

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 76 (1950)
Heft: 12

Artikel: Contribution à l'étude des barrages-voûtes: effet de l'élasticité des appuis
Autor: Stucky, A. / Panchaud, F. / Schnitzler, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-57431>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.06.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 20 francs
Etranger : 25 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 17 francs
Etranger : 22 francs

Pour les abonnements
s'adresser à la librairie

F. ROUGE & Cie
à Lausanne

Prix du numéro :
1 fr. 25

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. — Membres : *Fribourg* : MM. P. JOYE, professeur ; E. LATELTIN, architecte — *Vaud* : MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. D'OKOLSKI, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; CH. THÉVENAZ, architecte ; Genève : MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; CL. GROSGURIN, architecte ; E. MARTIN, architecte ; V. ROCHAT, ingénieur. — *Neuchâtel* : MM. J. BÉGUIN, architecte ; G. FURTER, ingénieur ; R. GUYE, ingénieur ; *Valais* : MM. J. DUBUIS, ingénieur ; D. BURGNER, architecte.

Rédaction : D. BONNARD, ingénieur. Case postale Chauderon 475, LAUSANNE

TARIF DES ANNONCES

Le millimètre
(larg. 47 mm) 20 cts
Réclames : 60 cts le mm
(largeur 95 mm)

Rabais pour annonces
répétées

ANNONCES SUISSES S.A.

5, Rue Centrale

Tél. 2 33 26

LAUSANNE

et Succursales

**CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE**

A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; R. NEESER, ingénieur.

SOMMAIRE : Contribution à l'étude des barrages-voûtes (suite), par A. STUCKY, professeur à l'Ecole Polytechnique de Lausanne, F. PANCHAUD, professeur, et E. SCHNITZLER, chargé de cours. — Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de Lausanne : Rapport du Comité sur l'exercice 1949. — BIBLIOGRAPHIE. — AVIS A NOS LECTEURS. — SERVICE DE PLACEMENT. — NOUVEAUTÉS, INFORMATIONS DIVERSES : La télécommande à fréquence audible système Landis & Gyr (suite et fin).

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES BARRAGES-VOÛTES

Effet de l'élasticité des appuis

par A. STUCKY, professeur à l'Ecole polytechnique de Lausanne,
F. PANCHAUD, professeur, et E. SCHNITZLER, chargé de cours

(Suite).¹

2. Effet d'une variation uniforme de température

Les raisonnements précédents sont applicables sans autre, moyennant deux remarques :

a) La composante, suivant la corde de l'arc, de la translation subie par chacune des naissances sous l'effet de la déformation homothétique de la ligne moyenne de l'« arc-élément de tube » a pour valeur :

$$\Delta x_{ot} = r \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot \sin \alpha = R_t \cdot \frac{\lambda \sin \alpha}{E_b}, \text{ où } R_t = \beta \cdot \Delta t \cdot E_b \cdot e.$$

b) La fondation rocheuse supposée libre ne subit aucun déplacement initial, les réactions de l'« arc-élément de tube » étant nulles :

$$\delta x_{ot} = 0.$$

En introduisant ces valeurs de Δx_{ot} et δx_{ot} dans l'équation de déformation :

$$\Delta x_{ot} + \Delta x_t = \delta x_{ot} + \delta x_t,$$

puis en tirant la valeur de ΔX_t de cette dernière, il vient, tous calculs faits :

$$\Delta X_t = R_t \cdot \frac{-\lambda \sin \alpha}{A_1 \cdot \lambda + A_3 \cdot \lambda^3 - \eta_s \cdot B_2 \cdot \lambda^3 + \frac{1}{n} \cdot [k_n \cdot \cos^2 \alpha + k_t \cdot \sin^2 \alpha + \eta_s \cdot \lambda \cdot k_m \cdot \sin \alpha]}$$

que l'on peut écrire :

$$\Delta X_t = K_t \cdot R_t.$$

On remarque que les deux coefficients hyperstatiques K et K_t ne sont plus égaux entre eux comme dans le cas des appuis rocheux indéformables. D'ailleurs K_t peut s'exprimer sous une forme simple en fonction de K :

$$K_t = \frac{\lambda \sin \alpha}{\lambda \sin \alpha + \frac{k_n}{n} \cos \alpha} \cdot K = \frac{1}{1 + \frac{k_n}{\lambda n} \cotg \alpha} \cdot K,$$

ou encore :

$$K_t = L \cdot K \quad \text{avec} \quad L = \frac{1}{1 + \frac{k_n}{\lambda n} \cotg \alpha}.$$

Le facteur L est égal à 1 dans les trois cas limites suivants :

$n = \infty$, arc sur appuis indéformables, $K_t = K \neq 0$;
 $\lambda = \infty$, arc infiniment mince isostatique, $K_t = K = 0$;
 $2\alpha = 180^\circ$, arc en forme de plein-cintre, $K_t = K \neq 0$.

Dans tous les autres cas, $L < 1$ et $K_t < K$; K_t est d'autant plus inférieur à K que les valeurs de n , λ et 2α sont plus petites, c'est-à-dire que les appuis rocheux sont plus élastiques et l'arc plus rigide.

¹ Voir les numéros du Bulletin technique du 8 avril 1950, page 81, et du 6 mai 1950, page 109.

3. Etat de température variant linéairement d'un parement à l'autre

On suppose toujours la température de l'intrados inférieure de $\Delta\tau$ à celle de la fibre moyenne et la température de l'extrados supérieure de $\Delta\tau$ à celle de cette fibre.

Cet état thermique, nous le savons, provoque dans l'« arc-élément de tube » un moment de flexion constant $M = \frac{1}{6} \cdot \beta \cdot \Delta\tau \cdot E_b \cdot e^2$, sans entraîner aucune déformation; par conséquent :

$$\Delta x_{o\tau} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \omega_{o\tau} = 0, \quad (\text{fig. 18}).$$

Mais ce moment de flexion, en réagissant sur la fondation rocheuse supposée libre, provoque sur celle-ci :

une translation dont la composante suivant la corde de l'arc a pour valeur :

$$\delta x_{o\tau} = + \frac{k_m \cdot \sin \alpha}{E_r e} \cdot M = \frac{k_m \cdot \sin \alpha}{6 E_r} \cdot R_\tau,$$

$$\text{où } R_\tau = \beta \cdot \Delta\tau \cdot E_b \cdot e,$$

et une rotation d'intensité :

$$\delta \omega_{o\tau} = \frac{k_\mu}{E_r e^2} \cdot M.$$

L'arc et sa fondation ne peuvent plus — comme dans le cas de la pression hydrostatique uniforme ou dans celui d'une variation uniforme de température — être ramenés en coïncidence par une seule force hyperstatique ΔX_τ appliquée au centre élastique du système arc-fondation; cette opération exige en outre un moment fléchissant hyperstatique ΔM_τ .

Au lieu d'opérer les deux redressements (translation et rotation) simultanément, ce qui conduirait à un système de deux équations linéaires à deux inconnues ΔX_τ et ΔM_τ , il est plus commode de rétablir d'abord le parallélisme des sections, ce qui est possible à l'aide du seul moment fléchissant ΔM_τ , puis, ensuite seulement, de corriger les translations au moyen de la force hyperstatique ΔX_τ appliquée au centre élastique : ces deux inconnues sont ainsi déterminées successivement, mais chacune à l'aide d'une seule équation à une inconnue.

Le rétablissement du parallélisme des sections s'exprime par l'équation :

$$\Delta \omega_{o\tau} + \Delta \omega_\tau = -(\delta \omega_{o\tau} + \delta \omega_\tau)$$

qui, substitution faite des rotations par leurs valeurs, s'écrit :

$$0 + \frac{B_1 \cdot \lambda}{E_b e^2} \cdot \Delta M_\tau = -\left(\frac{k_\mu}{E_r e^2} \cdot M + \frac{k_\mu}{E_r e^2} \cdot \Delta M_\tau \right),$$

d'où, en introduisant la valeur du moment de flexion M et celle du coefficient $B_1 = 12\alpha$:

$$\Delta M_\tau = -L_\tau \cdot M,$$

$$\text{avec } L_\tau = \frac{1}{1 + \frac{12 \alpha \lambda n}{k_\mu}} \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{6} \cdot \beta \cdot \Delta\tau \cdot E_b \cdot e^2.$$

Le moment hyperstatique ΔM_τ s'annule lorsque $n = \infty$ (appuis rocheux supposés indéformables) ou lorsque $\lambda = \infty$ (arc infiniment mince isostatique). Ce moment a toujours le signe contraire de celui du moment de flexion M de l'« arc-

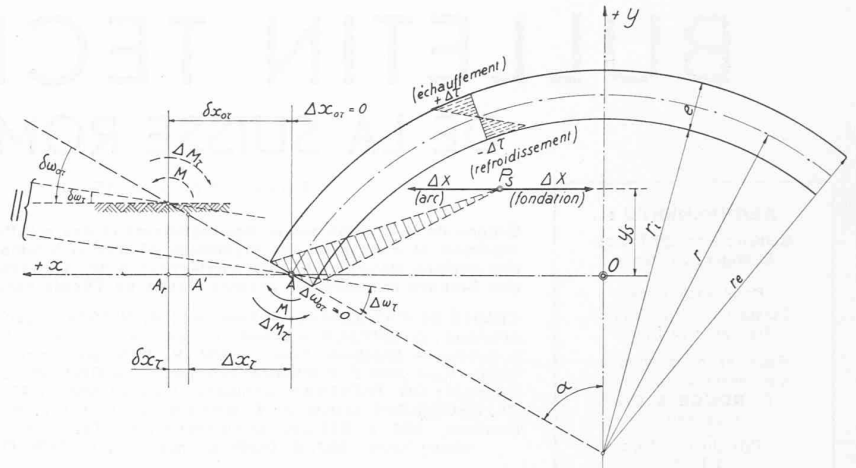


Fig. 18. — Arc élastique mince sur appuis élastiques déformables.

Etat de température variant linéairement d'un parement à l'autre.

Schéma des déplacements suivant la corde de l'arc et des rotations de la naissance A et de ceux de la fondation rocheuse correspondante.

élément de tube » et provoque donc un soulagement. Enfin, ΔM_τ croît en valeur absolue lorsque n , λ ou 2α diminuent.

Les sections, maintenant parallèles, doivent encore être amenées en coïncidence par une translation que provoquera la force hyperstatique ΔX_τ agissant au centre élastique du système arc-fondation. Cette opération est exprimée par l'équation :

$$\Delta x_{o\tau} + \Delta x_\tau = \delta x_{o\tau} + \delta x_\tau$$

qui devient, en substituant à ces quatre translations leurs valeurs respectives (compte tenu du moment ΔM_τ maintenant déterminé) :

$$0 + \frac{1}{E_b} \cdot \left\{ (A_1 \cdot \lambda + A_3 \cdot \lambda^3) \cdot \Delta X_\tau + \frac{B_2 \cdot \lambda^2}{e} \cdot (-\Delta X_\tau \cdot y_s + \Delta M_\tau) \right\} = R_\tau \cdot \frac{k_m \cdot \sin \alpha}{6 E_r} + \frac{1}{E_r} \cdot \left\{ -(k_n \cdot \cos^2 \alpha + k_t \cdot \sin^2 \alpha) \cdot \Delta X_\tau + \frac{k_m \cdot \sin \alpha}{e} \cdot (-\Delta X_\tau \cdot y_s + \Delta M_\tau) \right\}.$$

La résolution de cette équation donne, après quelques simplifications :

$$\Delta X_\tau = R_\tau \cdot \frac{\frac{2 \alpha \lambda (k_m \cdot \sin \alpha + \eta_o \cdot \lambda \cdot k_\mu)}{12 \alpha \lambda n + k_\mu}}{A_1 \cdot \lambda + A_3 \cdot \lambda^3 - \eta_s \cdot B_2 \cdot \lambda^3 + \frac{1}{n} \cdot [k_n \cdot \cos^2 \alpha + k_t \cdot \sin^2 \alpha + \eta_s \cdot \lambda \cdot k_m \cdot \sin \alpha]}$$

formule que l'on peut écrire, par analogie avec les cas de la poussée de l'eau et de la variation uniforme de température :

$$\Delta X_\tau = K_\tau \cdot R.$$

Le coefficient hyperstatique sans dimension K_τ peut être exprimé en fonction du coefficient K_t :

$$K_\tau = \frac{\frac{2 \alpha \lambda (k_m \cdot \sin \alpha + \eta_o \cdot \lambda \cdot k_\mu)}{12 \alpha \lambda n + k_\mu}}{-\lambda \sin \alpha} \cdot K_t = \frac{\frac{1}{6n} \left[\frac{k_m}{\lambda} + \left(\frac{1}{\alpha} - \cotg \alpha \right) k_\mu \right]}{1 + \frac{k_\mu}{12 \alpha \lambda n}} \cdot K_t.$$

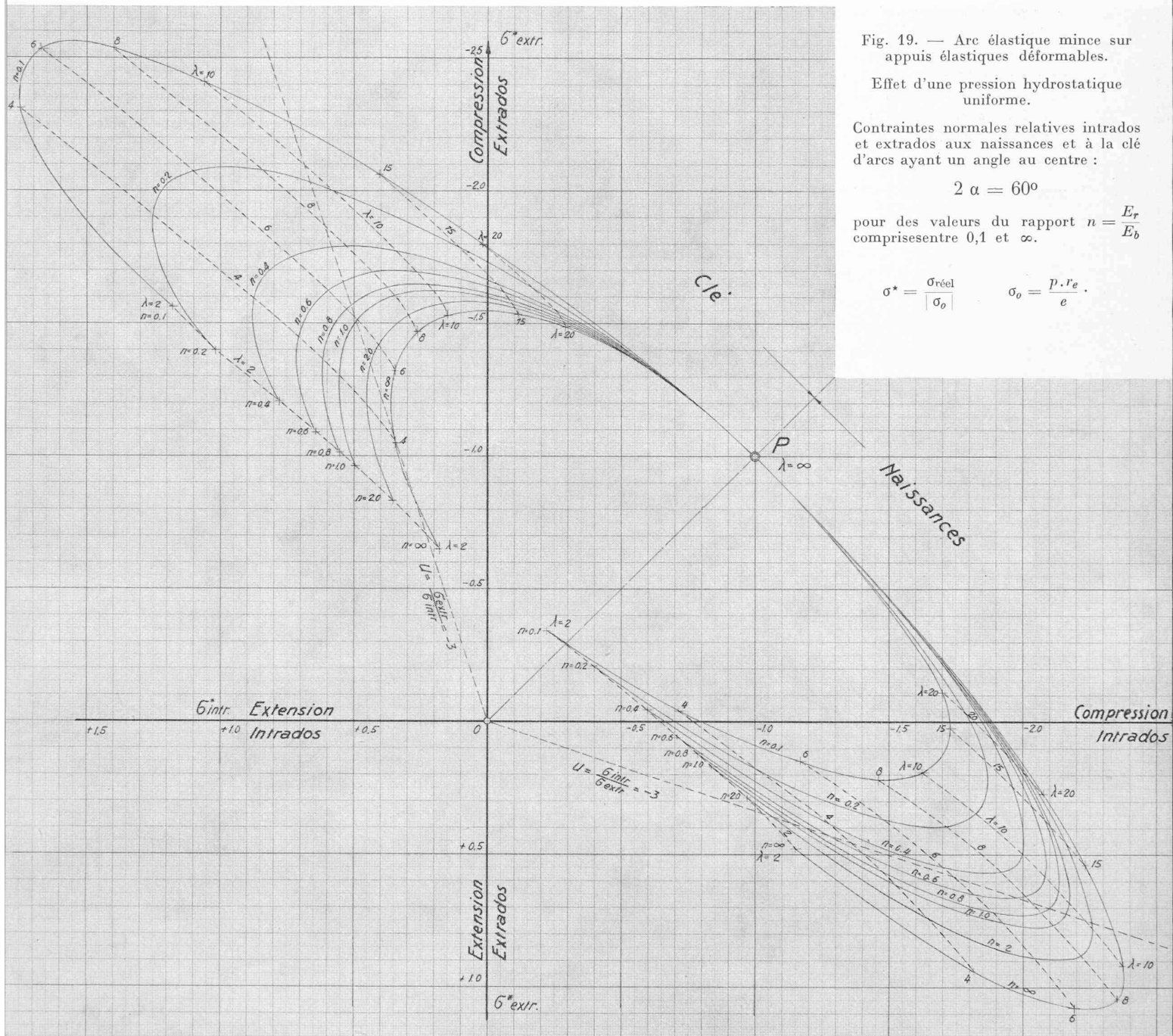


Fig. 19. — Arc élastique mince sur appuis élastiques déformables.

Effet d'une pression hydrostatique uniforme.

Contraintes normales relatives intrados et extrados aux naissances et à la clé d'arcs ayant un angle au centre :

$$2\alpha = 60^\circ$$

pour des valeurs du rapport $n = \frac{E_r}{E_b}$ comprises entre 0,1 et ∞ .

$$\sigma^* = \frac{\sigma_{\text{réel}}}{\sigma_0} \quad \sigma_0 = \frac{p \cdot r_e}{e}$$

En posant :

$$L_{\tau 0} = \frac{1}{1 + \frac{k_\mu}{12 \alpha \lambda n}} \quad \text{et} \quad L_{\tau 1} = \frac{1}{6n} \left[\frac{k_m}{\lambda} + \left(\frac{1}{\alpha} - \cotg \alpha \right) k_\mu \right],$$

il vient :

$$K_\tau = -L_t \cdot K_t, \quad \text{avec} \quad L_t = L_{\tau 0} \cdot L_{\tau 1},$$

ou encore :

$$K_\tau = -L_{\tau 0} \cdot L_{\tau 1} \cdot L \cdot K, \quad \text{puisque} \quad K_t = L \cdot K.$$

Cette dernière forme montre que le coefficient K_τ s'annule pour $n = \infty$ (car $L_{\tau 1} = 0$) et pour $\lambda = \infty$ (car $K = 0$).

CONTRAINTES NORMALES MAXIMUMS DANS L'ARC ÉLASTIQUE MINCE SUR APPUIS ÉLASTIQUES DÉFORMABLES (VALEURS RELATIVES)

Le calcul des contraintes s'effectue comme pour l'arc élastique mince sur appuis indéformables, les nouvelles formules constituant une généralisation des premières.

1. Cas de la pression hydrostatique uniforme

Dans une section quelconque θ de l'arc, les contraintes normales totales sur les parements ont pour valeur :

$$\sigma_e^i = \sigma_0 + K \sigma_0 (\cos \theta \mp 6 \eta_{s\theta} \lambda)$$

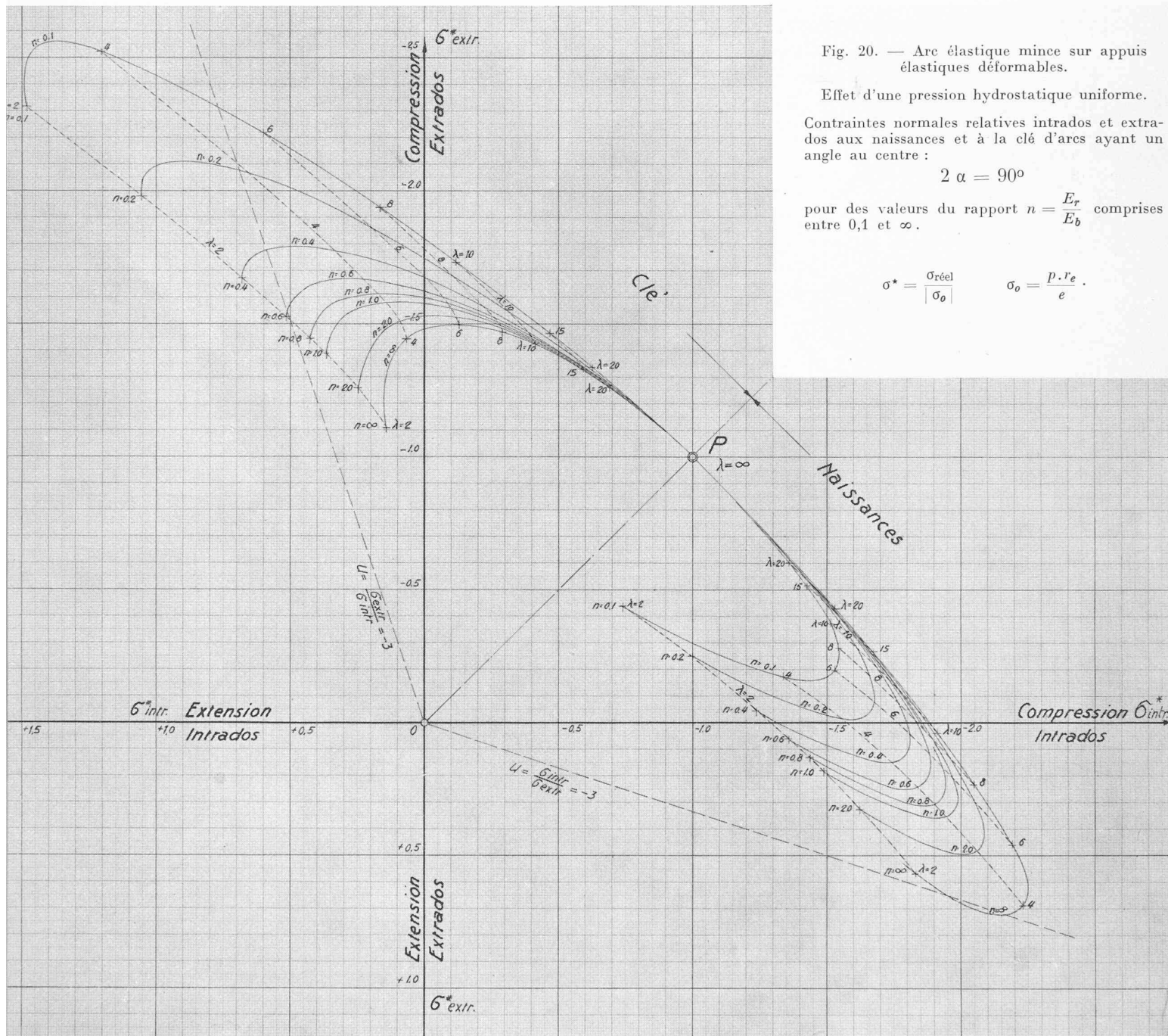


Fig. 20. — Arc élastique mince sur appuis élastiques déformables.

Effet d'une pression hydrostatique uniforme.

Contraintes normales relatives intrados et extradados aux naissances et à la clé d'arcs ayant un angle au centre :

$$2\alpha = 90^\circ$$

pour des valeurs du rapport $n = \frac{E_r}{E_b}$ comprises entre 0,1 et ∞ .

$$\sigma^* = \frac{\sigma_{\text{réel}}}{\sigma_0} \quad \sigma_0 = \frac{p \cdot r_e}{e}$$

K est le coefficient hyperstatique généralisé pour un rapport des modules d'élasticité $n = \frac{E_r}{E_b}$ quelconque, et $\eta_{s\theta}$ la valeur relative du bras de levier de l'hyperstatique $\Delta X = KR$ par rapport au centre de gravité de la section considérée :

$$\eta_{s\theta} = \eta_s - (\cos \theta - \cos \alpha).$$

En rapportant les contraintes réelles à la valeur absolue de la compression uniforme $|\sigma_0| = -\sigma_0$ de l'arc-élément de tube », on obtient les contraintes normales relatives :

$$\sigma_{\theta}^* = -1 - K (\cos \theta \mp 6 \eta_{s\theta} \lambda).^1$$

¹ On ne confondra pas ces contraintes σ^* , se rapportant ici à l'arc sur appuis élastiques déformables (n quelconque), avec les contraintes σ^* définies précédemment pour l'arc sur appuis indéformables ($n = \infty$).

L'élimination de λ entre les deux équations correspondant au double signe de cette dernière formule conduit à une courbe algébrique de degré supérieur et non plus à une ellipse, comme dans le cas où le rocher est supposé indéformable.

Les figures 19, 20 et 21 donnent la représentation graphique des contraintes relatives aux naissances et à la clé d'arcs ayant un angle au centre 2α de 60° , 90° et 120° pour des valeurs du rapport

$$n = \frac{E_r}{E_b} \quad \text{de } 2 - 1 - 0,8 - \dots - 0,2 - 0,1.$$

Les courbes tracées montrent qu'en général, si les sections de naissance sont moins sollicitées, en particulier à la trac-

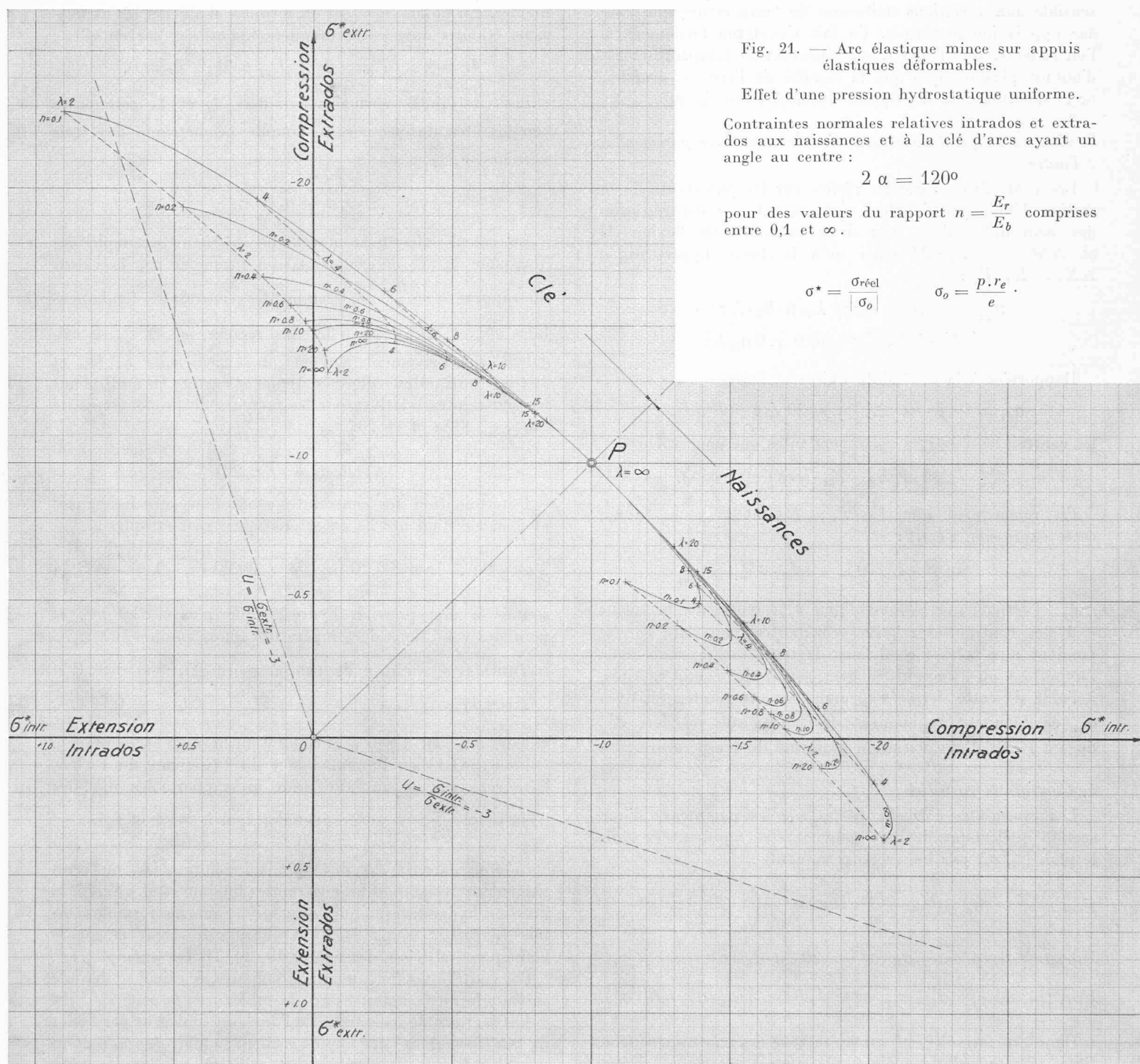


Fig. 21. — Arc élastique mince sur appuis élastiques déformables.

Effet d'une pression hydrostatique uniforme.

Contraintes normales relatives intrados et extrados aux naissances et à la clé d'arcs ayant un angle au centre :

$$2\alpha = 120^\circ$$

pour des valeurs du rapport $n = \frac{E_r}{E_b}$ comprises entre 0,1 et ∞ .

$$\sigma^* = \frac{\sigma_{réel}}{\sigma_0} \quad \sigma_0 = \frac{p \cdot r_e}{e}$$

tion, lorsqu'on tient compte de l'élasticité des appuis rocheux, les sections de clé, par contre, le sont davantage et surtout à l'intrados où les contraintes de traction s'accroissent.

2. Effet d'une variation uniforme de température

Les contraintes normales réelles sur les parements de la section définie par l'angle θ s'écrivent :

$$\sigma_{te}^i = K_t \cdot \beta \cdot E_b \cdot \Delta t \cdot (\cos \theta \mp 6\eta_{s\theta} \lambda)$$

$$\text{où } K_t = \frac{1}{1 + \frac{k_n}{\lambda n} \cotg \alpha} \cdot K = L \cdot K.$$

Rapportées à la contrainte uniforme fictive

$$\sigma_{ot} = -\beta \cdot E_b \cdot \Delta t \cong -20 \Delta t \quad (T/m^2),$$

les contraintes relatives correspondantes ont pour valeur

$$\sigma_{te}^{*i} = -L \cdot K \cdot (\cos \theta \mp 6\eta_{s\theta} \lambda) = L \cdot (\sigma_{te}^i + 1).$$

Dans une section d'un arc donné, les contraintes relatives dues à l'effet d'une variation uniforme de température sont égales au produit du coefficient L par les contraintes relatives correspondantes dues à l'effet d'une pression hydrostatique uniforme augmentées de l'unité.

Par conséquent, les contraintes dues à l'effet d'une variation uniforme de température se déduisent immédiatement de celles dues à l'effet de l'eau.

Dans la formule précédente, le coefficient L est en général inférieur à 1 (sauf aux cas limites $n = \infty$, $\lambda = \infty$, $2\alpha = 180^\circ$). L'arc sur appuis élastiques déformables est donc moins

sensible aux variations uniformes de température que l'arc sur appuis indéformables. Ce fait s'explique facilement si l'on constate que l'effet d'une variation de température est d'autant plus marqué que la rigidité de l'arc est grande ; or la déformabilité des appuis diminue cette rigidité.

3. Etat de température variant linéairement d'un parement à l'autre

Les contraintes normales réelles sur les parements de la section définie par l'angle θ s'obtiennent par superposition des contraintes dues aux deux moments de flexion M et $\Delta M_\tau = -L_\tau \cdot M$ ainsi qu'à la force hyperstatique $\Delta X_\tau = K_\tau \cdot R_\tau$:

$$\sigma_{\tau e}^i = \pm \beta \cdot E_b \cdot \Delta \tau \mp L_\tau \cdot \beta \cdot E_b \cdot \Delta \tau + K_\tau \cdot \beta \cdot E_b \cdot \Delta \tau \cdot (\cos \theta \mp 6 \eta_{s\theta} \lambda).$$

Rapportées à la contrainte uniforme fictive

$$\sigma_{o\tau} = + \beta \cdot E_b \cdot \Delta \tau \cong + 20 \Delta \tau \quad (T/m^2),$$

les contraintes relatives correspondantes ont pour valeur :

$$\sigma_{\tau e}^{*i} = \pm 1 \mp L_\tau + K_\tau \cdot (\cos \theta \mp 6 \eta_{s\theta} \lambda).$$

En remarquant que $1 - L_\tau = L_{\tau o}$ et $K_\tau = -L_i \cdot K_i$, cette expression s'écrit :

$$\sigma_{\tau e}^{*i} = L_{\tau o} \cdot \sigma_{\tau o e}^{*i} + L_i \cdot \sigma_{i e}^{*i}.$$

$\sigma_{\tau o e}^{*i}$ (désigné précédemment par $\sigma_{\tau e}^{*i}$) représente la valeur ± 1 des contraintes relatives constantes dans l'arc correspondant aux mêmes conditions de température, mais dans l'hypothèse où les appuis rocheux sont indéformables. Ainsi, à l'aide de cette dernière formule, les contraintes relatives $\sigma_{\tau e}^{*i}$ se déduisent rapidement des contraintes relatives $\sigma_{\tau o e}^{*i}$ dues à l'effet d'une variation uniforme de température.

4. Contraintes cumulées

Les contraintes normales réelles sur les parements d'une section quelconque de l'arc peuvent être représentées dans le plan (σ_i, σ_e) par les vecteurs suivants :

$$\text{Eau : } \vec{\sigma} = |\sigma_o| \cdot \vec{\sigma}^* = \left| \frac{pr_e}{e} \right| \cdot \vec{\sigma}^* = \left| p \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \right| \cdot \vec{\sigma}^*$$

$$\text{Var. unif. temp. : } \vec{\sigma}_i = \sigma_{oi} \cdot \vec{\sigma}_i^* = -20 \Delta t \cdot L \cdot (\vec{\sigma}^* + \vec{u})$$

$$\text{Var. lin. temp. : } \vec{\sigma}_\tau = \sigma_{o\tau} \cdot \vec{\sigma}_\tau^* = +20 \Delta \tau \cdot (L_{\tau o} \cdot \vec{\sigma}_{\tau o}^* + L_i \cdot \vec{\sigma}_i^*).$$

Dans ces formules, $\vec{\sigma}^*$ est le vecteur des contraintes relatives provoquées dans l'arc sur appuis élastiques déformables par la pression hydrostatique uniforme, et que l'on peut qualifier de *contraintes fondamentales* ; $\vec{u}$ représente le vecteur de composantes $(+1, +1)$ et $\vec{\sigma}_{\tau o}^*$ le vecteur de composantes $(+1, -1)$. Les coefficients L , $L_{\tau o}$, L_i , tous trois positifs, sont définis comme suit :

$$L = \frac{1}{1 + \frac{k_n}{\lambda n} \cotg \alpha}; \quad L_i = L_{\tau o} \cdot L_{\tau i}$$

$$L_{\tau o} = \frac{1}{1 + \frac{k_\mu}{12 \alpha \lambda n}}; \quad L_{\tau i} = \frac{1}{6n} \left[\frac{k_m}{\lambda} + \left(\frac{1}{\alpha} - \cotg \alpha \right) k_\mu \right].$$

Ces formules constituent une généralisation de celles obtenues dans le cas où les appuis sont supposés indéfor-

mables. En posant $n = \infty$, on retrouve d'ailleurs les expressions établies dans cette première hypothèse, car en effet :

$$L = 1; \quad L_{\tau o} = 1; \quad L_{\tau i} = 0; \quad L_i = 0.$$

Les contraintes normales cumulées Σ_i et Σ_e seront les composantes du vecteur $\vec{\Sigma}$, somme géométrique des trois vecteurs $\vec{\sigma}$, $\vec{\sigma}_i$ et $\vec{\sigma}_\tau$:

$$\vec{\Sigma} = \vec{\sigma} + \vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_\tau.$$

Le calcul effectif se développe de manière simple dès que, pour un arc déterminé par sa forme et par la valeur du rapport $n = \frac{E_r}{E_b}$, le vecteur des contraintes fondamentales $\vec{\sigma}^*$ est connu : en effet, les vecteurs $\vec{\sigma}_i^*$ et $\vec{\sigma}_\tau^*$ se calculent successivement à l'aide des coefficients L , $L_{\tau o}$ et L_i ; les contraintes réelles s'obtiennent ensuite en multipliant les contraintes relatives par les facteurs de proportionnalité $|\sigma_o|$, $-20\Delta t$ et $+20\Delta \tau$.

Application (fig. 22)

Détermination des contraintes maximums aux naissances et à la clé d'un arc de caractéristiques géométriques :

$$2\alpha = 94^\circ, \quad r = 90,20 \text{ m}, \quad e = 26,20 \text{ m}, \quad \lambda = \frac{r}{e} = 3,44$$

soumis à une pression hydrostatique $p = -82 \text{ T/m}^2$, et pour des conditions de température fixées comme suit :

$$\text{Intrados : chute de température } \Delta t_i = -1,8^\circ \text{ C}$$

$$\text{Extrados : } \quad \quad \quad \Delta t_e = -0,6^\circ \text{ C}$$

valeurs qui sont à peu près celles d'un barrage en montagne.

Pour mettre en lumière l'effet du tassement du rocher, l'arc sera calculé en admettant un rapport des modules d'élasticité $\frac{E_r}{E_b} = n$ successivement égal à ∞ , 1 et 0,4.

Comme dans le cas des appuis indéformables, on commence par déterminer les contraintes fondamentales dues à la pression hydrostatique uniforme, soit à l'aide des formules établies (page 152), soit à l'aide de tableaux de valeurs ou encore d'abaques (tels ceux des figures 19, 20, 21, par exemple).

Ces contraintes fondamentales connues, le calcul se déroule suivant le mode indiqué dans le tableau de la page 155.

Les sections de naissances de l'arc sont soulagées par l'effet de la déformabilité des appuis rocheux, tandis que la section de clé est plus dangereusement sollicitée : la compression croît à l'extrados et la traction croît également à l'intrados.

Lorsque le rapport n diminue, la ligne des pressions correspondant à l'effet de l'eau seule est déportée à l'amont, presque parallèlement à elle-même. La force hyperstatique ΔX diminue, mais relativement peu ; par contre, le centre élastique du système arc-fondation se rapproche de la corde de l'arc de manière sensible. Dans le cas particulier, c'est de ce dernier facteur que découle essentiellement la modification de l'état de contraintes dans les sections de naissances et de clé, car il provoque en effet une variation appréciable des moments de flexion dans ces sections ; l'effort normal, au contraire, qui dépend de l'hyperstatique ΔX , ne varie que très peu.

Les contraintes dues à l'effet de la température diminuent lorsque le rapport n décroît, comme on pouvait d'ailleurs le prévoir.

Fig. 22. — Contraintes maximums aux naissances et à la clé d'un arc élastique mince sur appuis élastiques déformables soumis à une pression hydrostatique uniforme et dont la différence de température (par rapport à la température moyenne) varie linéairement de l'intrados à l'extrados.

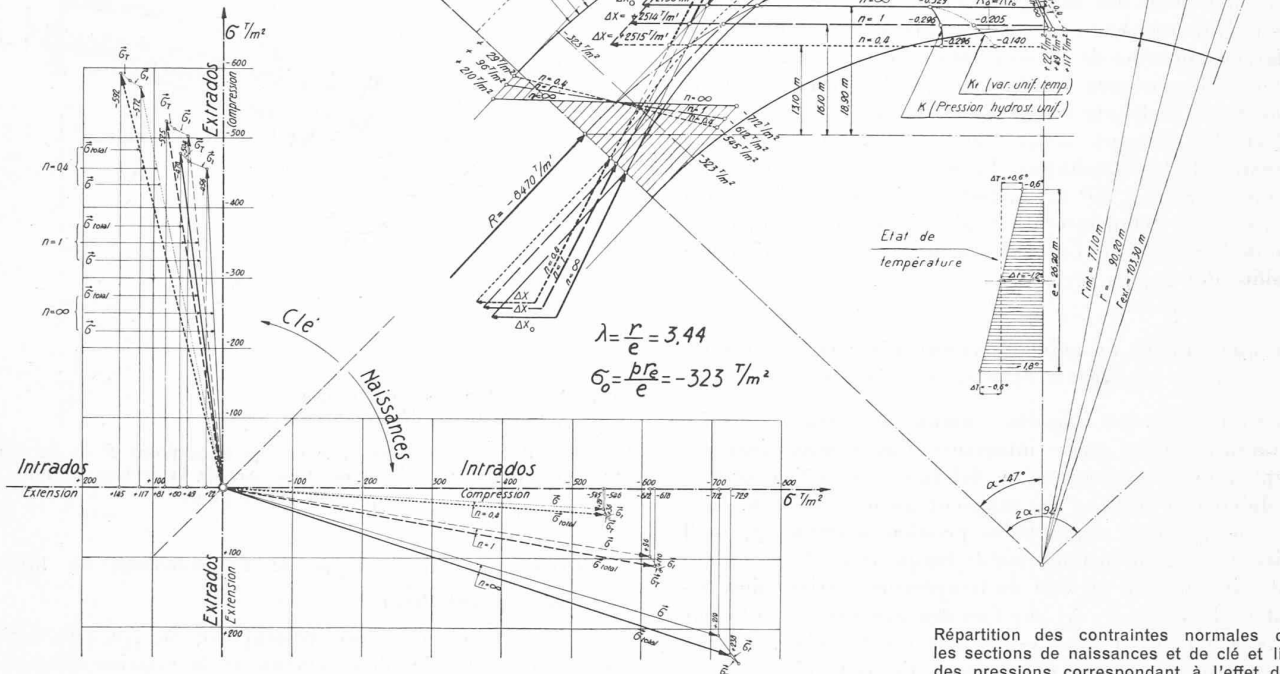


Diagramme vectoriel des contraintes normales cumulées

Répartition des contraintes normales dans les sections de naissances et de clé et ligne des pressions correspondant à l'effet de la poussée de l'eau seulement.

Nature de la sollicitation			$n = \infty$				$n = 1$				$n = 0,4$			
			Naissances		Clé		Naissances		Clé		Naissances		Clé	
			Intr.	Extr.	Intr.	Extr.	Intr.	Extr.	Intr.	Extr.	Intr.	Extr.	Intr.	Extr.
Contraintes relatives	Eau	Contr. fondam. σ^*	-2,204	+0,650	+0,068	-1,412	-1,895	+0,297	+0,152	-1,560	-1,687	+0,090	+0,362	-1,771
	Variation uniforme température	$L = \frac{1}{1 + \frac{k_n}{\lambda n} \cotg \alpha}$	1				0,694				0,473			
		$\sigma^* + 1$	-1,204	+1,650	+1,068	-0,412	-0,895	+1,297	+1,152	-0,560	-0,687	+1,090	+1,362	-0,771
		$\sigma_t^* = L (\sigma^* + 1)$	-1,204	+1,650	+1,068	-0,412	-0,621	+0,899	+0,800	-0,388	-0,325	+0,515	+0,645	-0,364
	Variation linéaire température	$L_{\tau 0} = \frac{1}{1 + \frac{k_\mu}{12 \alpha \lambda n}}$	1				0,867				0,724			
		$L_{\tau 1} = \frac{1}{6n} \left[\frac{k_m}{\lambda} + \left(\frac{1}{\alpha} - \cotg \alpha \right) k_\mu \right]$	0				0,276				0,690			
$L_t = L_{\tau 0} . L_{\tau 1}$		0				0,239				0,500				
$L_{\tau 0} . \sigma_{\tau 0}^*$		+ 1	- 1	+ 1	- 1	+0,867	-0,867	+0,867	-0,867	+0,724	-0,724	+0,724	-0,724	
$L_t . \sigma_t^*$		0	0	0	0	-0,149	+0,215	+0,191	-0,093	-0,163	+0,258	+0,323	-0,182	
$\sigma_t^* = L_{\tau 0} . \sigma_{\tau 0}^* + L_t . \sigma_t^*$			+ 1	- 1	+ 1	- 1	+0,718	-0,652	+1,058	-0,960	+0,561	-0,466	+1,047	-0,906
Contraintes réelles	Facteurs de proportionnalité (T/m ²)		T/m ²	T/m ²	T/m ²	T/m ²	T/m ²	T/m ²	T/m ²	T/m ²	T/m ²	T/m ²	T/m ²	T/m ²
	Eau	$ \sigma_0 = + 323$	-712	+210	+22	-456	-612	+ 96	+49	-504	-545	+29	+117	-572
	Var. unif. tp.	$- 20 \Delta t = + 24$	- 28,9	+ 39,6	+25,6	- 9,9	- 14,9	+ 21,6	+19,2	- 9,3	- 7,8	+12,4	+ 15,5	- 8,7
	Var. lin. tp.	$+ 20 \Delta \tau = + 12$	+ 12,0	- 12,0	+12,0	- 12,0	+ 8,6	- 7,8	+12,7	- 11,5	+ 6,7	- 5,6	+ 12,6	- 10,9
	Contraintes cumulées			-729	+238	+60	-478	-618	+110	+81	-525	-546	+36	+145

Enfin, cet exemple montre que l'effet de la déformabilité des appuis rocheux peut l'emporter sur celui des variations de température. Il faut cependant remarquer que l'arc considéré étant relativement épais, les fluctuations de la température extérieure ne provoquent qu'une faible variation thermique de la masse du béton et, par conséquent, les contraintes qui en résultent sont elles-mêmes réduites.

En effet, pour des barrages épais (comme celui de notre exemple), les nombreuses expériences faites montrent que les variations annuelles de la température moyenne du béton ne sont que de quelques degrés, bien que les variations de la température ambiante soient de ± 16 à 20°C .

Pour des barrages minces, au contraire, les variations moyennes de la température du mur peuvent atteindre des valeurs de ± 12 à 15°C . et, par conséquent, l'effet de ces variations de température est plus important comparé à celui de la poussée de l'eau, et également à celui de la déformabilité des appuis rocheux¹.

DÉFORMATION DE LA FIBRE MOYENNE D'UN ARC ÉLASTIQUE MINCE SUR APPUIS ÉLASTIQUES DÉFORMABLES

Lorsque l'arc est considéré comme un *élément de tube*, c'est-à-dire comme partie intégrante d'un anneau circulaire complet, sa fibre moyenne se déforme *homothétiquement* et ses différentes sections ne subissent aucune rotation. Cela est vrai que l'arc supporte la pression uniforme p , qu'il subisse une variation uniforme de température Δt ou encore qu'il soit soumis à un état de température variant linéairement de la valeur $-\Delta\tau$ sur l'un des parements à la valeur $+\Delta\tau$ sur l'autre; dans ce dernier cas toutefois, la fibre moyenne ne se déforme pas (homothétie particulière).

Cette déformation homothétique est entièrement caractérisée par la variation du rayon moyen de l'arc :

$$\text{Eau :} \quad \Delta r = r \cdot \frac{\sigma_0}{E_b} = r \cdot \frac{pr_e}{E_b e} = \frac{R\lambda}{E_b}$$

$$\text{Var. unif. temp. :} \quad \Delta r_t = r \cdot \beta \cdot \Delta t$$

$$\text{Var. lin. temp. :} \quad \Delta r_\tau = 0.$$

L'encastrement rigide ou élastique de l'arc dans les parois rocheuses se superpose à l'effet des charges (pression de l'eau ou température) et des réactions de l'« arc-élément de tube »; cet encastrement modifie la forme d'arc de cercle de la fibre moyenne et lui imprime en outre une translation parallèle à l'axe de symétrie de l'arc : la modification de forme dépend des efforts hyperstatiques et la translation du mouvement des appuis parallèlement au dit axe. Dans les trois cas de charge envisagés, les efforts hyperstatiques peuvent se réduire à une force parallèle à la corde de l'arc et à un moment de flexion *appliqués aux naissances de l'arc*; ces efforts seront dorénavant désignés par ΔX et ΔM , quel que soit le mode de charge.

Les déplacements Δx et Δy d'un point quelconque P de la fibre moyenne, défini par l'angle θ , ainsi que la rotation Δw de la section normale à l'arc passant par ce point, résultent en définitive de trois opérations successives : deux déformations de la fibre moyenne et une translation générale de celle-ci, parallèle à l'axe de symétrie Oy de l'arc (fig. 23).

Calculons ces divers éléments pour le *demi-arc gauche* :

¹ L'état thermique d'une masse de béton sous l'effet d'une variation de la température ambiante a été étudié dans l'article : A. STUCKY : *Le barrage de la Dixence* (« Bulletin technique de la Suisse romande » des 16.II, 2.III et 13.IV 1946).

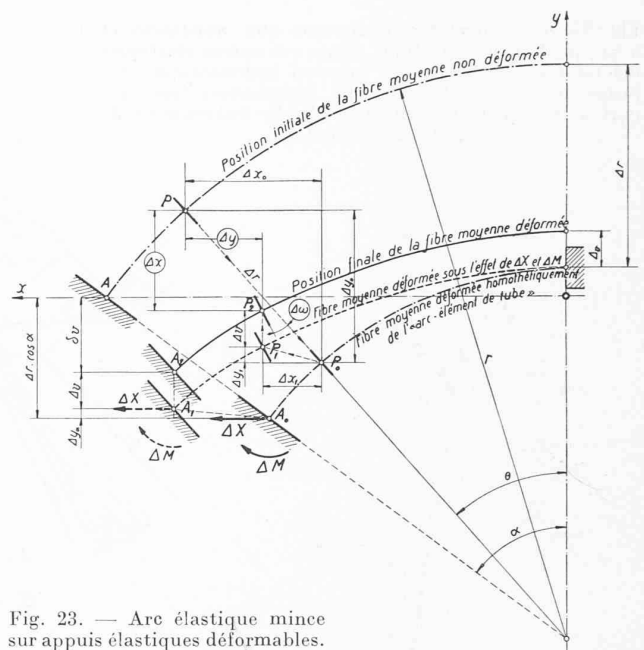


Fig. 23. — Arc élastique mince sur appuis élastiques déformables.

Schéma des déplacements Δx et Δy d'un point P de la fibre moyenne de l'arc et de la rotation Δw de la section normale à l'arc passant par ce point.

a) Déformation homothétique de l'« arc-élément de tube ». (Déplacement $\overrightarrow{PP_0}$.)

La variation Δr (respectivement Δr_t ou Δr_τ) du rayon moyen provoque les déplacements et la rotation suivants :

$$\Delta x_0 = \Delta r \cdot \sin \theta$$

$$\Delta y_0 = \Delta r \cdot \cos \theta$$

$$\Delta w_0 = 0.$$

b) Déformation due aux efforts hyperstatiques. (Déplacement $\overrightarrow{P_0P_1}$.)

L'arc est supposé encasté à la clé et sollicité par la force ΔX (parallèle à la corde) et le moment ΔM , à la naissance gauche libre. Le calcul des déplacements et de la rotation en un point quelconque de la fibre moyenne, sans difficulté, s'effectue suivant les théories classiques de la résistance des matériaux (théorème de Castigliano, par exemple), et conduit aux résultats suivants :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{E_b} \left(a_{11} \Delta X + a_{13} \frac{\Delta M}{e} \right)$$

$$\Delta y_1 = \frac{1}{E_b} \left(a_{21} \Delta X + a_{23} \frac{\Delta M}{e} \right)$$

$$\Delta w_1 = \frac{1}{E_b} \left(a_{31} \frac{\Delta X}{e} + a_{33} \frac{\Delta M}{e^2} \right).$$

La forme explicite des coefficients sans dimension a_{11} , a_{13} , ... a_{33} , qui dépendent du rapport $\lambda = \frac{r}{e}$ ainsi que des angles 2α et θ , sera donnée plus loin.

c) Translation générale parallèle à l'axe de symétrie de l'arc. (Déplacement $\overrightarrow{P_1P_2}$.)

Soit Δv la valeur inconnue de cette translation, δv celle de la composante du déplacement réel des appuis dans la direction Oy (composante qui n'a d'ailleurs pas encore été déter-

minée jusqu'ici parce que sans influence sur le comportement statique de l'arc), et Δy_α la composante suivant Oy du déplacement de la naissance gauche libre du demi-arc encastré à la clé, sous l'effet des efforts ΔX et ΔM .

La figure 23 montre que, tenant compte des signes, le déplacement δv des appuis s'exprime par la formule :

$$\delta v = \Delta r \cdot \cos \alpha + \Delta y_\alpha + \Delta v, \quad \text{d'où}$$

$$\Delta v = \delta v - \Delta r \cdot \cos \alpha - \Delta y_\alpha.$$

$\Delta r \cdot \cos \alpha$ est connu, il faut déterminer les valeurs de δv et Δy_α :

Le déplacement δv des appuis se calcule par la méthode de F. Vogt : si δz et δu sont les composantes normale et tangentielle du déplacement de la fondation sous l'effet des efforts résultants N , T et M qui la sollicitent (voir pages 110 et 111), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \delta v &= + \delta z \cdot \sin \alpha - \delta u \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{1}{E_r} \left[k_n \cdot N \cdot \sin \alpha - \left(k_t \cdot T - k_m \cdot \frac{M}{e} \right) \cdot \cos \alpha \right]. \end{aligned}$$

N_o , T_o , M_o désignant les réactions aux naissances de l'arc-élément de tube sans spécification du mode de charge, les efforts résultants sur la fondation s'expriment par les formules :

$$\begin{aligned} N &= N_o + \Delta X \cos \alpha \\ T &= T_o + \Delta X \sin \alpha \\ M &= M_o + \Delta M. \end{aligned}$$

En remplaçant N , T et M par ces valeurs dans l'expression de δv et en remarquant que $T_o = 0$ pour les trois cas de charge envisagés, on trouve :

$$\begin{aligned} \delta v &= \frac{1}{E_r} \left[N_o \cdot k_n \cdot \sin \alpha + \Delta X \cdot (k_n - k_t) \cdot \sin \alpha \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_o + \Delta M}{e} \cdot k_n \cdot \cos \alpha \right]. \end{aligned}$$

La composante Δy_α se calcule en posant $\theta = \alpha$ dans l'expression de Δy_1 .

Récapitulation. Déplacements cumulés.

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta x_o + \Delta x_1 = \Delta r \cdot \sin \theta + \frac{1}{E_b} \left(a_{11} \Delta X + a_{13} \frac{\Delta M}{e} \right) \\ \Delta y &= \Delta y_o + \Delta y_1 + \Delta v = \Delta r \cdot \cos \theta + \frac{1}{E_b} \left(a_{21} \Delta X + a_{23} \frac{\Delta M}{e} \right) + \Delta v \\ \Delta w &= \Delta w_o + \Delta w_1 = \frac{1}{E_b} \left(a_{31} \frac{\Delta X}{e} + a_{33} \frac{\Delta M}{e^2} \right) \\ \text{avec : } \Delta v &= \delta v - \Delta r \cdot \cos \alpha - \Delta y_\alpha. \end{aligned}$$

Les différents coefficients et les termes non explicités de ces expressions ont les valeurs ci-après, qui peuvent être groupées en deux catégories, suivant qu'ils dépendent ou non du mode de charge :

a) Coefficients indépendants du mode de charge :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda \cdot (2\theta - \sin \theta \cos \theta) + \lambda^3 \cdot 6 [\theta - \sin \theta \cos \theta - 2 \cos \alpha (\sin \theta - \theta \cos \theta)] \\ a_{13} &= \lambda^2 \cdot 12 (\sin \theta - \theta \cos \theta) \\ a_{21} &= \lambda \cdot \sin^2 \theta + \lambda^3 \cdot 6 [\sin^2 \theta + 2 \cos \alpha (1 - \cos \theta - \theta \sin \theta)] \\ a_{23} &= \lambda^2 \cdot 12 (\theta \sin \theta + \cos \theta - 1) \\ a_{31} &= \lambda^2 \cdot 12 (\sin \theta - \theta \cos \alpha) \\ a_{33} &= \lambda \cdot 12 \theta, \end{aligned}$$

b) Termes dépendant du mode de charge :

$$\begin{aligned} \delta v &= \frac{1}{E_r} \left[N_o \cdot k_n \cdot \sin \alpha + \Delta X \cdot (k_n - k_t) \cdot \sin \alpha \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_o + \Delta M}{e} \cdot k_n \cdot \cos \alpha \right] \end{aligned}$$

$$\Delta y_\alpha = \frac{1}{E_b} \left(a_{21\alpha} \Delta X + a_{31\alpha} \frac{\Delta M}{e} \right), \quad \text{où}$$

$$a_{21\alpha} = \lambda \cdot \sin^2 \alpha + \lambda^3 \cdot 6 [\sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha (1 - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha)]$$

$$a_{23\alpha} = \lambda^2 \cdot 12 (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1).$$

La distinction des trois cas de charge envisagés dans cette étude conduit enfin aux expressions suivantes :

$$\text{Eau :} \quad \Delta r = r \cdot \frac{\sigma_o}{E_b} = r \cdot \frac{pr_e}{E_b e} = \frac{R\lambda}{E_b}$$

$$N_o = R = pr_e; \quad M_o = 0$$

$$\Delta X = K \cdot R; \quad \Delta M = -\Delta X \cdot y_s.$$

$$\text{Var. unif. temp. :} \quad \Delta r = \Delta r_t = r \cdot \beta \cdot \Delta t$$

$$N_o = 0; \quad M_o = 0$$

$$\Delta X = \Delta X_t = K_t \cdot R_t; \quad \Delta M = -\Delta X_t \cdot y_s.$$

$$\text{Var. lin. temp. :} \quad \Delta r = \Delta r_\tau = 0$$

$$N_o = 0; \quad M_o = \frac{1}{6} \cdot \beta \cdot \Delta \tau \cdot E_b \cdot e^2$$

$$\Delta X = \Delta X_\tau = K_\tau \cdot R_\tau; \quad \Delta M = -\Delta X_\tau \cdot y_s + \Delta M_\tau.$$

Composantes radiales des déplacements des points de la fibre moyenne

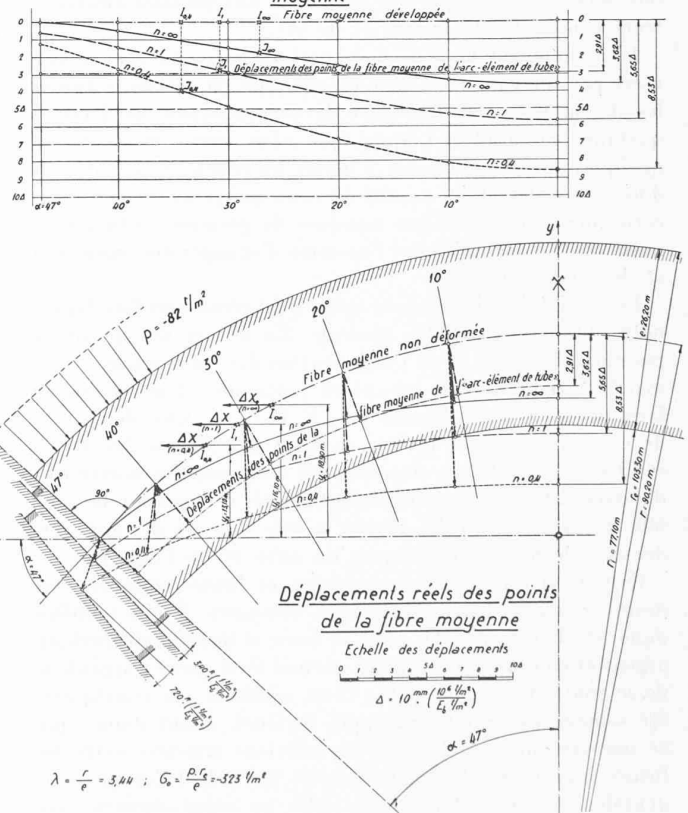


Fig. 24. — Déplacements des points de la fibre moyenne d'un arc de barrage sur appuis élastiques déformables sollicité par une pression d'eau uniformément répartie.

