Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 75 (1949)

Heft: 26

Artikel: Sur un type de plaque circulaire posée d'épaisseur linéairement variable

Autor: Favre, Henry

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56891

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

75e année 17 décembre 1949 N° 26

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :
Suisse : 1 an, 20 francs
Etranger : 25 francs
Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 17 francs
Etranger : 22 francs
Pour les abonnements s'adresser à la librairie **F. ROUGE & Cie** à Lausanne
Prix du numéro : 1 fr. 25

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. — Membres : *Fribourg :* MM. † L. HERTLING, architecte ; P. JOYE, professeur ; *Vaud :* MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. D'OKOLSKI, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; CH. THÉVENAZ, architecte : *Genève :* MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. MARTIN, architecte ; E. ODIER, architecte, *Neuchâtel :* MM. J. BÉGUIN, architecte ; G. FURTER, ingénieur ; R. GUYE, ingénieur ; *Valais :* MM. J. DUBUIS, ingénieur ; D. BURGENER, architecte.

Rédaction : D. BONNARD, ingénieur. Case postale Chauderon 475, LAUSANNE

TARIF DES ANNONCES
Le millimètre (larg. 47 mm) 20 cts
Réclames : 60 cts le mm (largeur 95 mm)
Rabais pour annonces répétées
ANNONCES SUISSES S.A.
5, Rue Centrale
Tél. 2 33 26
LAUSANNE et Succursales

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE
A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte : R. NEESER, ingénieur.

SOMMAIRE : *Sur un type de plaque circulaire posée d'épaisseur linéairement variable*, par HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich. — Société suisse des ingénieurs et des architectes : *Extrait du procès-verbal de l'assemblée des délégués de la S. I. A. du 9 septembre 1949, à Bâle.* — BIBLIOGRAPHIE. — COMMUNIQUÉ : *Offre d'emploi au Pakistan ; Place au concours.* — SERVICE DE PLACEMENT. — NOUVEAUTÉS, INFORMATIONS DIVERSES.

SUR UN TYPE DE PLAQUE CIRCULAIRE POSÉE D'ÉPAISSEUR LINÉAIREMENT VARIABLE

par HENRY FAVRE
Professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich

Dans un mémoire paru récemment, nous avons étudié un certain type de plaque circulaire, d'épaisseur linéairement variable, en supposant la plaque encastrée le long du contour la délimitant [1]. Cette étude a montré l'influence considérable, sur les déformations et les tensions, d'un renforcement de l'épaisseur au voisinage du bord. Nous avons conséquemment jugé utile d'examiner aussi le cas où la même plaque n'est pas encastrée, mais simplement *posée le long du contour.*

Dans le présent mémoire, nous étudierons donc une plaque circulaire posée, où l'épaisseur h a une valeur constante h_0 à l'intérieur d'un cercle de rayon b et croît de h_0 à H d'après la loi $h = cr$, où c désigne une constante, lorsque la distance r d'un point au centre croît de la valeur b à celle, a, du rayon du contour (fig. 1).

Dans le premier paragraphe, nous rappellerons les formules fondamentales de la théorie des plaques minces d'épaisseur variable. Dans le deuxième, nous étudierons le cas d'une surcharge uniforme agissant sur la plaque posée de la figure 1 et dans le troisième, celui d'une force appliquée au centre. Enfin, dans un dernier paragraphe, nous comparerons à l'aide de diagrammes les principaux résultats obtenus dans nos deux mémoires et conclurons.

§ 1. Formules fondamentales de la théorie des plaques circulaires d'épaisseur variable [2]

Nous supposons que l'épaisseur h, la surcharge par unité de surface p et les conditions d'appui soient uniquement

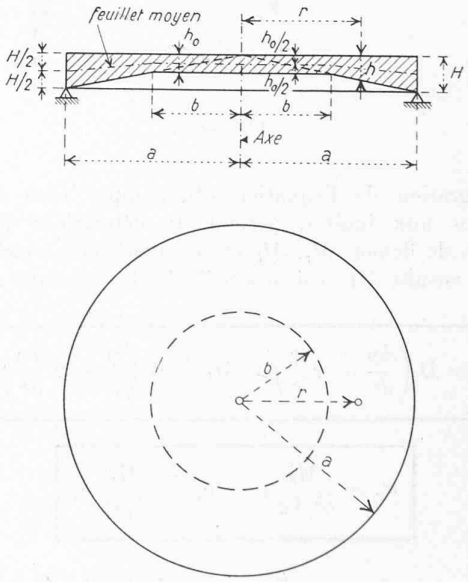

Fig. 1.

[1] Voir *Bulletin technique de la Suisse romande*, numéros des 27 août et 10 septembre 1949.
[2] Voir *loc. cit.*, § 1.

fonctions de r. Nous admettons en outre que l'épaisseur soit petite par rapport aux autres dimensions et que la dérivée $\frac{dh}{dr}$ soit également un petit nombre. Enfin, nous supposons que la courbure du feuillet moyen soit très faible, de façon que les forces intérieures agissant dans cette surface soient négligeables.

Soient ζ_0 le déplacement, parallèle à l'axe de la plaque, d'un point du feuillet moyen [1] et

$$\boxed{\varphi = -\frac{d\zeta_o}{dr}} \tag{1}$$

la variation (due à la déformation) de la pente de cette surface. La grandeur φ satisfait à l'équation différentielle du second ordre :

$$\boxed{D\frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr}+\frac{\varphi}{r}\right)+\frac{dD}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr}+\nu\frac{\varphi}{r}\right)=-Q,} \tag{2}$$

où Q désigne l'effort tranchant relatif à l'unité de longueur (fig. 2) et

$$\boxed{D=\frac{Eh^3}{12\,(1-\nu^2)},} \tag{3}$$

E étant le module d'élasticité et ν le nombre de Poisson.

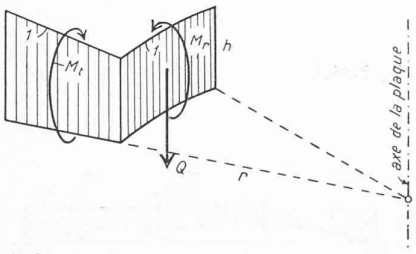

Fig. 2.

L'intégration de l'équation (2), compte tenu de deux conditions aux limites, permet de déterminer $\varphi(r)$. Les moments de flexion M_r, M_t et les tensions normales σ_r, σ_t peuvent ensuite être calculés à l'aide des formules :

$$\boxed{M_r=D\left(\frac{d\varphi}{dr}+\nu\frac{\varphi}{r}\right),\quad M_t=D\left(\frac{\varphi}{r}+\nu\frac{d\varphi}{dr}\right),} \tag{4}$$

$$\boxed{\sigma_r=\frac{M_r}{h^3/12}\,z,\qquad \sigma_t=\frac{M_t}{h^3/12}\,z,} \tag{5}$$

z désignant la distance d'un point de la plaque au feuillet moyen. En particulier, les valeurs de ces tensions aux points $z = h/2$ de la face inférieure sont :

[1] ζ_0, ainsi que la grandeur z que nous introduirons plus loin, sont supposés *comptés positivement vers le bas.*

$$\boxed{(\sigma_r)_i=\frac{6\,M_r}{h^2},\quad (\sigma_t)_i=\frac{6\,M_t}{h^2};} \tag{6}$$

celles aux points correspondants $z = -h/2$ de la face supérieure sont égales aux valeurs (6) changées de signe.

Enfin, le déplacement ζ_0 s'obtient en intégrant l'équation (1) :

$$\boxed{\zeta_o=-\int\varphi(r)\,dr+C,} \tag{7}$$

C étant une constante qu'on détermine à l'aide d'une condition aux limites.

Nous allons appliquer ces formules à la plaque de la figure 1.

§ 2. Cas d'une surcharge uniformément répartie

Nous avons (fig. 3 *a*) :

$h = cr$	dans le domaine $b < r < a$,
$h = cb = h_0 = \text{const.}$	dans le domaine $0 < r < b$,
et $p = \text{const.}$	quel que soit r.

Nous utiliserons la même méthode que dans le cas de la plaque encastrée étudié dans notre premier mémoire.

1° *Domaine* $b < r < a$ (fig. 3 *b*). Remplaçons l'action de la partie centrale, sur celle que nous considérons ici, par un couple de flexion M_0 (que nous déterminerons plus loin) et un effort tranchant Q_0 constants, appliqués le long du bord intérieur. Comme dans le cas déjà traité, nous avons :

$$Q=\frac{\pi r^2 p}{2\pi r}=\frac{pr}{2},\qquad Q_o=\frac{pb}{2},$$

$$D=\frac{Eh^3}{12\,(1-\nu^2)}=\frac{Ec^3r^3}{12\,(1-\nu^2)}$$

et l'équation (2) devient, après simplifications :

$$r^2\frac{d^2\varphi}{dr^2}+4r\frac{d\varphi}{dr}+(3\nu-1)\,\varphi=-\frac{6\,(1-\nu^2)\,p}{Ec^3}. \tag{8}$$

La solution générale de cette équation différentielle d'Euler est [1] :

$$\varphi=Ar^{\alpha_1}+Br^{\alpha_2}+\frac{6\,(1-\nu^2)\,p}{(1-3\nu)\,Ec^3}, \tag{9}$$

où

$$\alpha_1=-1{,}5+\sqrt{3{,}25-3\nu},\qquad \alpha_2=-1{,}5-\sqrt{3{,}25-3\nu}, \tag{10}$$

A et B désignant des constantes.

Les conditions aux limites sont ici :

$$(M_r)_{r=a}=0\quad\text{et}\quad(M_r)_{r=b}=M_o. \tag{11}$$

En introduisant dans ces deux relations l'expression (9) de φ, on obtient un système de deux équations linéaires, d'où l'on tire facilement A et B. En substituant ces valeurs dans (9), on obtient la valeur de φ relative au domaine $b < r < a$ considéré. Nous la désignerons par φ_1 :

[1] Voir *loc. cit.*, équations (16) et (15).

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 = \frac{6(1-\nu^2)}{Ec^3R}\Bigg\{&(\alpha_2+\nu)\left[\frac{2a^{\alpha_2}}{b^2}M_o+\nu\frac{(b^{\alpha_2}-a^{\alpha_2})p}{1-3\nu}\right]r^{\alpha_1}-\\ &-(\alpha_1+\nu)\left[\frac{2a^{\alpha_1}}{b^2}M_o+\nu\frac{(b^{\alpha_1}-a^{\alpha_1})p}{1-3\nu}\right]r^{\alpha_2}+\frac{Rp}{1-3\nu}\Bigg\},\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

où $\quad R = (\alpha_1 + \nu)(\alpha_2 + \nu)(a^{\alpha_2} b^{\alpha_1} - a^{\alpha_1} b^{\alpha_2})$.

La valeur de φ_1 se présente sous une forme indéterminée si $\nu = \frac{1}{3}$. Dans ce cas, comme nous l'avons vu à propos de la plaque encastrée, le plus simple est d'intégrer de nouveau l'équation (8). *Nous poursuivrons les calculs en supposant* $\nu \neq \frac{1}{3}$.

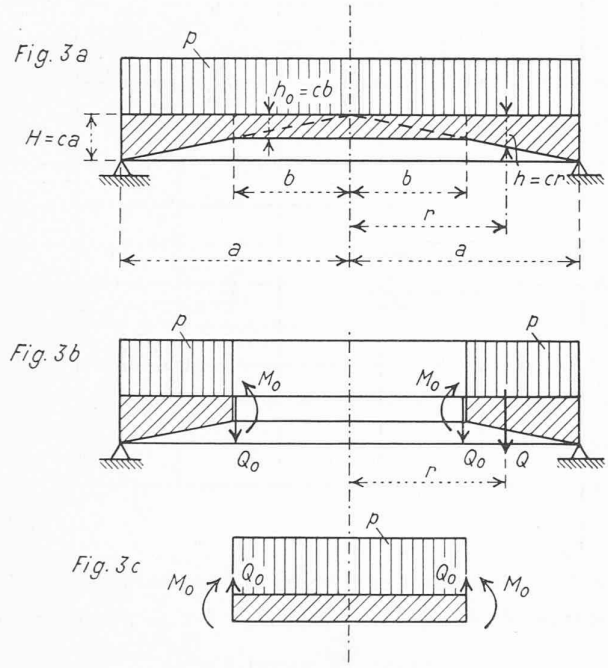

Fig. 3, *a* à *c*.

2° *Domaine* $0 < r < b$ (fig. 3 *c*). Les calculs sont identiques à ceux relatifs au cas de la plaque encastrée. En désignant par φ_2 la valeur de φ relative au domaine considéré, on a [1] :

$$\varphi_2 = \frac{12(1-\nu)}{Ec^3b^3}\left[\left(M_o + \frac{(3+\nu)b^2p}{16}\right)r - \frac{(1+\nu)p}{16}r^3\right]. \quad (13)$$

3° *Condition de continuité entre les deux domaines.* Pour déterminer le moment inconnu M_0, nous avons la condition :

$$(\varphi_1)_{r=b} = (\varphi_2)_{r=b}, \quad (14)$$

d'où l'on tire, en remplaçant φ_1 et φ_2 par leurs valeurs (12) et (13) :

$$\boxed{M_o = \mu b^2 p,} \quad (15)$$

en posant :

[1] *Loc. cit.*, équation (20).

$$\boxed{\mu = \frac{\dfrac{\nu(n^{\alpha_1}-n^{\alpha_1-\alpha_2})}{\alpha_1+\nu} - \dfrac{\nu(n^{\alpha_1}-1)}{\alpha_2+\nu} - \dfrac{3+7\nu}{4(1+\nu)}(1-n^{\alpha_1-\alpha_2})}{2(1-3\nu)\left[\dfrac{1}{\alpha_2+\nu} - \dfrac{n^{\alpha_1-\alpha_2}}{\alpha_1+\nu} - \dfrac{1-n^{\alpha_1-\alpha_2}}{1+\nu}\right]},} \quad (16)$$

où

$$\boxed{n = \frac{b}{a}.} \quad (17)$$

En substituant la valeur (15) de M_0 dans les relations (12) et (13), on obtient, en posant encore

$$\boxed{\xi = \frac{r}{a}:} \quad (18)$$

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{6(1-\nu^2)p}{Ec^3}(\overline{C}\xi^{\alpha_1} + \overline{D}\xi^{\alpha_2} + \overline{E}),} \quad (19)$$

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{3(1-\nu)p}{Ec^3}(\overline{F}\xi + \overline{G}\xi^3),} \quad (20)$$

où

$$\left.\begin{aligned}&\overline{C} = \frac{2n^{-\alpha_2}\mu + \dfrac{\nu(1-n^{-\alpha_2})}{1-3\nu}}{(\alpha_1+\nu)(n^{\alpha_1-\alpha_2}-1)}, \quad \overline{D} = \frac{2n^{-\alpha_1}\mu + \dfrac{\nu(1-n^{-\alpha_1})}{1-3\nu}}{(\alpha_2+\nu)(n^{\alpha_2-\alpha_1}-1)},\\ &\overline{E} = \frac{1}{1-3\nu}, \quad \overline{F} = \frac{4\mu}{n} + \frac{3+\nu}{4n}, \quad \overline{G} = -\frac{1+\nu}{4n^3}.\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

4° *Calcul de* ζ_0, f, M_r et M_t. Les expressions (19) et (20) de φ_1 et φ_2 sont identiques à celles que nous avons obtenues dans le cas de la plaque encastrée, chargée uniformément. Seules les valeurs (21) des coefficients $\overline{C}$, ... diffèrent[1]. En conséquence, les formules donnant les valeurs de ζ_0, $f = (\zeta_0)_{max}$, M_r et M_t sont les mêmes que celles obtenues précédemment [2]. Nous les rappelons comme suit :

L'*équation de la surface élastique* (rapportée au feuillet moyen) est,
dans le domaine $b < r < a$ ou $n < \xi < 1$:

$$\boxed{\begin{aligned}\zeta_0 = \frac{6(1-\nu^2)n^3a^4p}{Eh_0^3}\cdot\\ \cdot\left[\frac{\overline{C}}{\alpha_1+1}(1-\xi^{\alpha_1+1}) + \frac{\overline{D}}{\alpha_2+1}(1-\xi^{\alpha_2+1}) + \overline{E}(1-\xi)\right],\end{aligned}} \quad (22)$$

dans le domaine $0 < r < b$ *ou* $0 < \xi < n$:

$$\boxed{\zeta_0 = \frac{3(1-\nu)n^3a^4p}{2Eh_0^3}\left[\overline{F}(n^2-\xi^2) + \frac{\overline{G}}{2}(n^4-\xi^4)\right] + (\zeta_0)_{\xi=n},} \quad (23)$$

où

$$\left.\begin{aligned}(\zeta_0)_{\xi=n} = \frac{6(1-\nu^2)n^3a^4p}{Eh_0^3}\cdot\\ \cdot\left[\frac{\overline{C}}{\alpha_1+1}(1-n^{\alpha_1+1}) + \frac{\overline{D}}{\alpha_2+1}(1-n^{\alpha_2+1}) + \overline{E}(1-n).\right]\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

[1] Comparer aux formules (26), (27) et (28) de notre premier mémoire.
[2] Voir *loc. cit.*, form. (29) à (34).

La *flèche au centre de la plaque* est :

$$\boxed{f = (\zeta_0)_{\xi=0} = \frac{3(1-\nu)n^3a^4p}{2Eh_0^3}\left[\bar{F}n^2 + \frac{\bar{G}}{2}n^4\right] + (\zeta_0)_{\xi=n}.} \qquad (25)$$

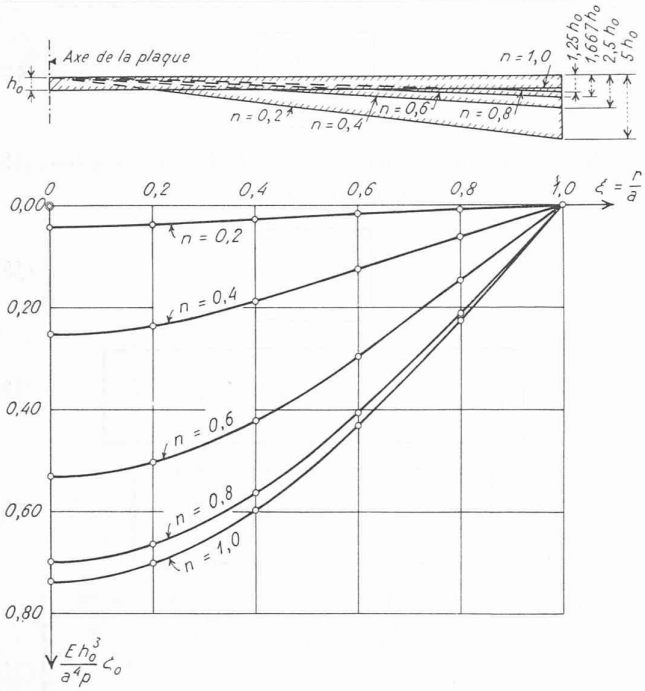

Fig. 4. — Plaque circulaire posée de la figure 3 *a*. Représentation graphique de ζ_0 en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

Les valeurs des *moments de flexion* sont, *pour* $n < \xi < 1$:

$$\boxed{\begin{aligned} M_r &= \frac{a^2p}{2}\left[\bar{C}(\alpha_1+\nu)\xi^{\alpha_1+2} + \bar{D}(\alpha_2+\nu)\xi^{\alpha_2+2} + \bar{E}\nu\xi^2\right], \\ M_t &= \frac{a^2p}{2}\left[\bar{C}(1+\nu\alpha_1)\xi^{\alpha_1+2} + \bar{D}(1+\nu\alpha_2)\xi^{\alpha_2+2} + \bar{E}\xi^2\right]; \end{aligned}} \qquad (26)$$

pour $0 < \xi < n$:

$$\boxed{\begin{aligned} M_r &= \frac{n^3a^2p}{4(1+\nu)}\left[(1+\nu)\,\bar{F} + (3+\nu)\,\bar{G}\xi^2\right], \\ M_t &= \frac{n^3a^2p}{4(1+\nu)}\left[(1+\nu)\,\bar{F} + (1+3\nu)\,\bar{G}\xi^2\right]. \end{aligned}} \qquad (27)$$

La figure 4 est une représentation graphique de la fonction $\zeta_0(\xi)$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$ [1]. Les moments M_r et M_t sont représentés graphiquement dans la figure 5. La figure 6 montre les diagrammes correspondants des tensions normales $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ aux points de la face inférieure de la plaque. Ces tensions ont été déterminées en introduisant les valeurs des moments (26) et (27) dans les formules (6).

Tous ces diagrammes ont été calculés en choisissant $\nu = 0{,}25$.

[1] Les diagrammes des figures 4, 5, 6, 8, 9, 10 et 11 à 16 ont été calculés par M. *E. Chabloz*, assistant de Mécanique à l'E. P. F.

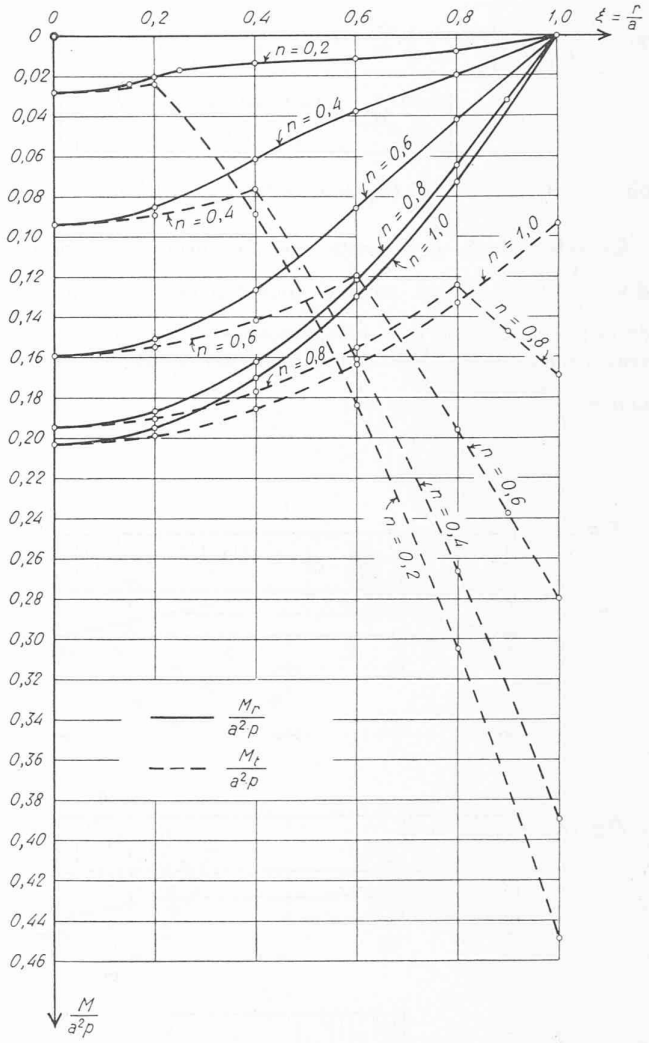

Fig. 5. — Plaque circulaire posée de la figure 3 *a*. Représentation graphique de M_r et M_t en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

5° *Conclusions*. Les profils des plaques pour lesquelles $n = 1{,}0, 0{,}8, 0{,}6, 0{,}4$ et $0{,}2$ sont esquissés dans la partie supérieure de la figure 4. La partie inférieure de cette figure, où sont dessinées les courbes $\zeta_0(\xi)$ correspondantes, montre clairement l'influence favorable, sur les déformations, des renforcements que présentent ces différents profils.

Les moments de flexion M_r subissent une influence analogue ; par contre, les moments M_t sont diminués dans la partie centrale, mais fortement augmentés au voisinage du contour (fig. 5). Quant aux tensions normales $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$, elles sont en général très réduites par l'existence d'un renforcement (fig. 6). Il y a exception pour la tension $(\sigma_t)_i$, dont la valeur au voisinage du contour est sensiblement indépendante de $n = \frac{b}{a}$, lorsque ce rapport est supérieur à 0,5 environ.

§ 3. Cas d'une force appliquée au centre

Supposons maintenant qu'une force P, parallèle à l'axe, soit appliquée au centre de la plaque (fig. 7). Les calculs relatifs à ce cas étant analogues à ceux du paragraphe pré-

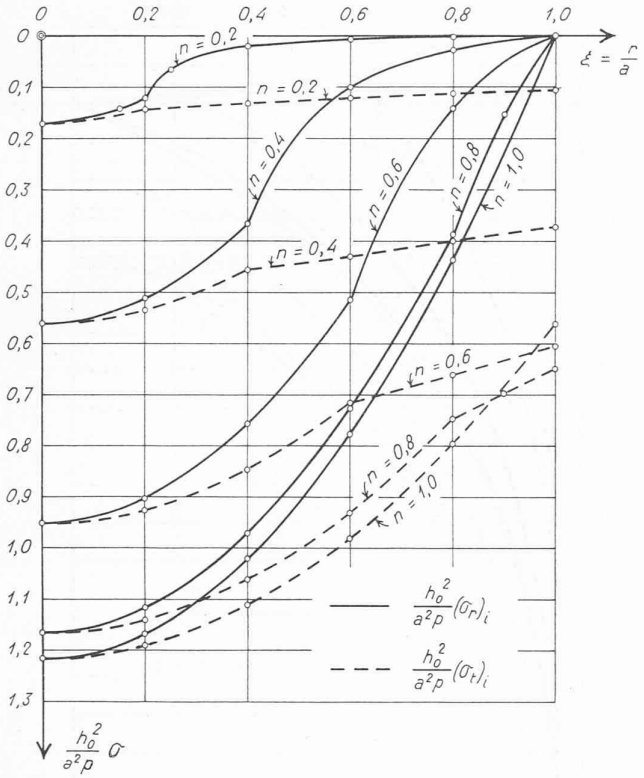

Fig. 6. — Plaque circulaire posée de la figure 3 *a*. Représentation graphique de $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

cédent, nous nous bornons à en donner seulement les principaux résultats, en utilisant les mêmes notations que précédemment et en supposant encore $\nu \neq 1/3$.

On obtient pour le *moment de flexion* $M_0 = (M_r)_{r=b}$ relatif aux points du contour séparant les deux domaines :

$$\boxed{M_0 = \mu' P,} \tag{28}$$

en posant :

$$\boxed{\mu' = \frac{\dfrac{(1+\nu)(2-\nu)}{\alpha_1+\nu}\left(n^{\alpha_1-\alpha_2} - n^{\alpha_1+2}\right) - \dfrac{(1+\nu)(2-\nu)}{\alpha_2+\nu}\left(1-n^{\alpha_1+2}\right) + \dfrac{1-5\nu}{2}\left(1-n^{\alpha_1-\alpha_2}\right)}{6\pi(1-\nu^2)\left[\dfrac{1}{\alpha_2+\nu} - \dfrac{n^{\alpha_1-\alpha_2}}{\alpha_1+\nu} - \dfrac{1-n^{\alpha_1-\alpha_2}}{1+\nu}\right]},} \tag{29}$$

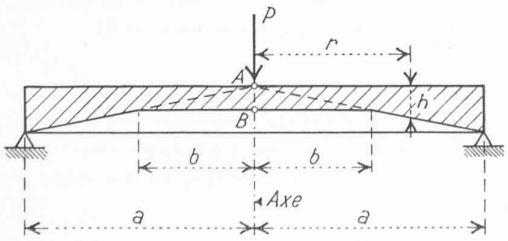

Fig. 7.

où $n = \frac{b}{a}$ et α_1, α_2 sont encore donnés par les formules (10).

Les variations φ_1 *et* φ_2 *des pentes relatives aux domaines* $n < \xi < 1$ *et* $0 < \xi < n$ ont respectivement les valeurs :

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{2(1+\nu)P}{\pi E c^3 a^2}\left(C'\xi^{\alpha_1} + D'\xi^{\alpha_2} + \frac{1}{\xi^2}\right),} \tag{30}$$

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{3(1-\nu)P}{\pi E c^3 n^3 a^2}\left(F'\xi + G'\xi \operatorname{Log}\xi\right),} \tag{31}$$

où

$$\left.\begin{aligned} C' &= \frac{6\pi(1-\nu)n^{-\alpha_2-2}\mu' + (2-\nu)\left(n^{-\alpha_2-2}-1\right)}{(\alpha_1+\nu)\left(n^{\alpha_1-\alpha_2}-1\right)}, \\ D' &= \frac{6\pi(1-\nu)n^{-\alpha_1-2}\mu' + (2-\nu)\left(n^{-\alpha_1-2}-1\right)}{(\alpha_2+\nu)\left(n^{\alpha_2-\alpha_1}-1\right)}, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$F' = 1 + 4\pi\mu' + (1+\nu)\operatorname{Log} n, \quad G' = -1-\nu.$$

Les expressions (30) et (31) de φ_1 et φ_2 sont identiques à celles que nous avons obtenues dans le cas de la plaque encastrée, sur laquelle agissait une force P appliquée au centre. Seules les valeurs (32) des coefficients C', ... diffèrent [1]. Les formules donnant les valeurs de ζ_0, $f = (\zeta_0)_{max}$, M_r et M_t sont donc les mêmes que précédemment. Comme elles ont déjà été indiquées dans notre premier mémoire, nous nous permettons d'y renvoyer le lecteur [2].

Les figures 8, 9 et 10 donnent les diagrammes de ζ_0, M_r, M_t, $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ calculés en supposant $\nu = 0{,}25$.

La figure 8 montre l'influence très favorable d'un renforcement de la plaque sur les déformations. Cette influence est

[1] Comparer aux formules (37), (38) et (39) de notre premier mémoire.
[2] Voir *loc. cit.*, form. (40) à (45).

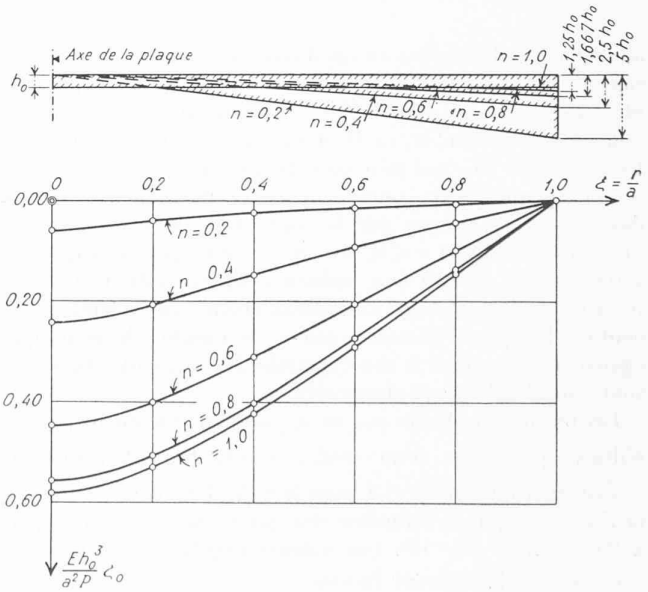

Fig. 8. — Plaque circulaire posée de la figure 7. Représentation graphique de ζ_0 en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

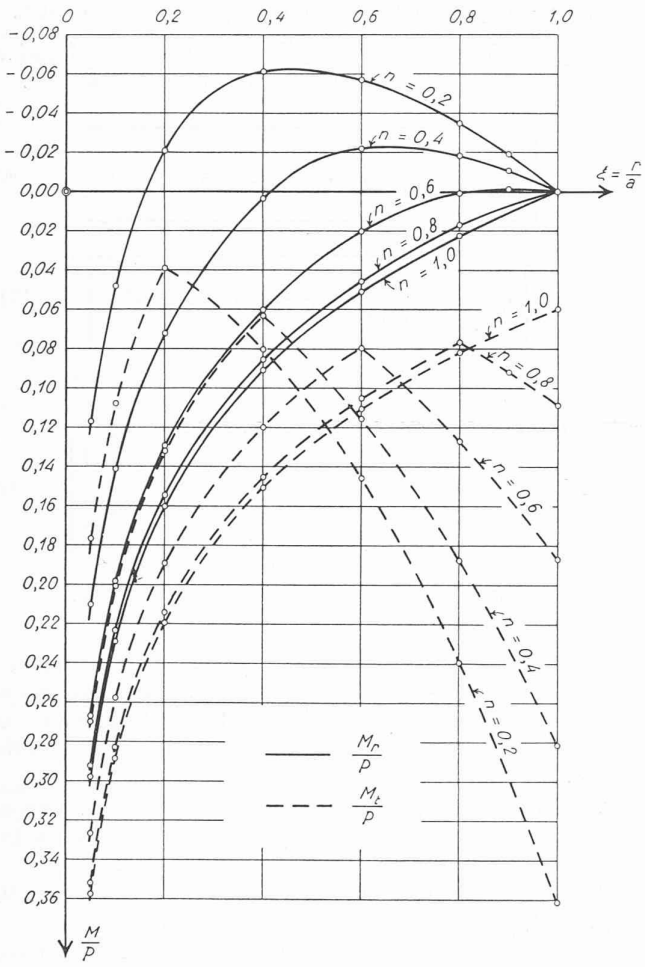

Fig. 9. — Plaque circulaire posée de la figure 7. Représentation graphique de M_r et M_t en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

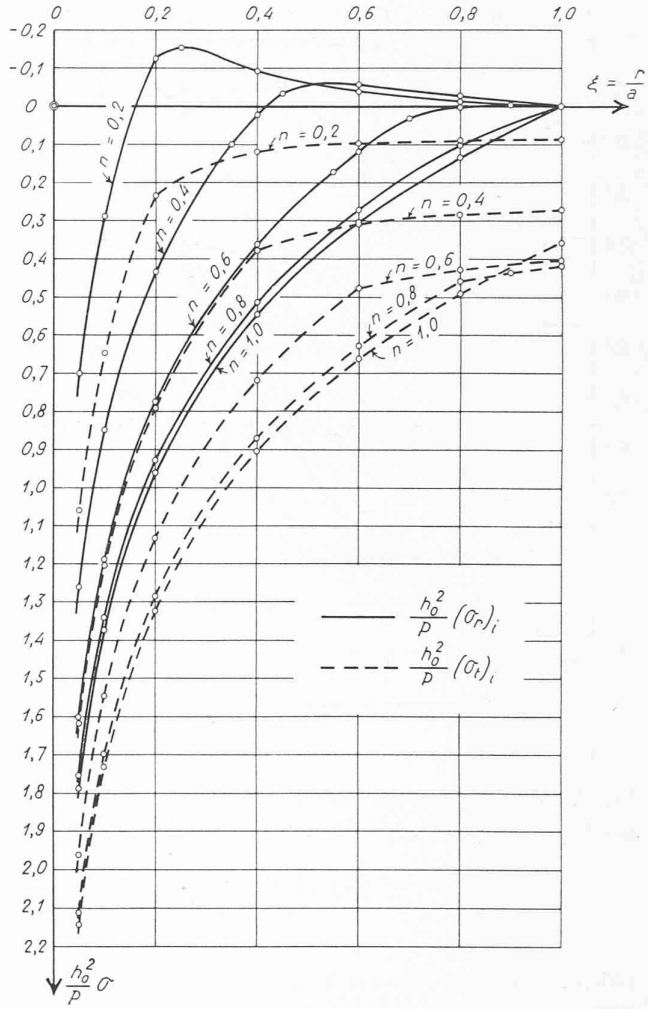

Fig. 10. — Plaque circulaire posée de la figure 7. Représentation graphique de $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

analogue à celle relative au cas d'une surcharge uniformément répartie (fig. 4). Par contre, des renforcements de plus en plus prononcés ($n = 0,8$, $0,6$, ...) modifient les valeurs des moments de flexion M_r et M_t d'une façon inattendue (fig. 9). Les moments M_r, qui sont positifs quel que soit $\xi < 1$ pour $n = 1$ (plaque d'épaisseur constante) deviennent *négatifs* dans une zone limitée par le contour de la plaque et par un cercle de rayon $r < a$, dès que n est égal ou supérieur à 0,6 environ. Quant aux moments M_t, ils restent toujours positifs, mais croissent considérablement au voisinage du contour lorsque n décroît à partir de l'unité. On remarque également que, dans la zone centrale, les moments M_r et M_t sont considérablement diminués.

Les tensions normales $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ sont en général fortement réduites par l'effet d'un renforcement, mais $(\sigma_r)_i$, qui est positif quel que soit $\xi < 1$ pour $n = 1$, devient négatif dans la zone où M_r l'est lui-même dès que n est égal ou inférieur à 0,6 environ (fig. 10). Ces valeurs négatives de $(\sigma_r)_i$ sont cependant relativement faibles.

Au centre de la plaque, M_r, M_t, $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ deviennent infinis et la théorie utilisée dans le présent calcul doit être révisée. Comme nous l'avons vu dans notre premier mémoire, c'est au point B de la figure 7 qu'existe la tension la plus dangereuse au voisinage du centre. Elle est donnée par la formule [1] :

$$\boxed{(\sigma_r)_B = (\sigma_t)_B = \frac{P}{h_0^2}\left[\begin{array}{c}(1+\nu)\,(0{,}485\,\mathrm{Log}\,\frac{b}{h_0} + \\ +\,0{,}52) + 6\mu' + 0{,}48\end{array}\right]}, \quad (33)$$

où μ' se calcule à l'aide de (29).

En résumé, les tensions $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ relatives à la plaque de la figure 7 sont données par les diagrammes de la figure 10, sauf au voisinage du centre, où la tension dangereuse, qui se produit en B, est donnée par la formule (33).

Remarque. Les résultats obtenus dans la présente étude sont soumis aux mêmes restrictions que celles précisées dans notre premier mémoire. Ils ne sont applicables que si h_0 *et* H *sont petits par rapport à* a et si ζ_0 *est lui-même petit par rapport à* h_0.

[1] Voir la form. (48) de notre premier mémoire.

§ 4. Comparaison de la plaque posée et de la plaque encastrée. Conclusion.

Les figures 11, 12 et 13 permettent de comparer les valeurs de ζ_0, M_r, M_t, $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ pour $n = 0{,}6$, dans le cas où la plaque est *encastrée* (traits continus) et dans celui où elle est *posée* (traits interrompus), *la surcharge étant uniformément répartie* dans les deux cas. Les figures 14, 15 et 16 permettent de faire la même comparaison lorsqu'*une force P agit au centre de la plaque.*

On remarquera surtout que, dans le cas d'une surcharge uniformément répartie, l'encastrement provoque des réductions considérables des *tensions normales* $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ (fig. 13). Ces réductions sont moins accentuées dans le cas d'une force P appliquée au centre (fig. 16). Il est également intéressant de constater que l'encastrement diminue beaucoup plus les *déformations* ζ_0, dans le cas d'une surcharge uniformément répartie, que dans celui d'une force agissant au centre (fig. 11 et 14).

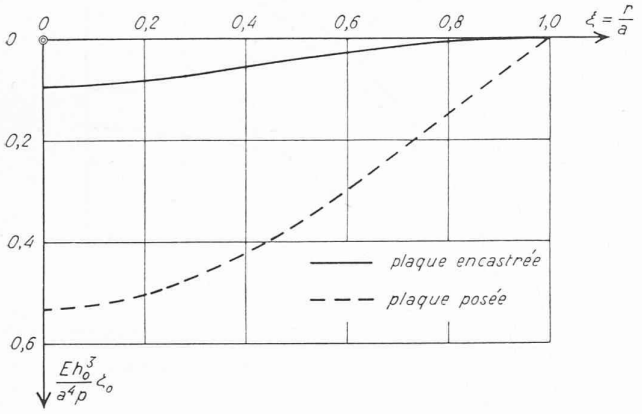

Fig. 11. — Plaque circulaire $n = 0{,}6$, sous l'action d'une surcharge uniformément répartie p. Représentation graphique de la fonction $\zeta_0(\xi)$ dans le cas où la plaque est encastrée et dans celui où elle est posée le long du contour($\nu = 0{,}25$).

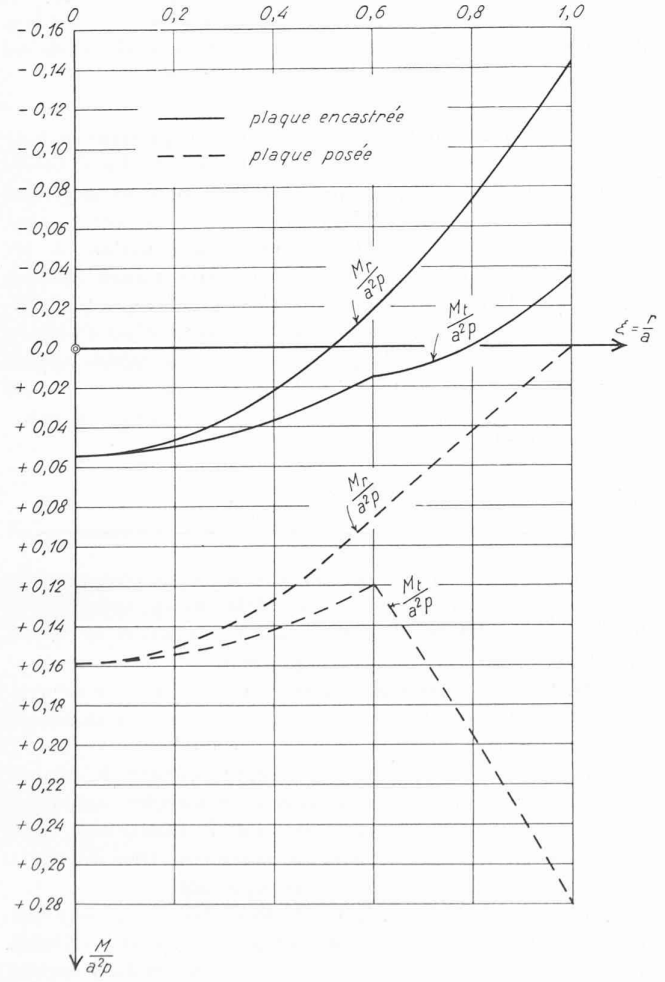

Fig. 12. — Plaque circulaire $n = 0{,}6$, sous l'action d'une surcharge uniformément répartie p. Représentations graphiques de M_r et M_t dans le cas où la plaque est encastrée et dans celui où elle est posée le long du contour ($\nu = 0{,}25$).

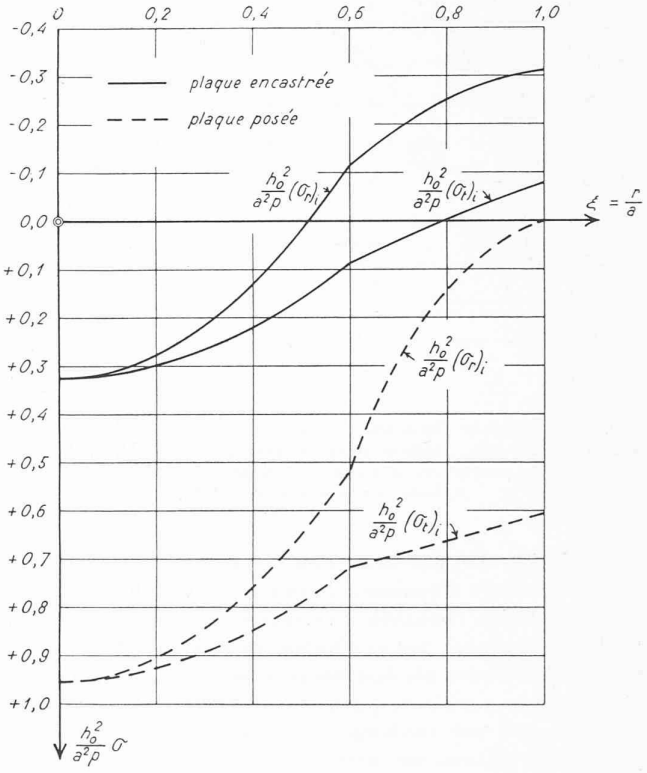

Fig. 13. — Plaque circulaire $n = 0{,}6$, sous l'action d'une surcharge uniformément répartie p. Représentations graphiques de $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ dans le cas où la plaque est encastrée et dans celui où elle est posée le long du contour ($\nu = 0{,}25$).

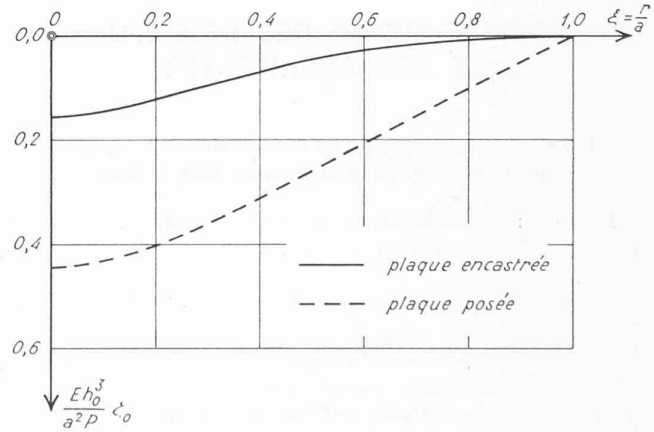

Fig. 14. — Plaque circulaire $n = 0{,}6$, sous l'action d'une force P agissant au centre. Représentation graphique de la fonction $\zeta_0(\xi)$ dans le cas où la plaque est encastrée et dans celui où elle est posée le long du contour ($\nu = 0{,}25$).

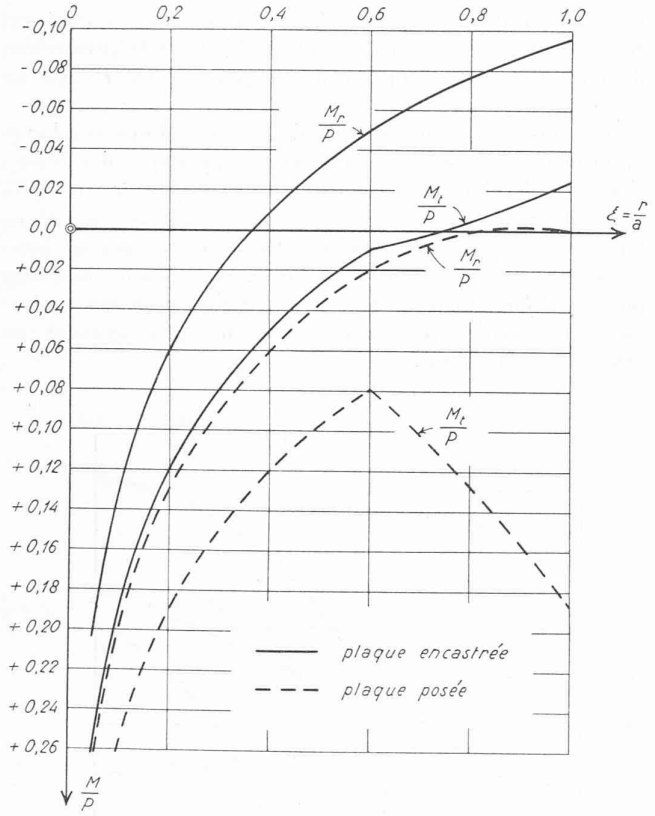

Fig. 15. — Plaque circulaire $n = 0{,}6$, sous l'action d'une force P agissant au centre. Représentations graphiques de M_r et M_t dans le cas où la plaque est encastrée et dans celui où elle est posée le long du contour ($\nu = 0{,}25$.

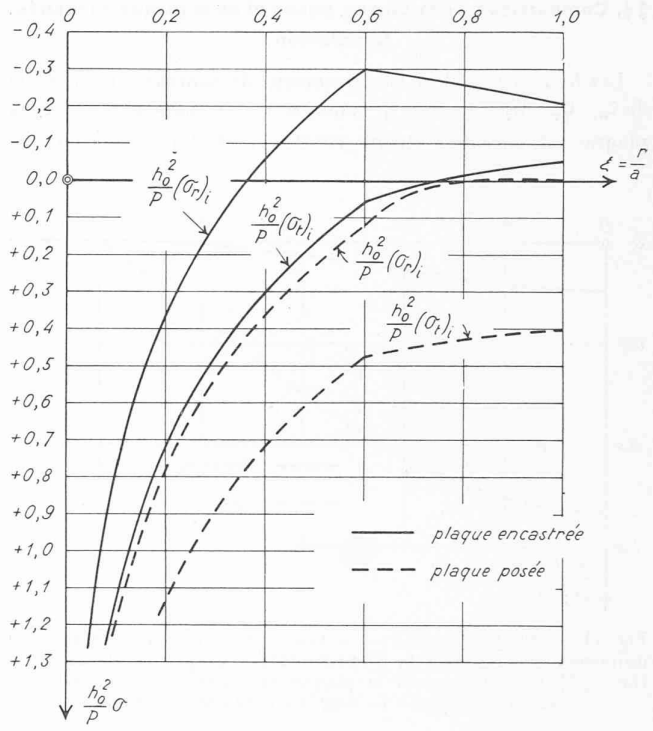

Fig. 16. — Plaque circulaire $n = 0{,}6$, sous l'action d'une force P agissant au centre. Représentations graphiques de $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ dans dans le cas où la plaque est encastrée et dans celui où elle est posée le long du contour ($\nu = 0{,}25$.

Conclusion. De nos deux études sur un certain type de plaque circulaire d'épaisseur linéairement variable se dégage cette conclusion essentielle : *un renforcement satisfaisant à la loi $h = cr$ entraîne une diminution considérable des déformations et des valeurs absolues des tensions dans tout le domaine d'une plaque circulaire, posée ou encastrée, sur laquelle est appliquée soit une surcharge uniformément répartie, soit une force isolée agissant au centre.*

Remarque. Dans tous les profils des plaques étudiées, nous avons supposé que la face sur laquelle sont appliquées les forces était plane et que l'autre face était choisie de façon à satisfaire à la condition de variation d'épaisseur $h = cr$ pour $b < r < a$ et $h = cb = h_0$ pour $0 < r < b$. En d'autres termes, nous avons supposé que le renforcement de la plaque était *unilatéral*. Il est évident que tous ces résultats sont encore valables si, le renforcement restant unilatéral, les forces agissent sur la face non plane. Ils restent aussi valables dans le cas d'un renforcement *bilatéral*, symétrique par rapport à un plan qui est alors le feuillet moyen. *C'est d'ailleurs dans ce dernier cas que l'approximation de nos calculs sera la meilleure, car l'étirement du feuillet moyen, que la théorie des plaques d'épaisseur variable néglige, est alors réduit au minimum.*

Zurich, le 10 octobre 1949.

SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

Extrait du procès-verbal de l'assemblée des délégués de la S. I. A. du 9 septembre 1949, à Bâle

Présents : 101 délégués, le Comité central, M. R. Christ, président de la Commission pour les concours d'architecture, invité.

1. Le procès-verbal de l'assemblée des délégués du 30 avril 1949 à Lucerne est adopté.

2. Il est donné lecture du rapport de gestion de la S. I. A., rédigé par le secrétaire central P. Soutter, ingénieur, pour la période allant du 30 août 1947 au 9 septembre 1949, lequel est adopté.

3. Les membres sortants du Comité central, MM. Angst, Choisy, Gruner. Rölli et Tschumi sont réélus à l'unanimité pour une nouvelle période administrative. Pour remplacer les membres démissionnaires du C. C., MM. Kopp, président et Eichenberger, MM. A. Mürset, architecte, Zurich et H. Weiss, architecte, Berne sont élus à l'unanimité.

4. M. Choisy, ingénieur, Genève, membre du Comité central depuis 1943, est élu par acclamation et à l'unanimité président central de la S. I. A.

5. Les deux vérificateurs des comptes sortant de charge, MM. Graemiger, ingénieur, Zurich et Schwegler, ingénieur, Lucerne sont réélus à l'unanimité. MM. P. Chastellain, ingénieur, Lausanne et L.-H. Schepp, ingénieur, Oberwil (Bâle-Campagne) sont élus vérificateurs-suppléants.

6. Le trésorier de la S. I. A., M. Rölli, fait remarquer que, cette année encore, un déficit du compte annuel est inévitable. Pour faire face aux tâches sans cesse croissantes de la société, il est par conséquent indispensable de créer de nouvelles sources de revenu. Après une longue discussion sur l'introduction d'une contribution de bureau à verser par les proprié-