

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 80 (1954)
Heft: 15

Artikel: Mouvement de rotation différenciée permanente d'un fluide
Autor: Baatard, François
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60716>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 04.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

Abonnements:
Suisse: 1 an, 24 francs
Etranger: 28 francs
Pour sociétaires:
Suisse: 1 an, 20 francs
Etranger: 25 francs
Prix du numéro: Fr. 1.40
Ch. post. « Bulletin technique de la Suisse romande »
N° II. 5775, à Lausanne.
Expédition
Imprimerie « La Concorde »
Terreaux 31 — Lausanne.
Rédaction
et éditions de la S. A. du
Bulletin technique (tirés à
part), Case Chaudron 475
Administration générale
Ch. de Rosneck 6 Lausanne

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitoux, architecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. P. Joye, professeur; † E. Lateltin, architecte — Vaud: MM. F. Chenaux, ingénieur; A. Chevalley, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. † L. Archinard, ingénieur; Cl. Groscurin, architecte; E. Martin, architecte; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. J. Dubuis, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chaudron 475, Lausanne.

Conseil d'administration
de la Société anonyme du Bulletin technique: A. Stucky, ingénieur, président;
M. Bridel; G. Epitoux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

Tarif des annonces

1/1 page	Fr. 264.—
1/2 »	» 134.40
1/4 »	» 67.20
1/8 »	» 33.60

Annonces Suisses S. A.
(ASSA)



Place Bel-Air 2. Tél. 22 33 26
Lausanne et succursales

SOMMAIRE: *Mouvement de rotation différenciée permanente d'un fluide*, par FRANÇOIS BAATARD, ingénieur E.P.U.L. — *Concours pour la construction d'un immeuble administratif à la place du Château à Nyon*. — Association amicale des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne: *Rapport du Comité sur l'exercice 1953*. — Association suisse des électriciens (ASE) et Union des centrales suisses d'électricité (UCS). — Société vaudoise des ingénieurs et des architectes: *Constitution du Comité*. — LES CONGRÈS: *Journées tripartites du bois; Irrigation et drainage; Deuxième exposition textile internationale; L'Automatisme des mesures*. — BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT. — DOCUMENTATION GÉNÉRALE. — NOUVEAUTÉS, INFORMATIONS DIVERSES.

MOUVEMENT DE ROTATION DIFFÉRENCIÉE PERMANENTE D'UN FLUIDE

par FRANÇOIS BAATARD, ingénieur E.P.U.L.

Un tel mouvement peut être représenté par une fonction aléatoire, le *vecteur aléatoire* plan de composantes:

$$X(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$Y(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$$

où a , b , a_1 , b_1 sont des constantes aléatoires et ω une pulsation certaine.

Cet exemple a été étudié par MM. Ph. Wehrlé, G. Dedebant et J. Bass. En février 1954, M. Philippe Wehrlé traitait du sujet, au cours de deux conférences organisées par l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne: « L'atmosphère source du Weltbild Aléatoire et de l'interprétation probabiliste correcte de l'irréversibilité ».

A titre d'illustration complémentaire de ce magistral exposé, nous discuterons l'exemple ci-dessus d'une fonction aléatoire qui permet de saisir le mécanisme du calcul aléatoire, au sens où l'entendent MM. Wehrlé et Dedebant, en rappelant préalablement quelques-unes des notions fondamentales qui sont à la base de la mécanique aléatoire.

1. Origine et nécessité d'une mécanique statistique des fluides

Tandis que l'idée statistique faisait son chemin en physique à travers la théorie cinétique des gaz (Max-

well, Boltzmann), la mécanique statistique (Gibbs), la théorie du mouvement brownien (Einstein, Smoluchowski) et la mécanique ondulatoire (L. de Broglie, Heisenberg, etc.), Navier, Boussinesq, Reynolds, Taylor, Gebelein, von Karman et Prandtl successivement, se rendaient compte de la nécessité de sortir la mécanique des fluides appliquée de son empirisme exagéré; il y avait entre l'hydrodynamique classique et l'hydraulique, notamment, une faille béante.

Dès 1930, et surtout après 1945, le calcul des probabilités s'est prodigieusement développé dans le sens de la *théorie des fonctions aléatoires* dont MM. Dedebant et Wehrlé sont parmi les premiers promoteurs. L'idée statistique est introduite à la base de la mécanique aléatoire (créée par ces deux auteurs), et non seulement dans l'interprétation des résultats. Ce corps de doctrine très général est susceptible d'éclairer d'une lumière nouvelle quantité de problèmes anciens (mécanique des fluides, thermodynamique et théories cinétiques, aérodynamique, météorologie, etc.) et nouveaux (astrophysique, particules élémentaires, structures de la matière, relativité restreinte, etc.). Ainsi les succès obtenus dans la technique moderne des télécommunications par l'usage de certains types de fonctions aléatoires (travaux de Norbert Wiener) sont retentissants. La mécanique aléatoire de MM. Dedebant et Wehrlé, nouveau langage, qui

permet une transcription du réel, des lois de prévision intéressantes et un pouvoir d'explication étendu, a vu le jour à la suite de l'examen expérimental de la *structure fine* des éléments météorologiques.

2. Genèse expérimentale du concept de fonction aléatoire

La structure fine des éléments météorologiques conduit à l'idée que les fonctions ordinaires, continues et dérivables de l'analyse, sont impropres à la représentation des phénomènes naturels. Un appareil de sensibilité insuffisante peut tracer, d'une vitesse U par exemple, une courbe; il ne s'ensuit pas, dans sa nature intime, continuité et dérivabilité. En effet, le phénomène change complètement avec l'échelle d'observation; le diagramme de la vitesse, avec un instrument opérant par pointés, apparaît sous la forme d'un *nuage de points*, que l'on ne peut plus relier entre eux. La fonction ainsi obtenue n'est pas intégrable au sens de Riemann (c'est-à-dire du type $\bar{U} = \int_{t-T}^{t+T} u(t) dt$ dans un

intervalle de période fondamentale $2T$), mais au sens de *Lebesgue*, soit de la manière suivante (voir fig. 1).

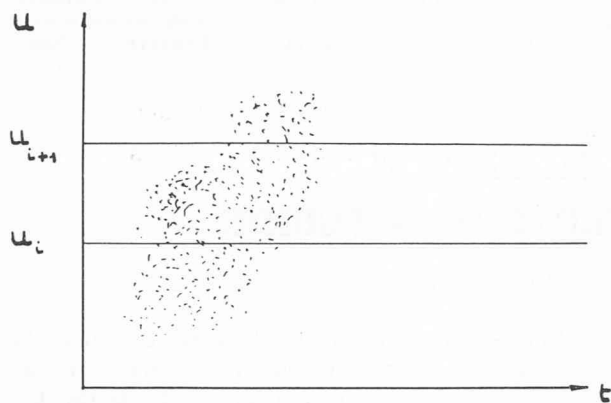


Fig. 1.

Puisque l'on ne peut pas retrouver l'ordre chronologique des points, nous traçons des bandes horizontales d'ordonnées u_i et u_{i+1} ; comptons le nombre n_i de points que chacune d'elles contient. $N = \sum n_i$ représente le nombre total des points du graphique; la valeur moyenne du nuage compris dans la zone $u_i < u'_i < u_{i+1}$ est, si n_i est le nombre des points d'ordonnées u'_i : $\frac{n_i}{N} u'_i = u'_i f_i$; (ce dénombrement peut se faire automatiquement par l'analyse au microphotomètre du noircissement d'une plaque impressionnée par un spot lumineux commandé par l'organe sensible). Pour l'ensemble du graphique, on obtient la *moyenne*:

$$\bar{u} = \sum \frac{n_i}{N} u'_i.$$

La limite de cette somme est l'intégrale de Lebesgue:

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} u f(u) du.$$

On peut l'interpréter en remarquant que $\frac{n_i}{N}$ représente la fréquence f_i de la vitesse $u_i < u'_i < u_{i+1}$, ou approximativement la probabilité pour que cette vitesse u'_i soit telle que $u_i < u'_i < u_i + du_i$. La courbe donnant les f_i en fonction des u_i représente une fonction $f(u)$ qui a le caractère d'une densité de probabilité.

Le temps t a disparu du processus d'intégration; aux moyennes de Riemann se substituent ainsi les moyennes stochastiques. Si, au cours de son évolution, une molécule (s'il s'agit d'un gaz, par exemple) passe successivement par des conditions cinématiques réalisées simultanément par l'ensemble des molécules à l'instant t , on dit que le principe ergodique est satisfait, et dans ce cas l'intégration se ramène à celle de Riemann.

Nous avons ébauché la genèse du concept de fonction aléatoire. Un nombre aléatoire est un nombre indéterminé susceptible de prendre une série de valeurs avec des probabilités données; si ce nombre dépend d'un indice ou d'un paramètre, il devient une variable aléatoire.

L'approfondissement de ce qui précède a conduit Dedebe et Wehrle à admettre que la vitesse n'est pas une fonction dérivable du temps et des coordonnées du lieu, mais une variable aléatoire fonction du temps et des coordonnées du lieu.

La vitesse d'ensemble du fluide est la valeur moyenne en chaque point de la vitesse aléatoire; elle est donnée par la fonction $f(u)$ ou explicitement

$$\bar{u} = \int u f(u; x, t) du.$$

3. Corrélation et moyennes liées

Supposons que U soit la vitesse du vent, vitesse dont la loi de probabilité est $f(u)$; elle dépend statistiquement de la direction selon une loi $g(\theta)$. Il existe entre U et θ une dépendance *stochastique* ou de *corrélation*, et non une relation fonctionnelle au sens ordinaire de l'analyse.

Dans une direction donnée θ , les vitesses u sont une fonction aléatoire; la distribution de u dépend de θ ; c'est une *probabilité liée* $h(u; \theta) du$ qui fournit la loi d'apparition de la vitesse entre des valeurs u et $u + du$ lorsque la valeur de θ est connue:

Probabilité de
($u < U < u + du$ pour $\theta = \theta$) = $h(u; \theta) du$.

La *probabilité conjuguée* d'apparition d'une vitesse U voisine de u en même temps qu'une direction voisine de $\theta = \theta$ est une loi $R(u, \theta)$:

probabilité conjuguée
et
simultanée de $\left\{ \begin{array}{l} u < U < u + du \\ \theta < \theta < \theta + d\theta \end{array} \right\} = R(u; \theta) du d\theta$.

Le théorème des probabilités composées de l'événement complexe $R(u, \theta)$ s'énonce: La probabilité de $R(u, \theta)$ est égale au produit de la probabilité de l'événement simple (θ) par la probabilité liée de l'événement (u) une fois connu le résultat de l'événement (θ). On l'écrit:

$$R(u, \theta) = g(\theta) \cdot h(u; \theta)$$

$R(u, \theta)$, satisfait aux conditions suivantes :

$$\int \int R(u, \theta) du d\theta = 1, \quad \int R(u, \theta) d\theta = f(u),$$

$$\int R(u, \theta) du = g(\theta)$$

cependant que la *moyenne liée* pour une direction donnée θ (qui n'est plus un nombre, mais une fonction de θ) est :

$$\overline{U}^1(\theta) = \int u h(u, \theta) du = \frac{1}{g(\theta)} \int u R(u, \theta) du =$$

$$= \frac{\int u R(u, \theta) du}{\int R(u, \theta) du}.$$

Si la répartition en probabilité de u est la même dans toutes les directions, la corrélation disparaît et $h(u; \theta) \rightarrow f(u)$.

Si les événements u et θ deviennent indépendants, la probabilité de l'événement complexe est le simple produit $R(u, \theta) = g(\theta) f(u)$. Deux événements peuvent aussi s'exclure mutuellement ; l'événement résultant de l'un ou de l'autre a pour probabilité la somme de leurs probabilités individuelles.

Dans l'exemple du mouvement de rotation différenciée d'un fluide, nous ferons usage de la loi $R(u, \theta) du d\theta$ et de moyennes liées $\overline{U}^1(\theta)$.

4. Etude du mouvement de rotation différenciée permanente d'un fluide

Nous voulons montrer qu'un tel mouvement peut être représenté par une fonction aléatoire, le *vecteur aléatoire* plan dont les composantes sont les deux oscillateurs harmoniques stationnaires :

$$X(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$Y(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$$

dans lequel a, b, a_1, b_1 , sont quatre constantes aléatoires dont la loi de probabilité conjuguée $R(a, b, a_1, b_1)$ suffit à résoudre tous les problèmes ; ω désigne une pulsation certaine.

La *permanence du mouvement* s'exprime par la *stationnarité* de la loi de probabilité conjuguée de $X, Y, \dot{X}, \dot{Y}$; elle s'obtient par le changement de variable, après dérivation de X et de Y (x et y se rapportant aux coordonnées, u et v aux vitesses) :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = x \cos \omega t - \frac{u}{\omega} \sin \omega t \\ b = x \sin \omega t + \frac{u}{\omega} \cos \omega t \\ a_1 = y \cos \omega t - \frac{v}{\omega} \sin \omega t \\ b_1 = y \sin \omega t + \frac{v}{\omega} \cos \omega t \end{array} \right.$$

R , fonction de a, b, a_1, b_1 est aussi fonction de la combinaison :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 (a^2 + b^2) = \omega^2 x^2 + u^2 \\ \omega^2 (a_1^2 + b_1^2) = \omega^2 y^2 + v^2 \\ \omega (ab_1 - a_1b) = vx - uy \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que R est de la forme stationnaire :

$$R(\omega^2 x^2 + u^2, \omega^2 y^2 + v^2, vx - uy).$$

Le rôle du mouvement circulaire en mécanique certaine est joué par celui de l'*isotropie* en mécanique aléatoire, c'est-à-dire que R ne dépend que de la forme du triangle construit sur les vecteurs (x, y) et (u, v) . R est par exemple une fonction du carré des longueurs des côtés et de leur produit vectoriel, soit de la forme :

$$R[\omega^2 (x^2 + y^2) + u^2 + v^2, vx - uy].$$

La mécanique aléatoire montre qu'au vecteur (X, Y) on peut associer les *équations du mouvement d'un fluide* dont la densité est la densité de probabilité conjuguée de (X, Y) et dont la vitesse est la moyenne liée du vecteur $(\dot{X}, \dot{Y})$ calculée pour une valeur fixée de (X, Y) ; les tensions régnant dans le fluide sont représentées par $-\rho \overline{U}_i' \overline{U}_k'$ et la densité de force extérieure par A_j .¹ Ces grandeurs sont reliées par l'*équation de transfert de la vitesse* :

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \sum_k \overline{U}_k \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} = A_j - \frac{1}{\rho} \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \overline{U}_i' \overline{U}_k').$$

Dans notre cas, nous devons donc former la loi liée :

$$\overline{U}^1 = \frac{\int R[\omega^2 (x^2 + y^2) + u^2 + v^2, vx - uy] u du dv}{\int R[\omega^2 (x^2 + y^2) + u^2 + v^2, vx - uy] du dv}.$$

Par l'intermédiaire des coordonnées polaires

$x = l \cos \theta, y = l \sin \theta$, en posant $u = \lambda \cos (\theta + \varphi)$ et $v = \lambda \sin (\theta + \varphi)$, on arrive à :

$$\overline{U}^1 = A(l) \cos \theta - B(l) \sin \theta$$

$$\overline{V}^1 = A(l) \sin \theta + B(l) \cos \theta$$

avec $A(l) = \frac{1}{\rho} \int \int R(\omega^2 l^2 + \lambda^2, \lambda l \sin \varphi) \lambda^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi$

$$B(l) = \frac{1}{\rho} \int \int R(\omega^2 l^2 + \lambda^2, \lambda l \sin \varphi) \lambda^2 \sin \varphi d\lambda d\varphi$$

$\rho(l)$ définissant la densité

$$\rho = \int \int R du dv = \int \int R(\omega^2 \lambda^2, \lambda l \sin \varphi) \lambda d\lambda d\varphi.$$

En intégrant par rapport à φ , on constate que $A(l) = 0$ et que par suite la cinématique du fluide est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{U}^1 = -B(l) \sin \theta \\ \overline{V}^1 = B(l) \cos \theta \end{array} \right.$$

Le mouvement des particules est fourni par l'intégration du système différentiel :

$$dt = \frac{dx}{\overline{U}^1} = \frac{dy}{\overline{V}^1}.$$

La vitesse en $M(x, y)$ ou $M(l, \theta)$ tel que $l = \overline{OM}$ ne dépend donc que de l .

Il s'agit donc d'un mouvement circulaire de centre O , de rayon l , parcouru à la vitesse $\frac{B(l)}{l}$, fonction de l , c'est-à-dire d'un *mouvement de rotation différenciée permanente*, les couches glissant les unes par rapport aux autres.

¹ Les indices ' se rapportent aux vecteurs représentatifs de la fluctuation. $\dot{X}, \dot{Y}$ désignent les dérivées temporelles de X et de Y .

Nous n'avons pas donné de forme particulière à R . Supposons maintenant que R soit une loi de Gauss :

$$R = \frac{\omega}{4\pi s^2(1-r^2)} \exp \left\{ P \right\} \text{ où } P = \left\{ -\frac{1}{2s^2(1-r^2)} \left[\omega^2(x^2+y^2) + u^2 + v^2 + 2r\omega(vx-uy) \right] \right\}.$$

On trouve les moments du deuxième ordre :

$$\overline{U^2} = \overline{V^2} = \omega^2 \overline{X^2} = \omega^2 \overline{Y^2} = S^2$$

$$\overline{XY} = \overline{XU} = \overline{YV} = \overline{UV} = 0$$

$$\overline{UY} = -\overline{VX} = \frac{r}{\omega} S^2$$

où r est le coefficient de corrélation, dont le rôle est essentiel puisque le mouvement dépend de lui ; en effet, les relations :

$$\overline{U^1} = r\omega y \text{ et } \overline{V^1} = -r\omega x$$

caractérisent un mouvement de rotation d'ensemble de vitesse $r\omega$ tel que sa densité à la distance l soit :

$$\rho = \frac{\omega^2}{2\pi S^2} e^{-\frac{\omega^2 l^2}{2S^2}}$$

La loi de probabilité liée de U' et de V' permet le calcul des tensions, réduites ici à la pression $\rho S^2(1-r^2)$, cependant que la température du fluide est $S^2(1-r^2)$.

Si le coefficient de corrélation est nul, $r=0$, le fluide est immobile.

On pourrait choisir pour R une loi autre que celle de Gauss, qui décrirait d'autres conditions de mouvement.

BIBLIOGRAPHIE¹

G. DEDEBANT et PH. WEHRLÉ : *Mécanique aléatoire*. Portugaliae Physica. Vol. 1. 1944.

J. BASS : *Applications de la mécanique aléatoire à l'hydrodynamique et à la mécanique quantique*. Publication du Ministère de l'Air. 1949.

FRANÇOIS BAATARD : *La mécanique aléatoire et le problème de la turbulence*. Publication n° 6 de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et de la Station centrale suisse de Météorologie.

¹ Voir également les ouvrages *Théorie des fonctions aléatoires* et *Le calcul statistique des systèmes asservis* dont les comptes rendus sont donnés par ailleurs au présent numéro. (Réd.)

CONCOURS

POUR LA CONSTRUCTION D'UN IMMEUBLE ADMINISTRATIF A LA PLACE DU CHÂTEAU A NYON¹

Extrait du règlement

En janvier 1953, la Municipalité de Nyon ouvrit un concours de projets en vue de la construction d'un immeuble administratif à la place du Château.

Ce concours était ouvert aux architectes de nationalité suisse propriétaires d'un bureau dans le canton.

Le jury chargé d'examiner les projets était composé de la façon suivante : M. H. Mayor, municipal, président ; MM. J. Falconnier, architecte, à Nyon ; Ch. Thévenaz, architecte, à Lausanne ; Alex. Pilet, architecte, à Lausanne ; E. Pelichet, archéologue cantonal, à Nyon. Suppléants : MM. E. d'Okolski, architecte, à Lausanne et A. Michaud, municipal, à Nyon.

Une somme de 7500 fr. était mise à la disposition du jury pour être attribuée aux auteurs des trois ou quatre meilleurs projets.

Les concurrents avaient à fournir : un plan de situation ; les plans, coupes et façades du bâtiment ; le tout à l'échelle du 1 : 100 ; une perspective et un court mémoire.

Le programme précisait notamment que le bâtiment comprendrait divers locaux pour les Services industriels, des bureaux administratifs et des appartements, des Services généraux ; il en donnait l'énumération par étage et les surfaces.

Il était indiqué en outre que le bâtiment projeté se trouvait dans la zone de « l'ancienne ville » d'où il résultait l'obligation de satisfaire à certaines clauses du règlement communal sur la police des constructions ; clauses dont les principales étaient mentionnées.

¹ Publication retardée par suite de circonstances indépendantes de notre volonté (Réd.)

Extrait du rapport du jury

Le jury s'est réuni les 8 et 9 juin 1953, à Nyon. Vingt-huit projets avaient été remis dans les délais requis.

Sont éliminés au premier tour neuf projets ne présentant pas les qualités suffisantes pour justifier un examen plus approfondi.

Au deuxième tour, huit projets, présentant certaines qualités, mais ayant d'autre part de graves défauts, sont écartés.

Au troisième tour, les projets restants faisaient l'objet d'une étude plus approfondie et d'une critique détaillée individuelle ; six concurrents sont éliminés.

Le jury procède ensuite à une révision générale des projets éliminés aux premier, deuxième et troisième tours. Son jugement n'est pas modifié.

Restaient alors en présence cinq projets qui font l'objet d'appréciations détaillées et que le jury classe ensuite dans l'ordre suivant : projet « Vieux Nyon », projet « Nyon », projet « Lancaster », projet « 14 avril », projet « Poisson de Nyon ». Il décide en outre d'attribuer quatre prix de 2300 fr., 2100 fr., 1900 fr. et 1200 fr.

Après avoir constaté que les qualités du projet classé au premier rang justifiaient de confier à son auteur l'étude des plans définitifs et la direction des travaux et après avoir achevé et signé son rapport, le jury procède à l'ouverture des enveloppes qui révèle les noms des auteurs primés :

1^{er} prix, M. David Petter, architecte, à Orbe.

2^e prix, M. Humbert Rossetti, architecte, à Lausanne

3^e prix, M. Eugène Mamin, architecte, à Lausanne.

4^e prix, M. Georges Jaunin, architecte, à Lausanne.