6M_t}{h^2};} \qquad (8)$$

celles aux points correspondants de la face supérieure seront égales aux valeurs (8) changées de signe.

Pour obtenir encore ζ_0, il suffira d'introduire $\varphi(r)$ dans la relation (4), d'où :

$$\boxed{\zeta_0 = -\int \varphi(r)dr + C,} \qquad (9)$$

C étant une constante que l'on déterminera à l'aide d'une nouvelle condition aux limites, par exemple en prescrivant à ζ_0 d'être nul le long du contour.

[1] Par « feuillet moyen », nous entendons la surface qui, avant la déformation, a ses points équidistants des deux faces de la plaque.

[2] Le moment de torsion $M_{rt} = M_{tr}$ est ici identiquement nul. Il n'y a pas d'effort tranchant agissant sur les éléments de surface $h\,dr$.

[3] Pour la démonstration de ces formules, *qui sont les mêmes que dans le cas où l'épaisseur h est constante*, voir par ex. S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company, New-York and London, 1940, p. 55 et suiv.

[1] ζ_0, ainsi que la grandeur z que nous introduirons plus loin, sont supposés *comptés positivement vers le bas*. Le signe — dans la formule (4) a été introduit afin que φ soit partout positif dans le cas d'une plaque simplement posée, chargée uniformément.

[2] Cette équation a été indiquée pour la première fois par H. Holzer (voir note 1, page 225), il est vrai sous une forme un peu différente. C'est à O. Pichler que l'on doit la forme sous laquelle nous l'avons écrite.

§ 2. Etude d'un type de plaque circulaire encastrée, où l'épaisseur varie linéairement en fonction de r. Cas d'une surcharge uniformément répartie

Considérons la plaque de la figure 3a, où :

$h = cr$ (10) dans le domaine $b < r < a$;

$h = cb = h_0 = \text{const.}$ (11) dans le domaine $o < r < b$;

et $p = \text{const.}$ quel que soit r.

1° *Domaine* $b < r < a$ (fig. 3b). Remplaçons l'action de la partie centrale, sur celle que nous considérons ici, par un couple de flexion M_0 (que nous déterminerons plus loin) et un effort tranchant Q_0 constants, appliqués le long du bord intérieur. Nous avons :

$$Q = \frac{\pi r^2 p}{2\pi r} = \frac{pr}{2}, \quad Q_0 = \frac{pb}{2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{Ec^3r^3}{12(1-\nu^2)}$$

et l'équation (5) devient, après simplifications :

$$r^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2} + 4r \frac{d\varphi}{dr} + (3\nu - 1)\varphi = -\frac{6(1-\nu^2)p}{Ec^3}. \quad (12)$$

C'est une *équation d'Euler*[1]. Pour l'intégrer, cherchons tout d'abord la solution générale de l'équation homogène :

$$r^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2} + 4r \frac{d\varphi}{dr} + (3\nu - 1)\varphi = 0,$$

en posant :

$$\varphi = r^\alpha, \quad (13)$$

où α désigne une constante.

Nous obtenons, en substituant, l'équation caractéristique :

$$\alpha^2 + 3\alpha + (3\nu - 1) = 0, \quad (14)$$

dont les racines sont :

$$\alpha_1 = -1{,}5 + \sqrt{3{,}25 - 3\nu}, \quad \alpha_2 = -1{,}5 - \sqrt{3{,}25 - 3\nu}. \quad (15)$$

Elles sont toutes deux réelles, car $0 < \nu < 0{,}5$. La solution cherchée est donc $\varphi = Ar^{\alpha_1} + Br^{\alpha_2}$, A et B étant des constantes arbitraires. D'autre part, l'équation complète admet la solution particulière $\varphi = \frac{6(1-\nu^2)p}{(1-3\nu)Ec^3}$ et la solution générale de l'équation (12) est :

$$\varphi = Ar^{\alpha_1} + Br^{\alpha_2} + \frac{6(1-\nu^2)p}{(1-3\nu)Ec^3}. \quad (16)$$

En utilisant les deux conditions aux limites :

$$(\varphi)_{r=a} = 0 \qquad \text{et} \qquad (M_r)_{r=b} = M_o,$$

on obtient un système de deux équations linéaires, d'où il est facile de tirer les valeurs de A et B. En substituant ces valeurs dans (16), on obtient finalement la valeur de φ relative au domaine $b < r < a$ considéré ; nous la désignerons par φ_1 :

$$\varphi_1 = \frac{6(1-\nu^2)}{Ec^3R}\left[\left(\frac{2a^{\alpha_2}}{b^3}M_0 - \frac{a^{\alpha_2}\nu p}{(1-3\nu)b} + \frac{(\alpha_2+\nu)b^{\alpha_2-1}p}{1-3\nu}\right)r^{\alpha_1} - \left(\frac{2a^{\alpha_1}}{b^3}M_0 - \frac{a^{\alpha_1}\nu p}{(1-3\nu)b} + \frac{(\alpha_1+\nu)b^{\alpha_1-1}p}{1-3\nu}\right)r^{\alpha_2} + \frac{Rp}{1-3\nu}\right], \quad (17)$$

où $\quad R = (\alpha_1 + \nu)a^{\alpha_2}b^{\alpha_1-1} - (\alpha_2 + \nu)a^{\alpha_1}b^{\alpha_2-1}$.

[1] H. Holzer, *loc. cit.*, a remarqué, déjà en 1918, que la relation (5) se transforme en une telle équation si l'on pose $h = cr^\delta$, δ étant un exposant quelconque.

Remarque. Dans le cas particulier où $\nu = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $1 - 3\nu = 0$, cinq des fractions figurant dans l'expression de φ_1 deviennent infinies. Pour lever cette indétermination, le plus simple est d'intégrer directement l'équation (12), qui devient :

$$r^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2} + 4r \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{16p}{3Ec^3}.$$

Cette dernière équation admet la solution particulière $\varphi = -\frac{16p}{9Ec^3}\operatorname{Log} r$ et la solution générale est, dans ce cas, vu que $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = -3$:

$$\varphi = A + \frac{B}{r^3} - \frac{16p}{9Ec^3}\operatorname{Log} r. \quad (16')$$

La détermination de A et B ne donne lieu à aucune difficulté particulière. *Nous poursuivrons les calculs en supposant* $\nu \neq \frac{1}{3}$.

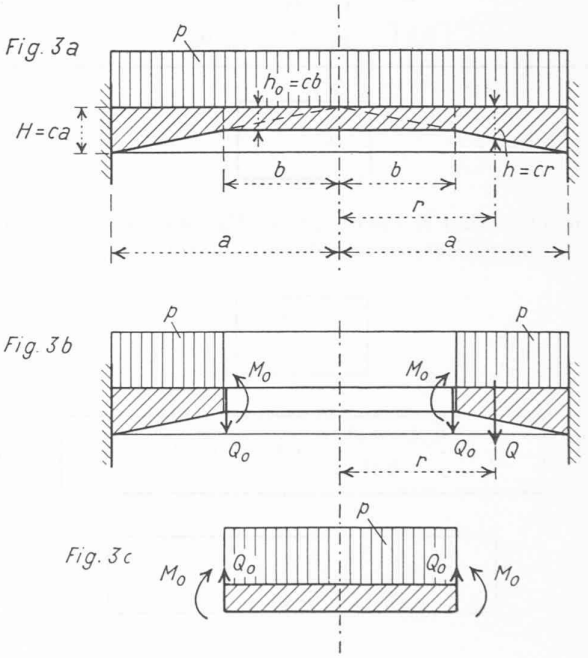

Fig. 3, a à c.

2° *Domaine* $0 < r < b$ (fig. 3c). On a ici :

$$D = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{Ec^3b^3}{12(1-\nu^2)} = D_b, \qquad \frac{dD}{dr} = 0,$$

et l'équation (5) se réduit, après simplifications, à l'équation d'Euler suivante :

$$r^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2} + r \frac{d\varphi}{dr} - \varphi = -\frac{pr^3}{2D_b}, \quad (18)$$

dont la solution générale est :

$$\varphi = A'r + \frac{B'}{r} - \frac{p}{16D_b}r^3. \quad (19)$$

La variation φ de la pente devant être nulle au centre de la plaque, on a $(\varphi)_{r=0} = 0$, ce qui exige que $B' = 0$. En utilisant la condition $(M_r)_{r=b} = M_o$, on détermine la valeur

de A'. En substituant dans la relation (19), on obtient la valeur de φ relative au domaine considéré $o < r < b$; nous la désignerons par φ_2 :

$$\varphi_2 = \frac{12(1-\nu)}{Ec^3b^3}\left[\left(M_0 + \frac{(3+\nu)\,b^2p}{16}\right)r - \frac{(1+\nu)p}{16}\,r^3\right]. \tag{20}$$

3° *Condition de continuité entre les deux domaines.* Les expressions obtenues pour φ_1 et φ_2 contiennent le moment inconnu M_0. Pour déterminer cette grandeur, on a l'équation :

$$(\varphi_1)_{r=b} = (\varphi_2)_{r=b}, \tag{21}$$

d'où l'on tire, en remplaçant φ_1 et φ_2 par leurs valeurs (17) et (20) :

$$\boxed{M_0 = \mu b^2 p,} \tag{22}$$

en posant :

$$\boxed{\mu = \frac{(\alpha_1+\nu)n^{\alpha_1-\alpha_2} - \alpha_2 - \nu + \dfrac{4(1+\nu)}{1-3\nu}[\alpha_1 n^{\alpha_1}(1-n^{-\alpha_2}) - \alpha_2(n^{\alpha_1}-1)]}{8[(1-\alpha_1)n^{\alpha_1-\alpha_2} + \alpha_2 - 1]},} \tag{23}$$

où

$$\boxed{n = \frac{b}{a}\cdot} \tag{24}$$

En substituant la valeur (22) de M_0 dans les relations (17) et (20), on obtient, en introduisant encore le rapport

$$\boxed{\xi = \frac{r}{a}:} \tag{25}$$

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{6(1-\nu^2)\,p}{Ec^3}\,(\overline{C}\xi^{\alpha_1} + \overline{D}\xi^{\alpha_2} + \overline{E}),} \tag{26}$$

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{3(1-\nu)\,p}{Ec^3}\,(\overline{F}\xi + \overline{G}\xi^3),} \tag{27}$$

où

$$\left.\begin{aligned} \overline{C} &= \frac{2n^{-\alpha_2}\mu + \dfrac{-\nu n^{-\alpha_2} + \alpha_2 + \nu}{1-3\nu}}{(\alpha_1+\nu)n^{\alpha_1-\alpha_2} - \alpha_2 - \nu}, \\ \overline{D} &= -\frac{2n^{-\alpha_1}\mu + \dfrac{-\nu n^{-\alpha_1} + \alpha_1 + \nu}{1-3\nu}}{\alpha_1 + \nu - (\alpha_2+\nu)n^{\alpha_2-\alpha_1}}, \\ \overline{E} &= \frac{1}{1-3\nu}, \quad \overline{F} = \frac{4\mu}{n} + \frac{3+\nu}{4n}, \quad \overline{G} = -\frac{1+\nu}{4n^3}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

4° Pour déterminer la *surface élastique* (transformée du feuillet moyen), appliquons l'équation (9). On a :

$$\zeta_0 = -\int \varphi dr + C = -a\int \varphi d\xi + C\,; \tag{9'}$$

d'où, *dans le domaine* $b < r < a$ *ou* $n < \xi < 1$:

$$\zeta_0 = -\frac{6(1-\nu^2)\,ap}{Ec^3}\left(\frac{\overline{C}}{\alpha_1+1}\,\xi^{\alpha_1+1} + \frac{\overline{D}}{\alpha_2+1}\,\xi^{\alpha_2+1} + \overline{E}\xi\right) + C_1.$$

La condition $(\zeta_0)_{\xi=1} = 0$ donne

$$C_1 = \frac{6(1-\nu^2)\,ap}{Ec^3}\left(\frac{\overline{C}}{\alpha_1+1} + \frac{\overline{D}}{\alpha_2+1} + \overline{E}\right),$$

d'où, en tenant compte de (11) :

$$\boxed{\begin{aligned}\zeta_0 = \frac{6(1-\nu^2)\,n^3a^4p}{Eh_0^3}\Bigg[&\frac{\overline{C}}{\alpha_1+1}(1-\xi^{\alpha_1+1}) + \\ &+ \frac{\overline{D}}{\alpha_2+1}(1-\xi^{\alpha_2+1}) + \overline{E}(1-\xi)\Bigg].\end{aligned}} \tag{29}$$

La déplacement $(\zeta_0)_{\xi=n}$ des points du contour intérieur limitant ce domaine s'obtiennent en faisant $\xi = n$ dans la relation (29) :

$$\left.\begin{aligned}(\zeta_0)_{\xi=n} = \frac{6(1-\nu^2)\,n^3a^4p}{Eh_0^3}\Bigg[&\frac{\overline{C}}{\alpha_1+1}(1-n^{\alpha_1+1}) + \\ &+ \frac{\overline{D}}{\alpha_2+1}(1-n^{\alpha_2+1}) + \overline{E}(1-n)\Bigg].\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Dans le domaine $o < r < b$ *ou* $o < \xi < n$, on a, en appliquant la formule (9') et en désignant par C_2 la constante d'intégration :

$$\zeta_0 = -\frac{3(1-\nu)\,ap}{Ec^3}\left[\frac{\overline{F}}{2}\xi^2 + \frac{\overline{G}}{4}\xi^4\right] + C_2.$$

ζ_0 devant avoir la valeur (30) pour $r = b$ ou $\xi = n$, on en déduit que

$$C_2 = \frac{3(1-\nu)\,ap}{2Ec^3}\left(\overline{F}n^2 + \frac{\overline{G}}{2}n^4\right) + (\zeta_0)_{\xi=n},$$

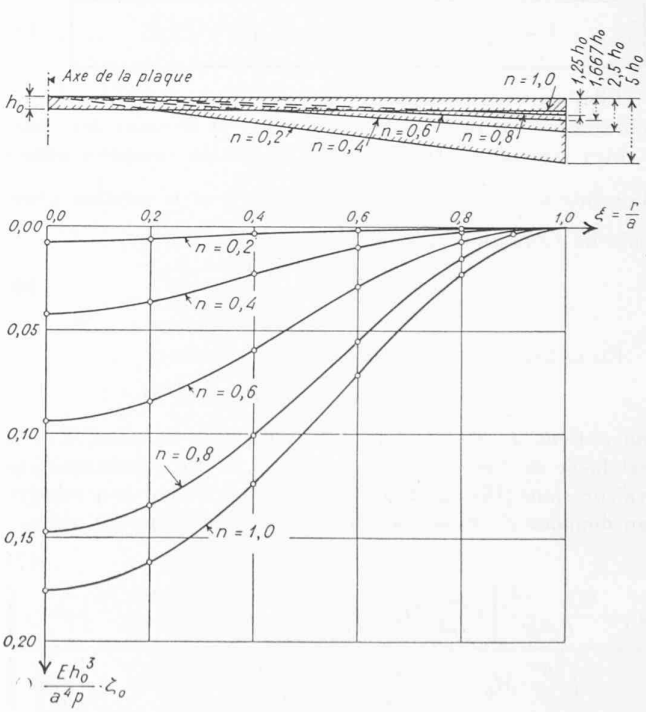

Fig. 4. — Plaque circulaire encastrée de la figure 3a. Représentation graphique de ζ_0 en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

d'où

$$\boxed{\zeta_0=\frac{3(1-\nu)\,n^3a^4p}{2Eh_0^3}\left[\overline{F}(n^2-\xi^2)+\frac{\overline{G}}{2}(n^4-\xi^4)\right]+(\zeta_0)_{\xi=n}.} \qquad (31)$$

On obtient la flèche f au centre de la plaque en faisant $\xi = 0$ dans (31) :

$$\boxed{f=(\zeta_0)_{\xi=0}=\frac{3(1-\nu)\,n^3a^4p}{2Eh_0^3}\left[\overline{F}n^2+\frac{\overline{G}}{2}n^4\right]+(\zeta_0)_{\xi=n}.} \qquad (32)$$

La figure 4 est une représentation graphique de la fonction $\zeta_0(\xi)$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$ et en choisissant $\nu = 0{,}25$. [1]

5° *Calcul des moments de flexion* M_r, M_t *et des tensions normales* σ_r, σ_t. L'application des formules (2) donne, *dans le domaine* $n < \xi < 1$:

$$\begin{cases} M_r=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\dfrac{d\varphi}{dr}+\dfrac{\nu}{r}\varphi\right)=\dfrac{Ec^3a^2\xi^3}{12(1-\nu^2)}\left(\dfrac{d\varphi}{d\xi}+\nu\dfrac{\varphi}{\xi}\right), \\ M_t=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\dfrac{\varphi}{r}+\nu\dfrac{d\varphi}{dr}\right)=\dfrac{Ec^3a^2\xi^3}{12(1-\nu^2)}\left(\dfrac{\varphi}{\xi}+\nu\dfrac{d\varphi}{d\xi}\right), \end{cases}$$

d'où, en remplaçant φ par sa valeur (26) :

$$\boxed{\begin{aligned} M_r&=\frac{a^2p}{2}\left[\overline{C}(\alpha_1+\nu)\xi^{\alpha_1+2}+\overline{D}(\alpha_2+\nu)\xi^{\alpha_2+2}+\overline{E}\nu\xi^2\right], \\ M_t&=\frac{a^2p}{2}\left[\overline{C}(1+\nu\alpha_1)\xi^{\alpha_1+2}+\overline{D}(1+\nu\alpha_2)\xi^{\alpha_2+2}+\overline{E}\xi^2\right]. \end{aligned}} \qquad (33)$$

[1] Les diagrammes des figures 4, 5, 6, 8, 9 et 10 ont été calculés par M. Gilg, assistant de Mécanique à l'E. P. F.

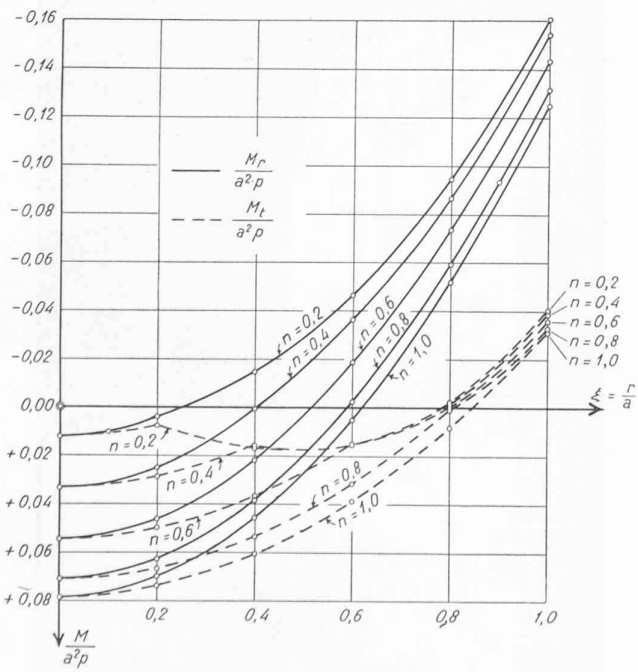

Fig. 5. — Plaque circulaire encastrée de la figure 3a. Représentation graphique de M_r et M_t en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

Dans le domaine $0 < \xi < n$, on a :

$$\begin{cases} M_r=\dfrac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}\left(\dfrac{d\varphi}{dr}+\dfrac{\nu}{r}\varphi\right)=\dfrac{Ec^3b^3}{12(1-\nu^2)a}\left(\dfrac{d\varphi}{d\xi}+\nu\dfrac{\varphi}{\xi}\right), \\ M_t=\dfrac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}\left(\dfrac{\varphi}{r}+\nu\dfrac{d\varphi}{dr}\right)=\dfrac{Ec^3b^3}{12(1-\nu^2)a}\left(\dfrac{\varphi}{\xi}+\nu\dfrac{d\varphi}{d\xi}\right), \end{cases}$$

d'où, en remplaçant φ par sa valeur (27) :

$$\boxed{\begin{aligned} M_r&=\frac{n^3a^2p}{4(1+\nu)}\left[(1+\nu)\,\overline{F}+(3+\nu)\,\overline{G}\xi^2\right], \\ M_t&=\frac{n^3a^2p}{4(1+\nu)}\left[(1+\nu)\,\overline{F}+(1+3\nu)\,\overline{G}\xi^2\right]. \end{aligned}} \qquad (34)$$

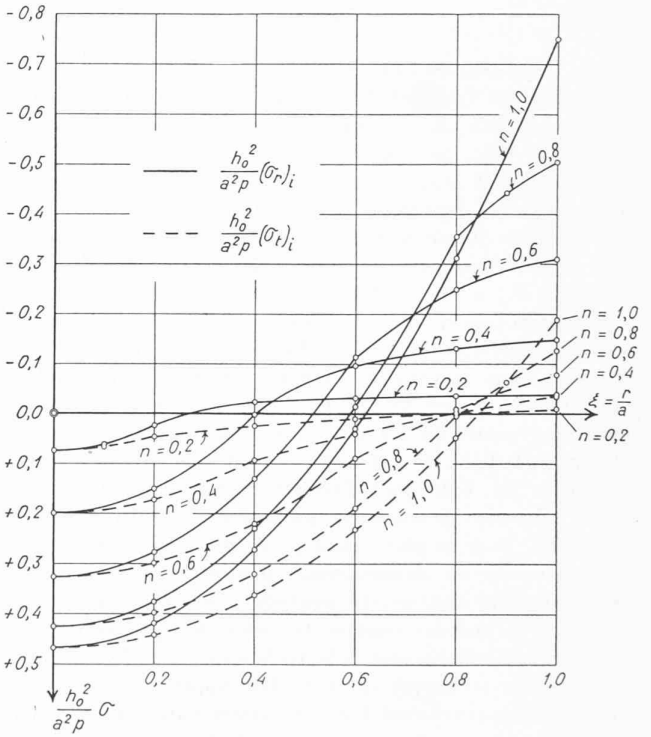

Fig. 6. — Plaque circulaire encastrée de la figure 3a. Représentation graphique de $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

Les moments M_r et M_t sont représentés graphiquement dans la figure 5, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$ et en choisissant $\nu = 0{,}25$. La figure 6 montre les diagrammes correspondants des tensions normales $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ aux points de la surface inférieure de la plaque. Ces tensions ont été calculées en introduisant les valeurs des moments (33) et (34) dans les formules (8).

6° *Conclusions.* Le nombre $n = \frac{b}{a} = 1$ correspond au cas où l'épaisseur a la valeur constante h_0 dans tout le domaine $0 < \xi < 1$; pour $n = 0{,}8$, la plaque possède un renforcement partant du bord $\xi = 1$, où il a la valeur $0{,}25\ h_0$, et décroissant linéairement jusqu'aux points $\xi = 0{,}8$ où il disparaît (voir la partie supérieure de la figure 4). Pour $n = 0{,}6$, le renforcement a, au bord, la valeur $0{,}667\ h_0$ et disparaît aux points $\xi = 0{,}6$, etc.

Les figures 4 et 6 montrent éloquemment l'influence favorable de ces différents renforcements, qui entraînent de fortes diminutions des déformations et des tensions normales $(\sigma_r)_i$, $(\sigma_t)_i$. Cette influence est considérable, si l'on remarque que l'augmentation correspondante du volume de la plaque, due au renforcement, n'est que de 4,7 % pour $n = 0{,}8$ et de 23,1 % pour $n = 0{,}6$.

Il est intéressant de constater qu'un renforcement augmente légèrement les moments de flexion M_r et M_t au voisinage du bord $\xi = 1$, mais les diminue considérablement au centre (fig. 5), tandis que *les tensions* $(\sigma_r)_i$, $(\sigma_t)_i$ *sont diminuées simultanément en ces deux points* (fig. 6). On voit aussi que pour $0{,}6 < n < 0{,}7$, $(\sigma_r)_i$ a sensiblement *la même valeur absolue* au centre et sur le contour extérieur $\xi = 1$. Comme les valeurs extrêmes de $|(\sigma_r)_i|$ sont supérieures ou égales à celles de $|(\sigma_t)_i|$, on en conclut que *c'est en choisissant* $0{,}6 < n < 0{,}7$ *que la matière de la plaque sera le mieux utilisée.*

(A suivre).

Technique et techniciens du Vide

par CÉCILE ROY-POCHON, ingénieur E.P.L.,
ancien président de la Société Française des Ingénieurs Techniciens du Vide

M. le Rédacteur en Chef du *Bulletin Technique de la Suisse Romande* a eu l'amabilité de nous inviter à donner à nos collègues suisses un aperçu sur l'activité des techniciens français du Vide. Je l'en remercie très vivement au nom de notre Société et aussi en mon nom personnel, car il m'est fort agréable de reprendre ainsi contact avec des ingénieurs dont plusieurs furent mes camarades à l'Ecole de Lausanne.

La *Société française des ingénieurs techniciens du Vide* (S. F. I. T. V.) a été fondée en 1945 ; elle s'est placée sous le patronage posthume d'un grand savant français, Fernand Holweck, mort dans une prison allemande à la suite d'odieuses tortures. Nous devons à Fernand Holweck d'admirables réalisations en technique du vide et aussi l'idée de ce groupement d'ingénieurs qu'il avait émise avant guerre.

La S. F. I. T. V. réunit actuellement plus de trois cents spécialistes du Vide dont l'activité s'exerce principalement dans l'industrie. D'éminents professeurs et physiciens en font partie, pour le plus grand profit de notre technique.

Nos lecteurs se demanderont peut-être pourquoi nous avons constitué une société nouvelle alors qu'il existe déjà en France de grandes sociétés savantes susceptibles de s'intéresser occasionnellement à la technique du vide. En voici la raison ; la technique du vide fait appel à des connaissances qui appartiennent à des domaines variés de la physique : thermodynamique, mécanique, électricité, électronique, par exemple, et aussi à la chimie. De plus, les applications du vide se répandent dans une multitude d'industries fort différentes. Il nous a paru utile de nous réunir fréquemment entre théoriciens et praticiens du vide pour échanger et clarifier nos idées, discuter ensemble nos résultats d'expérience, bons ou mauvais, et, par voie de conséquence, simplifier et perfectionner notre technique.

L'activité de la S. F. I. T. V. se manifeste par des conférences mensuelles ou bimensuelles, par des études particulières effectuées au sein de petits groupes d'une dizaine de personnes et par la publication de la revue *Le Vide*, qui est diffusée en France et dans une vingtaine de pays étrangers.

Nos conférences sont toutes consacrées à la technique du vide et à ses applications multiples.

La technique du vide proprement dite est, comme chacun le sait, l'art de faire le vide dans une enceinte, de mesurer la pression résiduelle (car il reste toujours quelque chose dans le « vide ») et de maintenir le vide, ce qui est souvent le plus difficile et le plus décevant.

On fait le vide au moyen de pompes de types variés. Pour obtenir un vide poussé tel que celui exigé dans la fabrication des tubes électroniques, il faut en général utiliser, en cascade, deux pompes de principes différents : une pompe dite « primaire » (pompe rotative à palettes) et une pompe « secondaire » qui permet d'atteindre les vides les plus poussés. Mais qu'est-ce qu'un « vide poussé » ? C'est un vide tel que la pression gazeuse résiduelle soit inférieure au millième de millimètre de mercure (1 micron). On peut admettre que dans les meilleures conditions d'emploi, les moyens modernes de pompage permettent de réduire la pression gazeuse à une valeur de l'ordre de 10^{-7} mm de mercure. Si faible que soit cette pression, le vide parfait est fort loin d'être atteint puisqu'il reste encore, en gros, trois milliards de molécules gazeuses par centimètre cube.

Le vide effectué, il faut le contrôler et, si possible, le mesurer. On dispose pour cela d'appareils très divers : tubes témoins à décharge, jauges de Mac Léod appliquant la loi de Mariotte, jauges thermiques, jauges d'ionisation, mano-

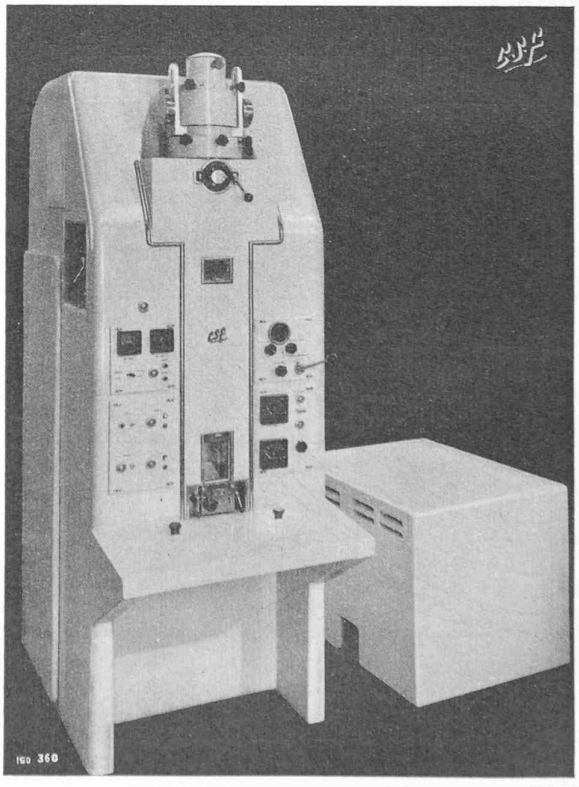

Fig. 1. — Microscope électronique C.S.F.