

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 78 (1952)  
**Heft:** 25

**Artikel:** Le calcul de l'armature économique des éléments prismatiques de section rectangulaire au moyen d'abaques  
**Autor:** McKelvey, K.K.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59013>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

**Abonnements :**  
Suisse : 1 an, 24 francs  
Etranger : 28 francs  
Pour sociétaires :  
Suisse : 1 an, 20 francs  
Etranger : 28 francs  
Pour les abonnements  
s'adresser à :  
**Administration**  
du « Bulletin technique  
de la Suisse romande »  
Librairie Rouge & Cie  
S. A., Lausanne  
Compte de chèques pos-  
taux II. 5775, à Lausanne  
Prix du numéro : Fr. 1.40

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Société vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président : R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président : G. Epitoux, architecte, à Lausanne; Secrétaire : J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg : MM. P. Joye, professeur; † E. Lateltin, architecte — Vaud : MM. F. Chenaux, ingénieur; H. Matti, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; Ch. Thévenaz, architecte — Genève : MM. L. Archinard, ingénieur; Cl. Croscurin, architecte; E. Martin, architecte; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel : MM. J. Béguin, architecte; R. Guye, ingénieur — Valais : MM. J. Dubuis, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration de la Société anonyme du Bulletin Technique : A. Stucky, ingénieur, président; M. Bridel; G. Epitoux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

## Tarif des annonces

Le millimètre  
(arg. 47 mm) 24 cts  
Réclames : 60 cts le mm  
(largeur 95 mm)  
Rabais pour annonces  
répétées

Annonces Suisses S.A.



5 Rue Centrale. Tél. 22 33 26  
Lausanne et succursales

**SOMMAIRE :** *Le calcul de l'armature économique des éléments prismatiques de section rectangulaire au moyen d'abaques*, par K. K. McKELVEY, B. Sc. (Eng.). — **DIVERS :** *Le premier pont en béton précontraint sur le Rhin*. — COMMUNIQUÉ. — CARNET DES CONCOURS — ERRATUM. — SERVICE DE PLACEMENT. — DOCUMENTATION GÉNÉRALE. — NOUVEAUTÉS, INFORMATIONS DIVERSES.

## LE CALCUL DE L'ARMATURE ÉCONOMIQUE DES ÉLÉMENTS PRISMATIQUES DE SECTION RECTANGULAIRE AU MOYEN D'ABAQUES

par K. K. McKELVEY, B. Sc. (Eng.)

A. M. I. C. E., A. M. I. Struct. E., A. I. Mech. E., Ingénieur S. I. A.

### Introduction

Le calcul d'un élément en béton armé prismatique de section rectangulaire soumis à l'influence d'une charge excentrique agissant sur les axes principaux de la section, conduit à des équations cubiques longues à résoudre. L'utilisation de tableaux de coefficients est maintenant d'usage courant (1 + 2)<sup>1</sup>. Ces tableaux ne donnent pas une idée très claire des facteurs du calcul et les valeurs obtenues pour l'armature sont rarement les plus économiques. H. Dumontier (3) a montré approximativement quelle était la solution économique et, plus récemment, le Dr O'Sullivan (4) a fait une analyse complète de ce problème. L'application de la théorie de O'Sullivan nous a conduit à établir des abaques qui permettent un calcul rapide et précis de l'armature la plus économique pour n'importe quel cas de charge agissant sur les axes principaux de la section.

Nous examinerons successivement les cas suivants : flexion composée de compression, flexion composée de traction et flexion simple. L'influence du pourcentage d'armature et du rapport des contraintes acier-béton a été étudiée.

Nous indiquerons tout d'abord brièvement quelles sont les différentes phases de l'étude telles que O'Sullivan les conçoit,

puis compléterons cet exposé par une série d'abaques. Cette méthode a déjà été esquissée dans une publication antérieure (5). Le praticien qui cherche des méthodes précises, moins onéreuses que celles proposées par le théoricien, disposera ainsi d'un outil maniable. Une extension de la présente étude aux normes étrangères (par exemple, en admettant  $n = 15$ ) est en voie de préparation et fera l'objet d'une nouvelle publication.

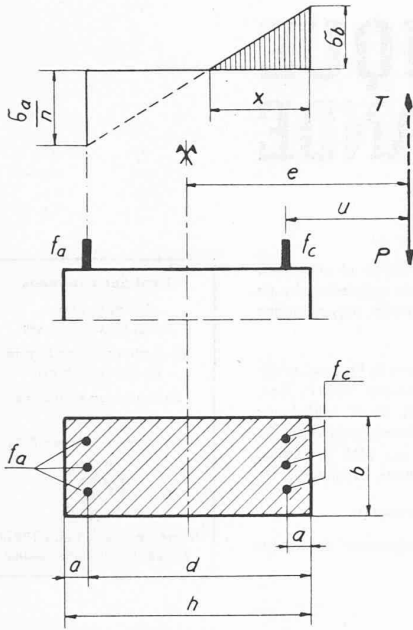
### Hypothèses, notations, analyse des phases

On a admis les hypothèses classiques du béton armé. Le béton est parfaitement élastique, le rapport des modules d'élasticité acier-béton est constant, l'adhérence béton-acier est complète. Il n'a pas été tenu compte des contraintes intrinsèques de retrait ni de la capacité de résistance du béton à la traction.

Les notations adoptées sont celles de la figure 1.

*Phase A :* Une force de compression appliquée initialement au centre de gravité de la section, se déplace le long d'un des axes principaux (fig. 2). L'armature la plus économique doit être disposée symétriquement lorsque la charge est appliquée au centre de gravité de la section. Si la force se déplace, la solution économique consiste à maintenir dans toute la

<sup>1</sup> Les chiffres entre parenthèses se rapportent à la bibliographie.



$$e_1 = \frac{e}{h} \quad x_1 = \frac{x}{d}$$

$$u_1 = \frac{u}{d} \quad a_1 = \frac{a}{h}$$

$$\% \text{ d'acier tendu } \rho_a = \frac{f_a}{b h}$$

$$\% \text{ d'acier comprimé } \rho_c = \frac{f_c}{b h}$$

$$\rho = \rho_a + \rho_c$$

$\sigma_b$  = contrainte max admissible, dans le béton.

$\sigma_a$  = " " " " dans l'acier.

Fig. 1. — Notations adoptées.

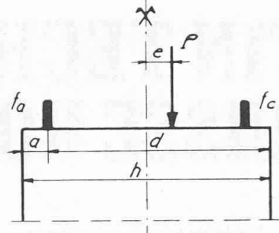


Fig. 2. — Phase A.

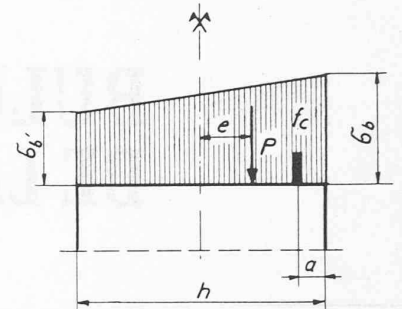


Fig. 3. — Phase B.

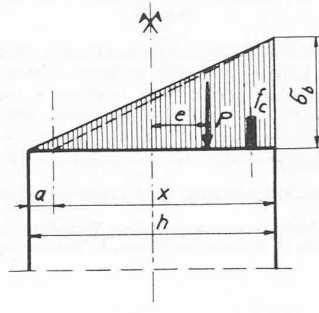


Fig. 4. — Limite entre les phases B et C.

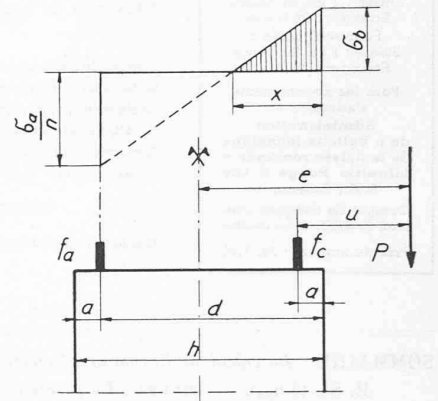


Fig. 5. — Phases C, D, E, F.

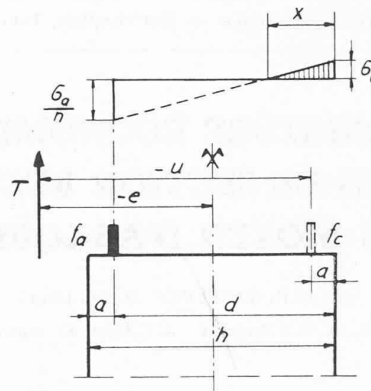


Fig. 6. — Phase G-H

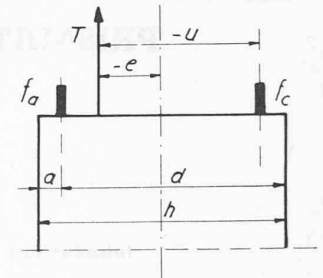


Fig. 7. — Phase J.

section une contrainte de compression du béton égale à la contrainte admissible. L'armature est alors définie par

$$f_c = \frac{P \left( \frac{h}{2} - a + e \right) - \sigma_b b h \left( \frac{h}{2} - a \right)}{(n-1)(h-2a)\sigma_b} \quad [1]$$

$$f_a = \frac{P \left( \frac{h}{2} - a - e \right) - \sigma_b b h \left( \frac{h}{2} - a \right)}{(n-1)(h-2a)\sigma_b} \quad [2]$$

Il est évident que la plus grande valeur du rapport  $e/h = e_1$  dans ce cas, s'obtient lorsque l'armature est placée d'un côté seulement, c'est-à-dire quand  $f_a = 0$ . En prenant les moments par rapport au centre de gravité on obtient alors :

$$\rho (n-1) \sigma_b b h \left( \frac{h}{2} - a \right) = P \cdot e \quad [3]$$

La courbe correspondant à cette équation fixe le début de la phase suivante (fig. 10 a).

Phase B : Il n'est plus possible de maintenir une contrainte maxima dans le béton sur toute la section. En exprimant

l'équilibre des forces et des moments, on obtient l'expression suivante :

$$\frac{\sigma_b b h}{P} \left\{ \frac{2}{3} - 2a_1 + 2a_1^2 + \frac{1}{6(n-1)\rho} \right\} = e_1 \left\{ \frac{1}{(n-1)\rho} + 2a_1 \right\} + 2a_1^2 - a_1 + \frac{1}{6(n-1)\rho} \quad [4]$$

d'où nous tirons la valeur de  $\rho$  (qui dans ce cas équivaut à  $\rho_c$ ). Cette condition prime jusqu'au moment où  $x = h$  (fig. 4) c'est-à-dire lorsque :

$$e_1 = \frac{\frac{1}{6} + \rho(n-1) \frac{1-a_1}{1+a_1}}{1 + 2\rho(n-1)} \quad [5]$$

Considérons maintenant une section armée symétriquement dans les limites des phases A et B. Nous avons :

$$\frac{\sigma_b b h}{P} = \frac{6e_1}{1 + 3\rho(n-1) \frac{1-a_1}{1+a_1}} + \frac{1}{1 + (n-1)\rho} \quad [6]$$

L'intersection des courbes [4] et [6] détermine un lieu de points qui correspondent aux valeurs de  $e_1$  dans l'équation [4] avec  $x = d$  (fig. 1). On obtient :

$$e_1 = \frac{\frac{3a_1 + 1}{12} + \rho(n-1) \left( \frac{1-a_1^2}{2} \right)}{(1+a_1) \left\{ \rho(n-1)(1+a_1) + \frac{1}{2} \right\}} \quad [7]$$

Cette courbe marque la fin de la phase *B*. A ce moment l'armature économique est égale à la moitié de l'armature symétrique (fig. 10 a).

*Phase C* : L'excentricité de la charge croît et une armature dans la zone tendue devient nécessaire (fig. 5). Dans ces conditions, avec  $\sigma_b$  comme paramètre :

$$f_c = \frac{Px_1(1+u_1-a_1) - \sigma_b bx_1^2 \frac{d}{2} \left( 1 - \frac{x_1}{3} \right)}{(x_1-a_1)(1-a_1)(n-1)\sigma_b} \quad [8]$$

$$f_a = \frac{Pu_1x_1 + \sigma_b bx_1^2 \frac{d}{2} \left( \frac{x_1}{3} - a_1 \right)}{(1-x_1)(1-a_1)n\sigma_b} \quad [9]$$

Ces deux expressions seront utilisées pour les phases *C*, *D*, *E*, *F*. La condition qui correspond à une armature minimum a été démontrée par O'Sullivan (6) ; elle est donnée par l'expression :  $\frac{d}{dx} (f_a + f_c) = 0$ .

La relation entre les paramètres  $\frac{\sigma_b bd}{P}$  et  $u_1$ , est alors :

$$\frac{\sigma_b bd}{P} \left\{ x_1 \left( \frac{x_1^2}{3} - \frac{x_1 a_1}{2} - \frac{x_1}{2} + a_1 \right) \left( \frac{1}{(x_1-a_1)^2} - \frac{n-1}{n(1-x_1)^2} \right) \right\} =$$

$$= u_1 \left\{ \frac{a_1}{(x_1-a_1)^2} - \frac{n-1}{n(1-x_1)^2} \right\} + \frac{a_1(1-a_1)}{(x_1-a_1)^2} \quad [10]$$

Pour définir les limites de la phase *C*, nous envisageons le maintien de la stabilité en dehors de la marge d'excentricité donnée par l'équation [7], en prévoyant uniquement une armature comprimée,  $e:h$  restant  $< 1/2$ . Pour  $x_1 < d$  (fig. 4), nous avons :

$$f_c = \frac{Px_1 - \sigma_b bx_1^2 \frac{d}{2} (1+x_1)}{(x_1-a_1)(n-1)\sigma_b} \quad [11]$$

$x_1$ , étant déterminé par la relation :

$$\frac{\sigma_b bh}{P} \left( \frac{x_1^2}{6} - \frac{x_1 a_1}{2} \right) = \frac{1}{2} - a_1 - e_1 \quad [12]$$

La valeur de  $x_1$  diminue progressivement jusqu'à la valeur  $\frac{n\sigma_b}{n\sigma_b + \sigma_a}$ , qui correspond à une contrainte de traction dans l'acier égale à la contrainte admissible, lorsqu'on prévoit une armature dans la zone tendue. Si  $x_1$  devient inférieur à ce rapport (armature dans la zone comprimée seulement) la quantité d'acier croît très rapidement. La limite est atteinte lorsque la charge coïncide avec le centre de gravité de l'armature comprimée ; à partir de ce moment, il est pratiquement impossible de maintenir un équilibre stable, même pour un déplacement faible de la charge. Une telle solution nécessite une plus grande quantité d'armature que celle donnée par les équations [8], [9], [10]. La limite entre les phases *C* et *D* est définie par  $x_1 = \frac{n\sigma_b}{n\sigma_b + \sigma_a}$ .

*Phase D* : La contrainte maximum  $\sigma_b$  est considérée comme critère ; les armatures sont déterminées à l'aide des relations

[8] et [9]. La charge se déplace vers l'infini, change de signe et revient vers la section jusqu'au point limite où  $x_1 = \frac{n\sigma_b}{n\sigma_b + \sigma_a}$ . Si  $x_1$  diminue, l'équation [10] n'est plus applicable. Examinons si la contrainte de traction maxima dans l'acier peut être admise comme critère.

Ecrivons à nouveau les équations [8] et [9] en admettant  $\sigma_a$  comme paramètre :

$$f_c = \frac{P(1-x_1)(1+u_1-a_1)n}{(x_1-a_1)(1-a_1)(n-1)\sigma_a} - \frac{bdx_1^2 \left( 1 - \frac{x_1}{3} \right)}{2(x_1-a_1)(1-a_1)(n-1)} \quad [13]$$

$$f_a = \frac{Pu_1}{(1-a_1)\sigma_a} + \frac{bdx_1^2 \left( \frac{x_1}{3} - a_1 \right)}{2(1-x_1)(1-a_1)n} \quad [14]$$

Dans ces équations,  $x_1$  doit être inférieure à  $\frac{n\sigma_b}{n\sigma_b + \sigma_a}$ , sinon  $\sigma_b$  a une valeur trop grande. La condition conduisant à une armature minimum s'obtient de la même manière que la condition [10]. Les paramètres  $\frac{bd\sigma_a}{Pn}$  et  $u_1$  satisfont à la relation :

$$\frac{bd\sigma_a}{Pn} \cdot x_1 \cdot \left( \frac{x_1^2}{3} - \frac{x_1 a_1}{2} - \frac{x_1}{2} + a_1 \right) \left\{ \frac{1}{(x_1-a_1)^2} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{(1-x_1)^2} \right\} =$$

$$= \frac{1-a_1}{(x_1-a_1)^2} \cdot u_1 + \frac{(1-a_1)^2}{(x_1-a_1)^2} \quad [15]$$

En remplaçant dans cette équation  $\frac{bd\sigma_a}{Pn}$  et  $u_1$ , par des valeurs courantes, le facteur de recouvrement  $a_1$  variant de 0,05 à 0,10, on constate que  $x_1$  est supérieur à  $\frac{n\sigma_b}{n\sigma_b + \sigma_a}$ . La contrainte  $\sigma_a$  maximum ne peut donc être prise comme critère et la limite de la phase *D* est atteinte lorsque  $x_1 = \frac{n\sigma_b}{n\sigma_b + \sigma_a}$  (contraintes maxima simultanément dans l'acier et le béton).

*Phase E* : Au cours de la phase *E*  $x_1 = \frac{n\sigma_b}{n\sigma_b + \sigma_a}$ . Les quantités d'armature sont définies par les équations [8] et [9]. La fin de cette phase correspond à  $f_a = f_c$  soit :

$$\frac{\sigma_b bd}{P} \left\{ \left( \frac{x_1}{3} - a_1 \right) (x_1 - a_1) (n-1) + \left( 1 - \frac{x_1}{3} \right) (1-x_1) n \right\} \frac{x_1}{2} =$$

$$= \{ (1-x_1)n - (x_1-a_1)(n-1) \} u_1 + (1-a_1)(1-x_1)n \quad [16]$$

A ce moment l'armature économique est une armature symétrique.

*Phase F* : La charge se déplace plus loin, ( $x_1$  restant égal à  $\frac{n\sigma_b}{n\sigma_b + \sigma_a}$ ) jusqu'au point où revenant de l'infini comme force de traction l'armature comprimée n'est plus nécessaire.

*Phase G* : La résistance à la compression est assurée par le béton seul,  $x_1$  peut être inférieur à la valeur limite de la phase *F* (fig. 6). On obtient les expressions suivantes :

$$(u_1 + a_1 - 1) \frac{Tn}{bd\sigma_a} = \frac{x_1^2}{2(1-x_1)} \left( 1 - \frac{x_1}{3} \right) \quad [17]$$

et

$$f_a = \frac{Tn \left( u_1 + a_1 - \frac{x_1}{3} \right)}{\sigma_a \left( 1 - \frac{x_1}{3} \right)} \quad [18]$$

La limite de la phase est définie par  $x_1 = a_1$ .

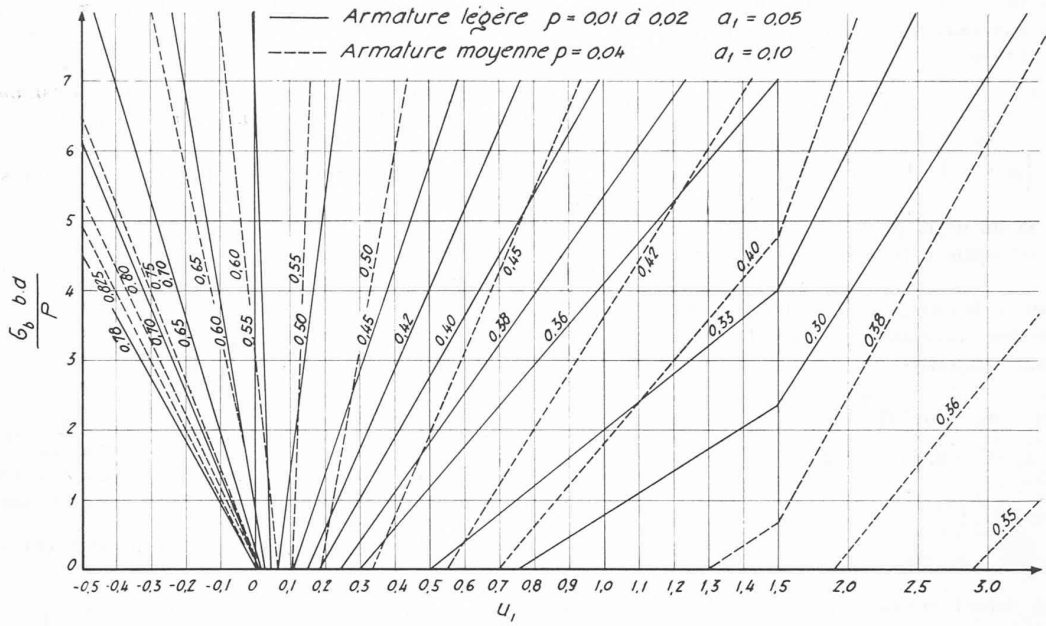


Fig. 9 a.  
Phases C, D, E, F.  
Détermination de la position de l'axe neutre (valeur de  $x_1$ ).

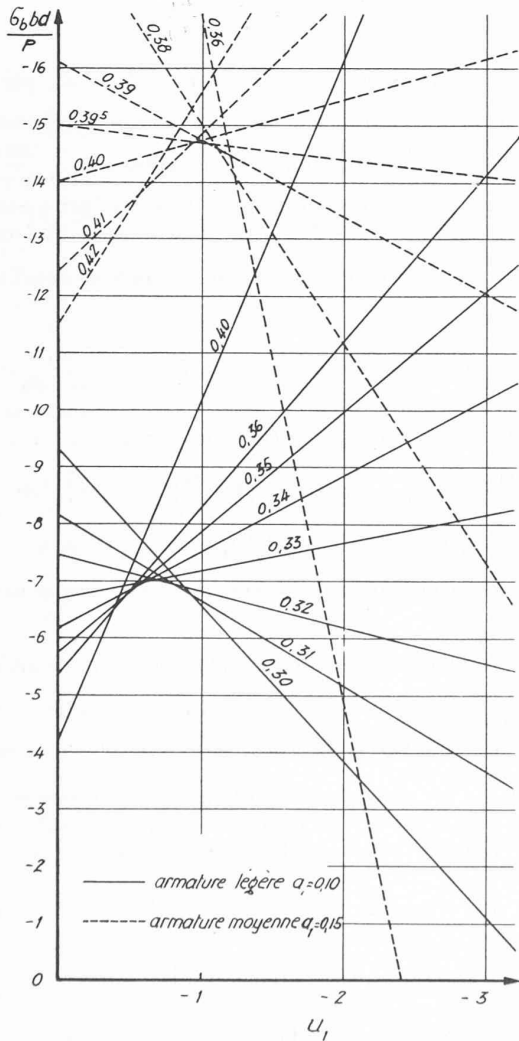


Fig. 9 b. — Phases D, E, F (traction).  
Détermination de la position de l'axe neutre (valeurs de  $x_1$ ).

Phase H :  $x_1 < a_1$ , la zone comprimée du béton tend vers 0, et on a :

$$\left( u_1 - \frac{bd\sigma_a}{Tn} \cdot \frac{x_1^2}{2} \cdot \frac{1-x_1}{1-x_1} \right) \left( 1 + \frac{a_1-x_1}{1-x_1} \right) = \left[ 1 - \frac{bd\sigma_a}{Tn} \cdot \frac{x_1^2}{2(1-x_1)} \right] \left[ (1-a_1) \frac{a_1-x_1}{1-x_1} \right] \quad [19]$$

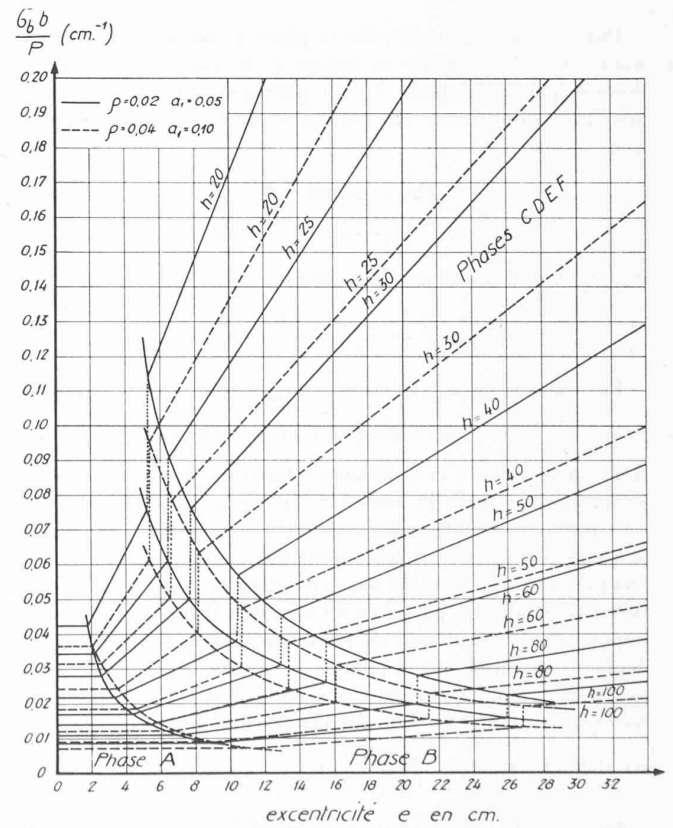


Fig. 8 a. — Phases A, B, C, D, E, F.  
Détermination de la hauteur h (en cm).

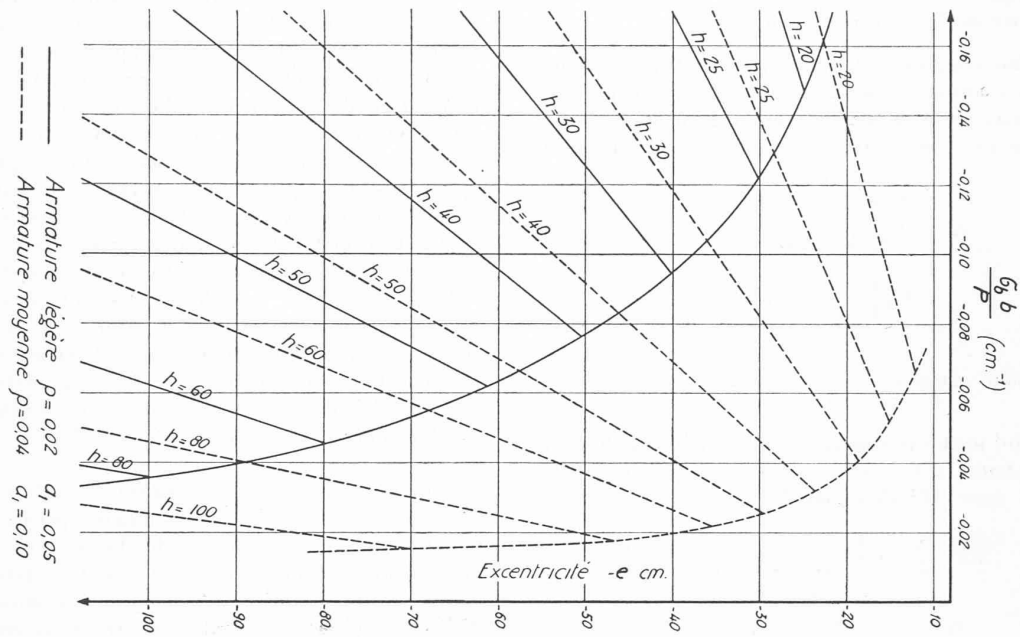


Fig. 8 b. — Phases D, E, F (traction). Détermination de la hauteur  $h$  (en cm).

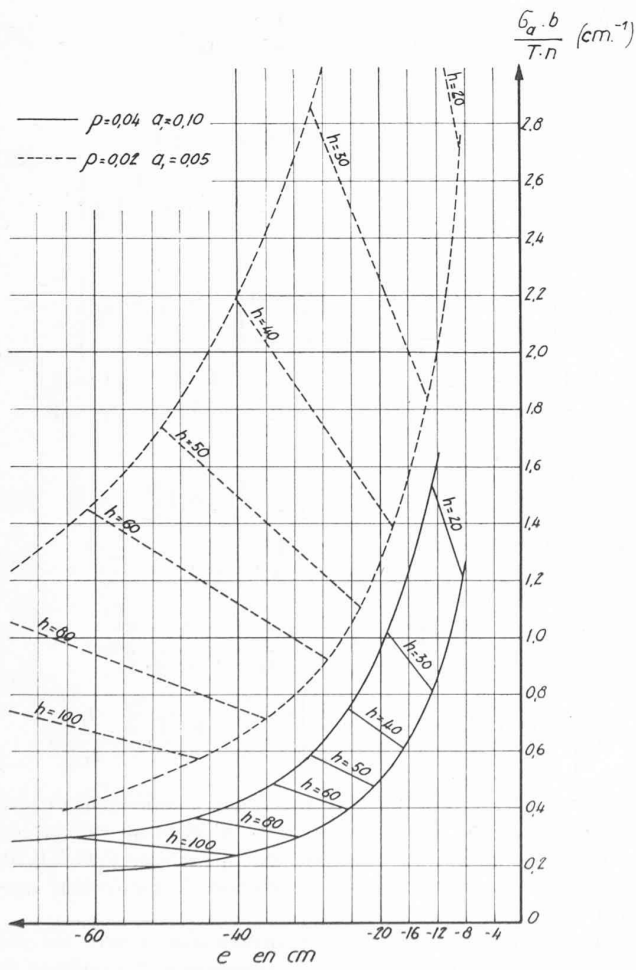


Fig. 8 c. — Phases G et H (traction). Détermination de la hauteur  $h$  (en cm).

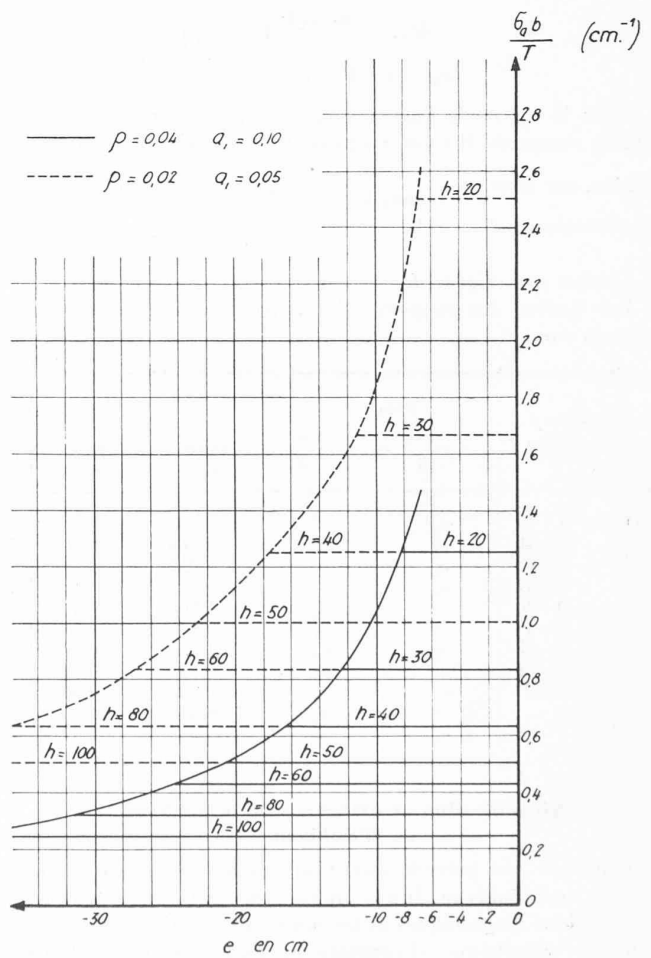


Fig. 8 d. — Phase J (traction). Détermination de la hauteur  $h$  (en cm).

La fin de la phase est atteinte lorsque  $T$  coïncide avec le centre de gravité de l'armature tendue.

*Phase J* : Une armature est nécessaire aux deux côtés de la section. La solution économique consiste à répartir les armatures de manière à ce que le point d'application de la charge coïncide avec le centre de gravité des armatures :

$$f_a = \frac{T \left( e + \frac{h}{2} - a \right)}{\sigma_a (h - 2a)} \quad [20]$$

et 
$$f_c = \frac{T \left( \frac{h}{2} - a - e \right)}{\sigma_a (h - 2a)} \quad [21]$$

Pour  $e = 0$  nous retrouvons une armature symétrique.

*Flexion simple*

L'équation [10] peut être simplifiée dans le cas de la flexion simple.  $P$  tendant vers 0 et  $u_1$  vers l'infini,  $Pdu_1 = M$ . En remplaçant dans [10]  $Pdu_1$  par  $M$ , on obtient :

$$\frac{M}{\sigma_b b d^2} = \frac{x_1 \left\{ \frac{x_1^2}{3} - \frac{x_1 a_1}{2} - \frac{x_1}{2} + a_1 \right\} \left\{ \frac{1}{(x_1 - a_1)^2} - \frac{n-1}{n(1-x_1)^2} \right\}}{\frac{a_1}{(x_1 - a_1)^2} - \frac{n-1}{n(1-x_1)^2}} \quad [22]$$

et par analogie

$$f_a = \frac{M x_1 + \frac{\sigma_b b x_1^2}{2} d^2 \left( \frac{x_1}{3} - a_1 \right)}{(1-x_1)(1-a_1)n\sigma_b d} \quad [23]$$

$$f_c = \frac{M x_1 - \frac{\sigma_b b x_1^2}{2} d^2 \left( 1 - \frac{x_1}{3} \right)}{(x_1 - a_1)(1-a_1)(n-1)\sigma_b \cdot d} \quad [24]$$

Dans le cas de la flexion simple comme dans celui de la flexion composée, il n'est pas possible de choisir  $\sigma_{a \max}$  comme critère, car alors  $x_1 > \frac{n\sigma_b}{n\sigma_b + \sigma_a}$  et la contrainte  $\sigma_b$  dépasse la contrainte admissible.

*Limites numériques des phases*

Les limites des rapports d'excentricité figurent dans le tableau suivant :

TABLEAU I

Limites entre phases	Rapports		Armature	
	$e_1 = \frac{e}{h}$	ou $u_1 = \frac{u}{d}$	légère 2 %	moyenne 4 %
Début A	$e_1$	—	0	0
A - B	$e_1$	—	0,069	0,108
B - C	$e_1$	—	0,257	0,291
C - D	$e_1$	—	0,42	0,49
D - E	—	$u_1$	1,00	— 8,5
E - F	—	$u_1$	2,8	— 4,5
F - G	—	$u_1$	— 1,53	— 1,12
G - H	—	$u_1$	— 0,96	— 0,91
H - J	—	$u_1$	— 0,95	— 0,90
Fin J	$e_1$	—	— 0,45	— 0,40
			0	0

**Simplification et extension de la méthode de O'Sullivan**

L'analyse qui précède donne une image complète de la théorie de O'Sullivan. Il a complété son étude en comparant les solutions économiques et les solutions traditionnelles avec armature symétrique. Il constate que l'on peut dans certains cas réaliser une économie allant jusqu'à 200 % ; en flexion simple, l'économie est d'environ 5 % par rapport aux méthodes

qui admettent des contraintes maxima simultanément dans l'acier et le béton. Il montre en outre que le calcul des pièces sollicitées par des forces excentriques peut être grandement simplifié par l'emploi d'abaques qui permettent de déterminer la position de l'axe neutre. Les graphiques qu'il donne se retrouvent partiellement dans les figures 9 a, 9 b et 11 b qui sont adaptées aux normes suisses. Le graphique 10 a est aussi de sa conception. Les courbes de la figure 9 b ont été calculées en admettant des facteurs de recouvrement  $a_1$  plus élevés (0.10 et 0.15) que dans les autres cas, vu la nécessité de protéger les armatures dans un élément tendu.

Les formules qui précèdent supposent connues : la valeur et la position de la charge, la largeur et la hauteur de la section, le pourcentage approximatif d'armature. En pratique, ces conditions sont rarement réalisées. La détermination des sections d'acier nécessaires reste assez longue, si l'on doit répéter l'opération plusieurs fois afin de trouver une solution satisfaisante.

Il nous a paru indiqué de chercher d'autres simplifications et nous avons établi des graphiques permettant d'obtenir une hauteur approximative de la section. Cette valeur étant connue, d'autres abaques fixent la position de l'axe neutre et les quantités d'acier. Les formules relatives aux différentes phases peuvent être transformées. On obtient pour chaque phase une expression de la forme :

$$F \left( \frac{\sigma_b \cdot b}{P} \right) = F(h) + F(e)$$

*Phase A* : 
$$\frac{\sigma_b b}{P} = \frac{1}{[1 + \rho(n-1)]h} \quad [25]$$

*Phase B* : 
$$\frac{\sigma_b b}{P} \cdot h^2 \left\{ \frac{2}{3} - 2a_1 + 2a_1^2 + \frac{1}{6(n-1)\rho} \right\} = e \left\{ \frac{1}{(n-1)\rho} + 2a_1 \right\} + h \left\{ 2a_1^2 - a_1 + \frac{1}{6(n-1)\rho} \right\} \quad [26]$$

*Phases C, D, E, F* :

$$\frac{\sigma_b b}{P} h^2 \left\{ \frac{x_1}{2(1+a_1)} \left[ \frac{(1-x_1)}{(x_1-a_1)} - \frac{n-1}{n} \frac{(x_1-a_1)}{(1-x_1)} \right] + \rho \frac{(h-1)(1-a_1)}{x_1} \right\} = e \left\{ \frac{1}{x_1-a_1} + \frac{n-1}{n} \frac{1}{1-x_1} \right\} \frac{h(1-a_1)}{2(1+a_1)} + \frac{n-1}{n} \frac{1}{1-x_1} \frac{2(1+a_1)}{x_1-a_1} \quad [27]$$

*Phases G, H* :

$$\frac{\sigma_a b}{T n} h^2 \rho \left( 1 - \frac{x_1}{3} \right) = e - h \left\{ \frac{1-a_1}{2(1+a_1)} + \left( \frac{x_1}{3} - a_1 \right) \right\} \quad [28]$$

*Phase J* : 
$$\frac{\sigma_a b}{T} = \frac{1}{\rho h} \quad [29]$$

*Flexion simple* :

$$\frac{M}{\sigma_b \cdot b} (1 + a_1) \left\{ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{x_1-a_1} \right\} = h^2 \left\{ \rho \frac{(n-1)(1-a_1)}{x_1} + \frac{x_1}{2(1+a_1)} \left[ \frac{1-x_1}{x_1-a_1} - \frac{n-1}{n} \frac{x_1-a_1}{1-x_1} \right] \right\} \quad [30]$$

Ces formules ont été utilisées pour l'établissement des abaques fig. 8 a à 8 d. La quantité d'armature variant de 1 à 4 %, le facteur de recouvrement  $a_1$  varie de 0,05 à 0,10, ce qui est assez exact pour une section de dimensions normales.

Les formules donnant les quantités d'armatures ont été transformées de façon à ce que l'armature soit exprimée en pourcent de la section. Les relations résultantes figurent dans le tableau suivant :

TABLEAU II

Phase	Fig.	Armature comprimée	Armature tendue
A	10 a	$\rho_c \left\{ \frac{2(n-1)}{1+a_1 \left[ 1 + \frac{2e_1(1+a_1)}{1-a_1} \right] - 1} \right\} = \frac{P}{\sigma_b b d} \dots$ [31]	$\rho_a \left\{ \frac{2(n-1)}{1+a_1 \left[ 1 - \frac{2e_1(1+a_1)}{1-a_1} \right] - 1} \right\} = \frac{P}{\sigma_b b d} \dots$ [32]
B	10 a	Equation ... [4]	pas d'armature
C, D, E, F	10 b	$\rho_c \left\{ \frac{x_1 - a_1}{x_1} (1 - a_1^2) (n - 1) \right\} + \frac{x_1}{2} \left( 1 - \frac{x_1}{3} \right) = \frac{P}{\sigma_b b d} (1 + u_1 - a_1) \dots$ [33]	$\rho_a \left\{ \frac{1 - x_1}{x_1} (1 - a_1^2) n \right\} - \frac{x_1}{2} \left( \frac{x_1}{3} - a_1 \right) = \frac{P}{\sigma_b b d} u_1 \dots$ [34]
G, H	10 c	pas d'armature	$\rho_a \left( 1 - \frac{x_1}{3} \right) (1 + a_1) = \frac{Tn}{\sigma_a b d} \left( u_1 + a_1 - \frac{x_1}{3} \right) \dots$ [35]
J	10 d	$\rho_c \frac{2(1 - a_1^2)}{(1 - a_1) - 2e_1(1 + a_1)} = \frac{T}{\sigma_a b d} \dots$ [36]	$\rho_a \frac{2(1 - a_1^2)}{(1 - a_1) + 2e_1(1 + a_1)} = \frac{T}{\sigma_a b d}$ [37]
Flexion simple	11 b	$\rho_c \left\{ \frac{x_1 - a_1}{x_1} (1 - a_1^2) (n - 1) \right\} + \frac{x_1}{2} \left( 1 - \frac{x_1}{3} \right) = \frac{M}{\sigma_b b d^2} \dots$ [38]	$\rho_a \left\{ \frac{1 - x_1}{x_1} (1 - a_1^2) n \right\} - \frac{x_1}{2} \left( \frac{x_1}{3} - a_1 \right) = \frac{M}{\sigma_b b d^2} \dots$ [39]

Le rapport entre le facteur de recouvrement et le pourcentage d'acier tel qu'il a été admis est une règle empirique. Il intervient dans le calcul des courbes des figures 8 a à 8 d seulement.

**Applications**

*Exemple 1*

Un pilier supporte une charge de 20 t appliquée à 30 cm, du centre de gravité de la section, trouver l'armature.

Admettons  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_b = 60 \text{ kg/cm}^2 \text{ et supposons une armature légère} \\ b = 40 \text{ cm} \end{array} \right.$  (1-2 %).

Nous avons :  $\frac{\sigma_b b}{P} = \frac{60 \cdot 40}{20\,000} = 0,12$  et  $e = 30 \text{ cm}$ .

Reportons-nous à la figure 8 a, nous trouvons  $h_{\min} = \sim 40 \text{ cm}$  (zone C, D, E, F), admettons  $h = 45 \text{ cm}$

$a_1 = \frac{a}{h} = 0,05$  d'où  $a = 0,05 \cdot 45 = 2,25 \text{ cm}$

et  $d = 45 - 2,25 = 42,75 \text{ cm}$

$u = e - \frac{d - a}{2} = 30 - 20,25 = 9,75 \text{ cm}$

$u_1 = \frac{u}{d} = \frac{9,75}{42,75} = 0,227$

$\frac{\sigma_b b d}{P} = 0,12 \times 42,75 = 5,13$

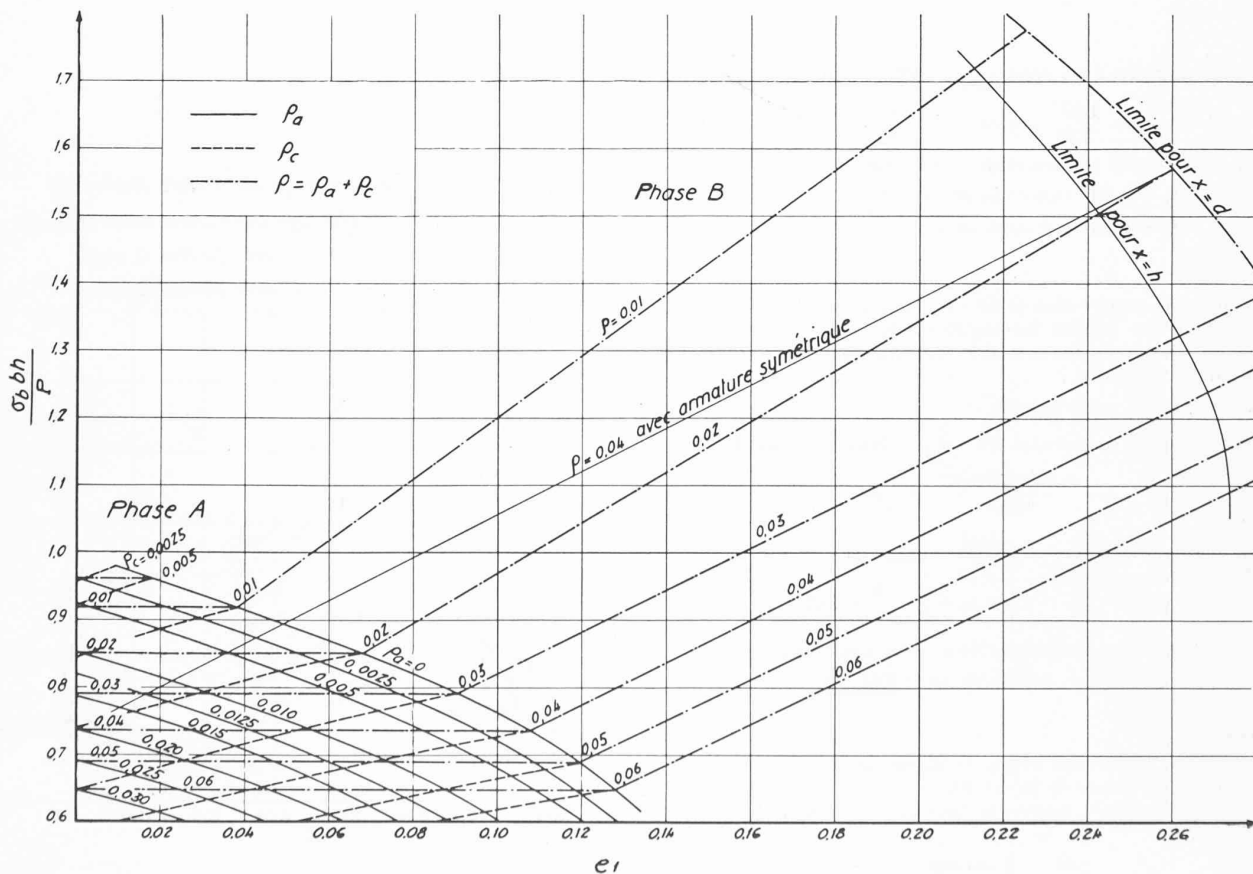


Fig. 10 a. — Phases A et B. Détermination de la quantité d'armature.



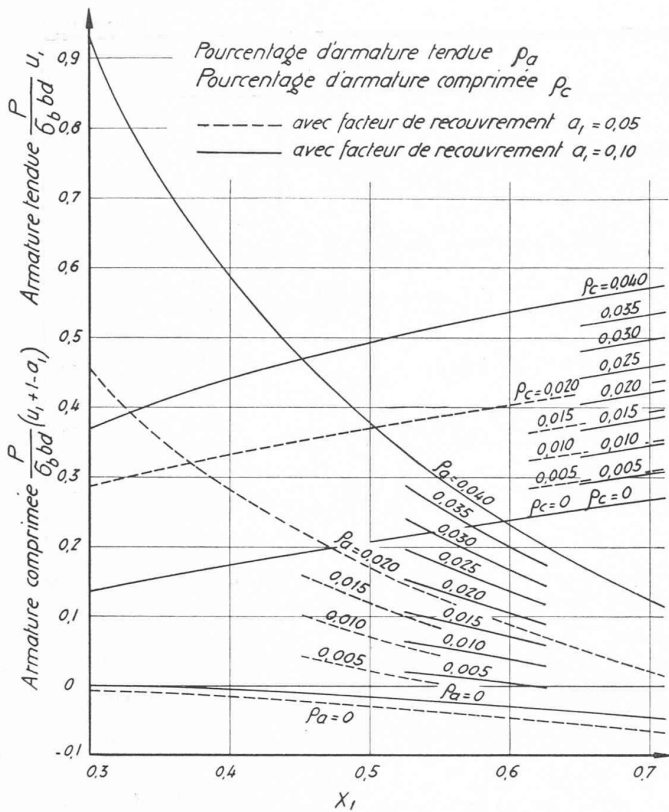


Fig. 10 b. — Phases C, D, E, F. Détermination de la quantité d'armature.

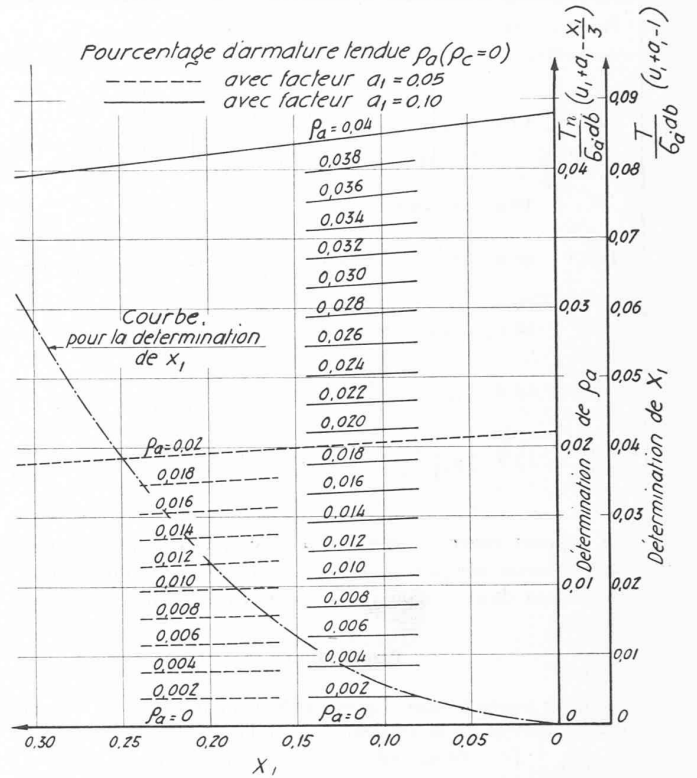


Fig. 10 c. — Phase G-H. Détermination de la position de l'axe neutre et de la quantité d'armature.

Le graphique 9 a nous donne  $x_1 = 0,495$ . Calculons maintenant  $\frac{P}{\sigma_b b d} (u_1 + 1 - a_1) = \frac{1,177}{5,13} = 0,23$  et  $\frac{P}{\sigma_b b d} \cdot u_1 = \frac{0,227}{5,13} = 0,044$ , ce qui nous permet de déterminer l'armature (fig. 10 b)

$$f_a = \rho_a b h = 0,0075 \cdot 40 \cdot 45 = 13,7 \text{ cm}^2$$

$$f_c = \rho_c b h = 0,0026 \cdot 40 \cdot 45 = 4,7 \text{ cm}^2$$

Exemple 2

Une force de compression de 60 t est appliquée à 8 cm du centre de gravité d'une section rectangulaire dont la hauteur est de 40 cm. En admettant une armature moyenne, quelle est la largeur minimum de la section ?

Admettons  $\sigma_b = 60 \text{ kg/cm}^2$ .

Nous tirons du graphique 8 b :  $\frac{\sigma_b b}{P} = 0,025$  (phase B)

d'où  $b = \frac{0,025 \cdot 60 \cdot 000}{60} = 25 \text{ cm.}$

Calculons les expressions  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_b b h}{P} = 0,025 \cdot 40 = 1 \\ \text{et } e_1 = \frac{e}{h} = \frac{8}{40} = 0,2 \end{array} \right.$

qui se rapportent au graphique 10 a, d'où nous tirons

$$f_c = \rho b h = 0,0425 \cdot 25 \cdot 40 = 42,5 \text{ cm}^2.$$

Exemple 3

Un sommier légèrement armé, de 50 cm de largeur, est soumis à un moment de flexion de 25 mt. En admettant un béton à haute résistance (100 kg/cm<sup>2</sup>), trouver la hauteur du sommier et la quantité d'acier.

Calculons  $\frac{M}{\sigma_b \cdot b} = \frac{2 \cdot 500 \cdot 000}{50 \cdot 100} = 500.$

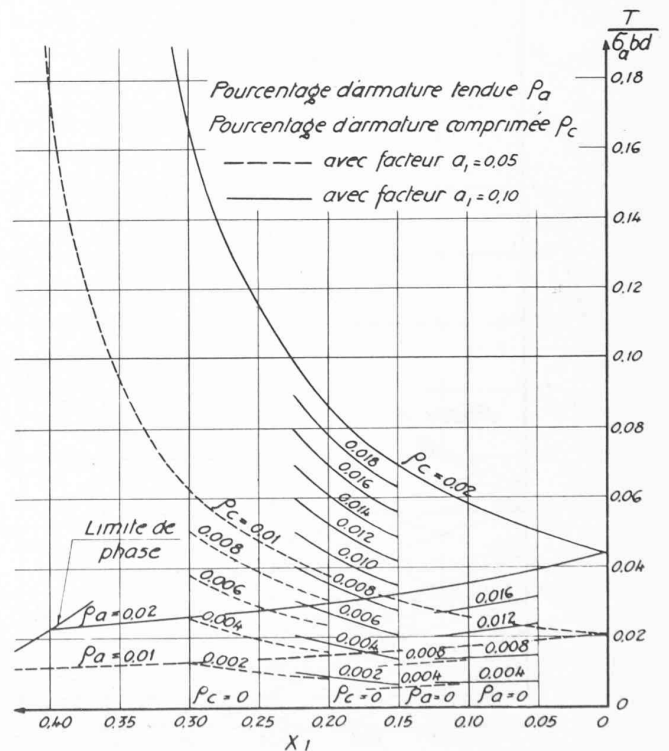


Fig. 10 d. — Phase I. Détermination de la quantité d'armature.

La figure 11 a nous donne

$$h = 58 \text{ cm pour } \rho = 0,01 \quad a = a_1 h = 0,05 \times 58 = 2,9 \text{ cm}$$

$$d = 58 - 2,9 = 55,1 \text{ cm}$$

$$\frac{M}{\sigma_b b d^2} = \frac{500}{(55,1)^2} = 0,165. \text{ La figure 11 b nous donne } x_1 = 0,361.$$

La quantité d'acier nécessaire peut être déterminée sur la figure 11 c :

$$f_c = 0,002 \cdot 58 \cdot 50 = 5,8 \text{ cm}^2 \text{ et } f_a = 0,009 \cdot 58 \cdot 50 = 26 \text{ cm}^2.$$

**Exemple 4**

Un sommier est encastré dans un pilier. Le moment d'encastrément est  $M$  ; d'autre part, le pilier supporte une charge  $P$  appliquée au centre de gravité. Déterminer l'armature du pilier.

Cette armature peut être déterminée par les mêmes méthodes que ci-dessus, en réduisant le système à une charge excentrique  $P$  agissant à la distance  $e = \frac{M}{P}$  du centre de gravité de la section.

**Exemple 5**

Dans le cas des constructions mixtes avec profilés noyés dans le béton, la méthode est également applicable.

Soit le cas d'un sommier, soumis à un moment de flexion de 8,5 mt, placé dans l'épaisseur d'une dalle de 19 cm.

a) Solution usuelle avec profilés :

$$W_x = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{850\,000}{1400} = 603 \text{ cm}^3.$$

On peut utiliser 2DIN de 16 cm (section 116,7 cm<sup>2</sup>).

b) Solution tenant compte du béton d'enrobage :

Admettons  $\sigma_b = 100 \text{ kg/cm}^2$ .  $b_{\text{disponible}} = 80 \text{ cm}$ .

$$\frac{M}{\sigma_b \cdot b} = \frac{850\,000}{100 \times 80} = 106.$$

Le graphique 11 a montre que  $h = 19 \text{ cm}$  est suffisant.

$$a_1 = 0,10 \quad \text{d'où} \quad d = 19 - 1,9 = 17,1 \text{ cm}.$$

$$\frac{M}{\sigma_b b d^2} = \frac{106}{17,1^2} = 0,363.$$

Du graphique 11 b nous tirons :

$$x_1 = 0,35 \quad \rho_c = 0,0319 \quad \rho_a = 0,0200$$

$$\text{soit } f_c = 0,0319 \times 80 \times 19 = 48,5 \text{ cm}^2$$

$$f_a = 0,0200 \times 80 \times 19 = 30,4 \text{ cm}^2.$$

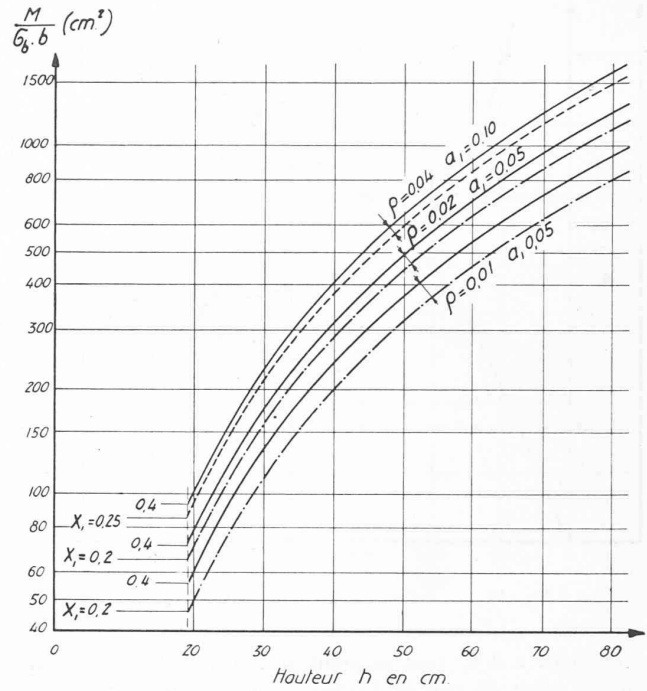


Fig. 11 a. — Flexion simple. Détermination de la hauteur  $h$ .

Nous pouvons utiliser un DIN de 16 (chaque aile ayant 23,2 cm<sup>2</sup>) renforcé du côté comprimé par une armature de 25,3 cm<sup>2</sup> et du côté tendu par une armature de 7,2 cm<sup>2</sup>. La solution b) nous permet de réaliser un gain de 37,8 cm<sup>2</sup> d'acier, soit environ 32 %.

**Conclusions**

Les différentes formules établies nous montrent qu'il est indiqué d'utiliser un béton de haute qualité dans le cas d'une faible excentricité de la force de compression, c'est-à-dire lorsqu'il y a absence de traction. Dans les cas où l'excentricité est grande, l'acier et le béton sont soumis simultanément

à des contraintes maxima ; la contrainte de traction de l'acier est alors proportionnelle à la contrainte admissible du béton. Dans les pièces tendues l'emploi d'un béton à haute résistance devient rapidement inutile. De même, il n'est pas économique d'utiliser un acier à haute résistance et un béton de mauvaise qualité, lorsque l'excentricité de la force est grande. Autrement dit, l'utilisation d'un acier à haute résistance en flexion composée est limitée à quelques cas spéciaux (par exemple lorsque l'armature est légère).

La figure 12 montre l'influence du pourcentage d'armature du point de vue économique. Elle démontre clairement qu'il n'est pas avantageux d'admettre une armature supérieure à 4 à 6 %. La proportion la plus favorable est

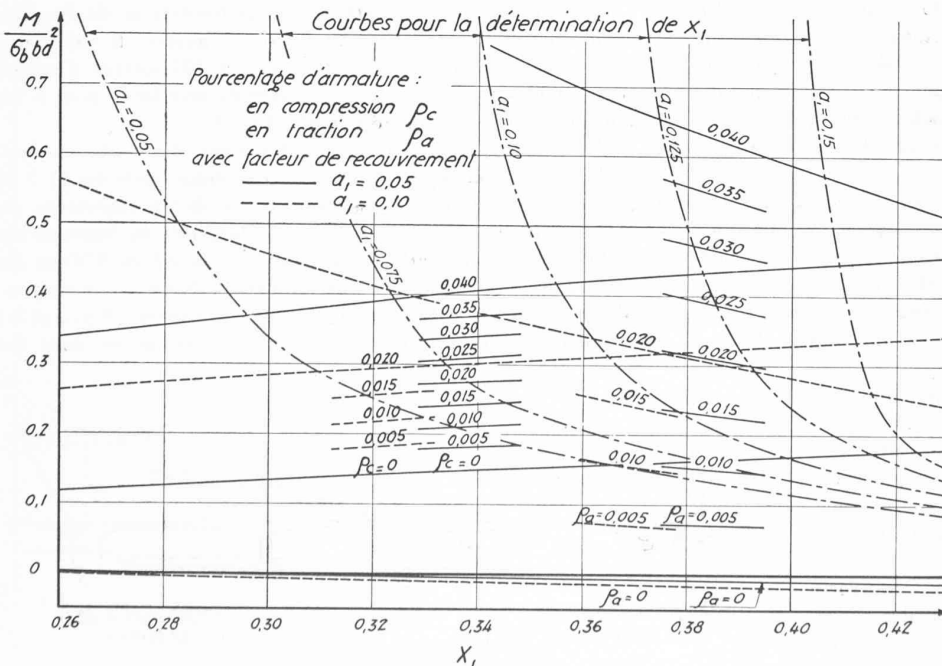


Fig. 11 b. — Flexion simple. Détermination de la position de l'axe neutre et de la quantité d'armature.

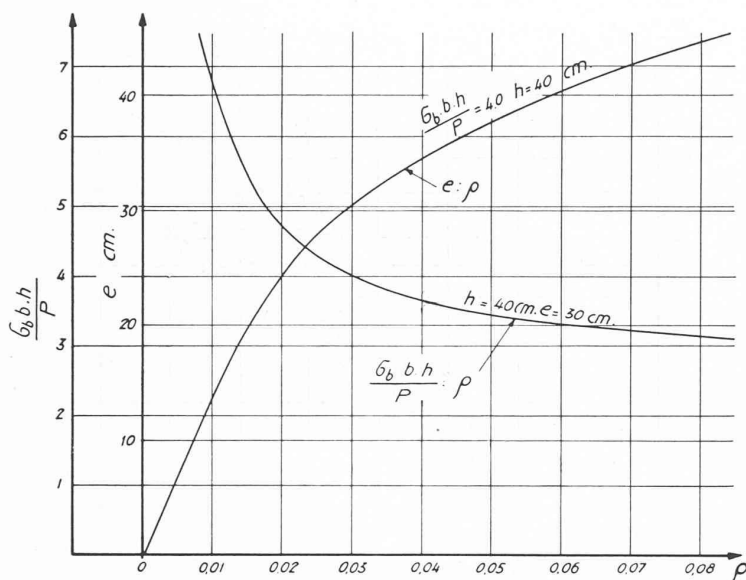


Fig. 12. — Influence du pourcentage d'armature.

inférieure à 3 %, tant au point de vue de la charge admissible qu'au point de vue de l'influence de l'excentricité de cette charge sur l'écrasement du béton.

Il est surprenant de constater qu'aucune solution exacte et maniable ne paraît exister. La solution qui consiste à disposer les armatures symétriquement est peu économique

sauf dans certains cas spéciaux. Une comparaison avec les méthodes empiriques basées sur le choix de la position de l'axe neutre ou sur une analyse sommaire qui néglige initialement l'armature comprimée montre que l'on peut réaliser une économie de 20 à 30 % relativement à ces méthodes.

Une variation du  $n$  (par exemple  $n = 15$ ) peut modifier les valeurs obtenues avec  $n = 10$ , de 5 à 10 %.

Nous signalons, pour terminer, que certains auteurs sont maintenant d'avis de calculer les éléments prismatiques à la rupture, d'après diverses théories de la plasticité. La présente analyse ne tient pas compte de cette nouvelle tendance, mais pourrait être sans doute aisément adaptée à ces conditions nouvelles.

#### BIBLIOGRAPHIE

- (1) Ing. P. PASTERNAK : « Schweizerische Bauzeitung » du 27 mai et 24 juin 1922.
- (2) Ing. E. FRAUENFELDER : « Schweizerische Bauzeitung » du 2 mai 1942.
- (3) H. DUMONTIER : *Calcul des armatures principales des pièces en béton armé de sections rectangulaires*, « Technique des travaux », vol. IV, p. 155 (fév. 1928).
- (4) T. P. O'SULLIVAN : *The economic design of reinforced concrete sections*, « Journal Inst. Civil Engineers », London (avril 1949) et Pitman (1950).
- (5) K. K. MCKELVEY : *Discussion sur le mémoire de T. P. O'Sullivan* (voir 4). « Journal Inst. Civil Engineers » (Oct., suppl. 1949).
- (6) T. P. O'SULLIVAN : *The economic proportion of steel in concrete sections doubly reinforced* « Journal Inst. Civil Engineers » (février 1939).

#### DIVERS

### Le premier pont en béton précontraint sur le Rhin

L'Union nationale des étudiants allemands, section génie civil, organisait du 6 au 19 octobre 1952, une Rencontre internationale des étudiants ingénieurs civils, sous forme d'un voyage en Allemagne et à Berlin. Le but de la rencontre était de donner l'occasion aux participants de divers pays de discuter des questions techniques et professionnelles ainsi que des problèmes politiques, et de fortifier par là les relations internationales des ingénieurs civils.

La visite de nombreux chantiers et usines a donné une idée de l'état actuel du relèvement allemand aux participants des quinze nations représentées. Nous publions ci-dessous une note qui nous a été remise par M. W. Knobel, cand. ing., délégué officiel, à cette manifestation, de la Délégation des étudiants de l'École polytechnique de l'Université de Lausanne. (Réd.)

Sur les chantiers de génie civil allemands, le travail se fait en général avec des moyens et des machines utilisés avant 1939. Le manque de capitaux ne permet pas aux entreprises de construction de renouveler un parc mécanique souvent usé ou démodé. On ne voit pour ainsi dire aucune nouvelle grosse machine.

Cependant les ingénieurs allemands arrivent à accélérer la reconstruction grâce à des solutions techniques d'avant-garde mises au point par quelques firmes spécialisées. Ainsi, dans le

domaine du bâtiment, l'emploi des coffrages glissants se généralise : nous avons vu un immeuble de dix étages dont tous les murs ont été élevés en huit jours seulement, grâce à ce système.

Dans le domaine de la précontrainte, l'un des plus intéressants chantiers que nous avons vus est à Worms. On y termine actuellement le premier pont en béton précontraint sur le Rhin.

Cet ouvrage est reconstruit sur les fondations de l'ancien pont métallique détruit à la fin de la guerre. Il comprend trois travées principales de 102, 114 et 104 mètres d'ouverture. A chaque extrémité une travée de rive lie le pont à un ancien viaduc de raccordement. (Fig. 1.)

Le tablier a une largeur de 14 mètres, dont 7,50 m sont réservés à la chaussée, 3 m aux deux pistes cyclables et 3 m aux deux trottoirs. Il constitue la membrure supérieure de deux poutres caissons de 2 m de largeur ; la hauteur de celles-ci étant variable entre 2,60 m à la clé et 6,50 m au droit des appuis. Les conduites d'eau et du gaz sont suspendues au tablier entre ces deux poutres caissons. (Fig. 2 et 5.)

Le pont est construit en porte-à-faux encastrés dans les

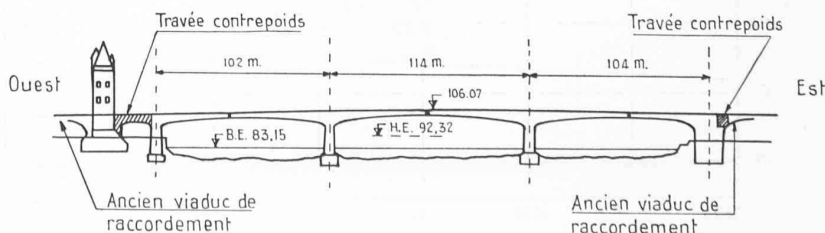


Fig. 1. — Vue générale.