

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 80 (1954)
Heft: 17

Artikel: Le calcul simplifié des voûtes autoportantes longues
Autor: Strauss, Ernest E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60718>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 04.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

Abonnements :
Suisse: 1 an, 24 francs
Etranger: 28 francs
Pour sociétaires:
Suisse: 1 an, 20 francs
Etranger: 25 francs
Prix du numéro: Fr. 1.40
Ch. post. « Bulletin technique de la Suisse romande »
N° II. 5775, à Lausanne.
Expédition
Imprimerie « La Concorde »
Terreaux 31 — Lausanne.
Rédaction
et éditions de la S. A. du
Bulletin technique (tirés à
part), Case Chaudron 475
Administration générale
Ch. de Rosneck 6 Lausanne

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitoux, architecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. P. Joye, professeur; † E. Lateltin, architecte — Vaud: MM. F. Chenaux, ingénieur; A. Chevalley, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. † L. Archinard, ingénieur; Cl. Grosгурin, architecte; E. Martin, architecte; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. J. Dubuis, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chaudron 475, Lausanne.

Conseil d'administration

de la Société anonyme du Bulletin technique: A. Stucky, ingénieur, président; M. Bridel; G. Epitoux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

Tarif des annonces

1/1 page	Fr. 264.—
1/2 »	» 134.40
1/4 »	» 67.20
1/8 »	» 33.60

Annonces Suisses S. A.
(ASSA)



Place Bel-Air 2. Tél. 22 33 26
Lausanne et succursales

SOMMAIRE : *Le calcul simplifié des voûtes autoportantes longues*, par ERNEST E. STRAUSS, ingénieur EPUL, D^r ès sciences techniques, Baden. — *Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale (G.E.P.)*. — **LES CONGRÈS :** *The Institute of Metals*; *Journées internationales de la navigation rhénane*; *Journées de génie chimique*. — **BIBLIOGRAPHIE.** — **SERVICE DE PLACEMENT.** — **DOCUMENTATION GÉNÉRALE.** — **NOUVEAUTÉS, INFORMATIONS DIVERSES.**

LE CALCUL SIMPLIFIÉ DES VÔUTES AUTOPORTANTES LONGUES

par ERNEST E. STRAUSS, ingénieur EPUL, docteur ès sciences techniques, Baden

Introduction

L'article suivant traite du calcul statique des voûtes autoportantes longues. Il montre qu'il est possible, en partant d'une méthode de calcul connue, d'établir des formules explicites et des tableaux graphiques donnant les principaux efforts intérieurs. Les résultats du calcul seront ensuite comparés aux résultats d'un essai sur modèle, ce qui permet d'en contrôler la validité et l'exactitude.

1. Définitions

On appelle voûte autoportante une coque de forme cylindrique, reposant sur des appuis localisés, généralement situés aux extrémités de l'élément de cylindre. Si les bords de la voûte ne sont soumis à aucune liaison, on dit que la voûte autoportante est isolée (fig. 2 a). Si les voûtes autoportantes se succèdent en étant reliées sur leurs bords, on a des voûtes autoportantes multiples.

La naissance des voûtes est parfois renforcée par un élément vertical, courant sur la longueur totale de la voûte, appelé poutre de retombée ou poutre de bord (fig. 2 c et 2 d).

La voûte autoportante doit être munie de 2 diaphragmes transversaux dans le plan vertical des appuis, destinés à garantir la configuration de l'ouvrage.

Ces diaphragmes, pleins ou évidés, sont appelés tympan. Si la voûte possède plus de deux tympan appuyés, on dit qu'elle est continue. Une voûte autoportante est dite longue si la distance entre tympan appuyés est un multiple de l'ouverture. Si cette distance est

Fig. 1.
Voûte autoportante.

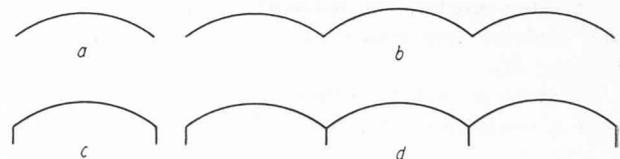
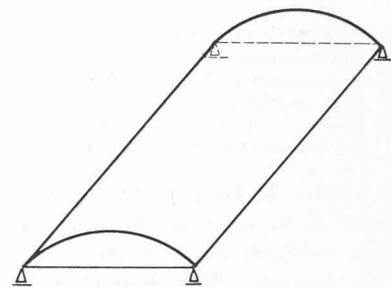


Fig. 2.

du même ordre de grandeur que l'ouverture, on dit que la voûte est courte.

2. Les forces en jeu

Les efforts intérieurs agissant sur un élément cylindrique de voûte autoportante sont rappelés dans la figure 3.

Les six équations d'équilibre ne suffisent pas pour déterminer les dix efforts intérieurs inconnus. La voûte autoportante est donc intérieurement hyperstatique. On peut alors procéder de deux manières : ou bien résoudre le problème directement en tenant compte de tous les efforts intérieurs, ou bien choisir un système principal, isostatique, que l'on peut calculer, et auquel on applique les perturbations hyperstatiques, à titre de correction ; ces deux manières de procéder conduisent à deux méthodes de calcul. La première a déjà été exposée ici même¹. On n'y reviendra donc pas. La deuxième, appelée « méthode de la poutre », servira de base aux développements qui vont suivre.

3. Exposé de la méthode de la poutre

Cette méthode, due principalement à Lundgren², assimile la voûte longue, isolée, à une poutre librement appuyée à ses deux bouts. Il s'ensuit que les notions d'efforts intérieurs d'une poutre, moment fléchissant et effort tranchant, doivent se retrouver dans les sections des voûtes autoportantes, et moyennant certaines hypothèses, il est possible de déterminer la distribution et la valeur des contraintes agissant dans la section. On obtient alors une première approximation déjà satisfaisante, qu'on utilise, le cas échéant, sans correction dans les voûtes très longs, symétriques de forme et de charge.

Pour le calcul, on introduit les hypothèses suivantes :

1. Les sections droites de la voûte restent planes après déformation.
2. Les moments $M_x, M_{x\varphi}, M_{\varphi x}$ sont très petits et peuvent être négligés.
3. Il en est de même des déformations dues à $N_{x\varphi}$.
4. La contraction transversale v est supposée nulle.

Il résulte de l'hypothèse 1 pour la flexion simple la validité de la règle de Navier. L'hypothèse 2 montre que la méthode de la poutre n'est applicable qu'aux voûtes longues, dans lesquelles la transmission des efforts dans le sens longitudinal ne se fait pas par effet de plaque ($M_x = 0, Q_x = 0$). En revanche, dans les voûtes courtes, ces moments de plaque prennent une certaine importance et il n'est plus permis de négliger M_x .

En vertu de cette hypothèse, seuls les efforts suivants sont à considérer : $N_x, N_{x\varphi} = N_{\varphi x}, M_{\varphi}, Q_{\varphi}, N_{\varphi}$. On

¹ A. Paris : Les voûtes cylindriques autoportantes, B.T.S.R. 1941.
² Lundgren : Cylindrical Shells, Copenhague 1949.

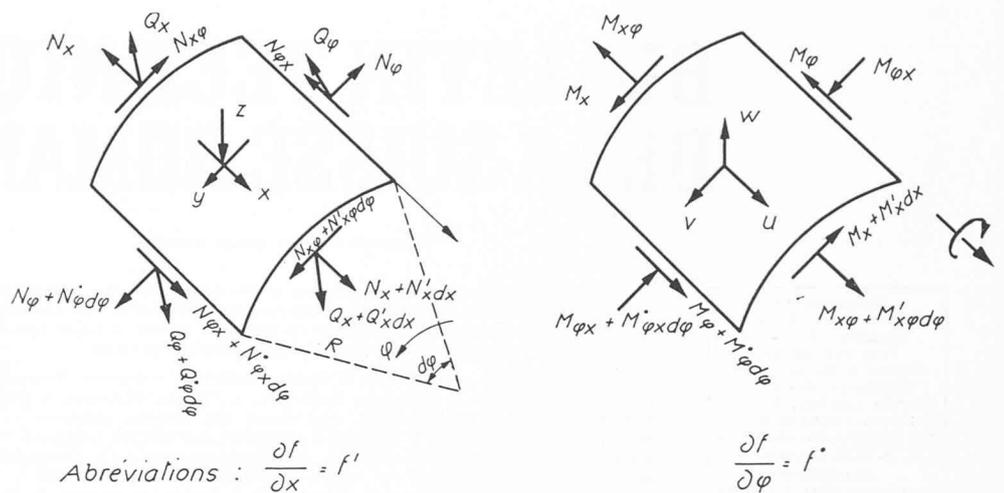


Fig. 3.

convient d'appeler efforts de poutres $N_x, N_{x\varphi}$ et $N_{\varphi x}$, et efforts d'arc M_{φ}, Q_{φ} et N_{φ} .

a) Efforts de poutre

Assimilée à une poutre, la voûte subit une flexion dans le plan vertical longitudinal. Les contraintes normales σ_x dans la direction des génératrices ont alors la valeur

$$\sigma_x = \frac{M}{I_y} z$$

où M est le moment total agissant dans la section x de la voûte. Il est égal au moment provoqué par la charge p dans une poutre qui aurait la même longueur que la voûte autoportante. I_y est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe y passant par son centre de gravité.

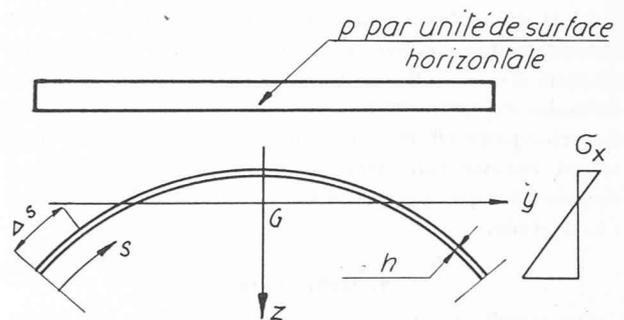


Fig. 4.

On peut aussi définir un effort normal N_x

$$N_x = \sigma_x h = h \frac{M}{I_y} z \tag{5}$$

La résultante axiale sur un arc de voûte de longueur s est donnée par

$$\int_0^s N_x ds = \frac{M}{I_y} \int_0^s h z ds = \frac{M}{I_y} S_y(s)$$

où S_y est le moment statique de l'élément de section, compris entre o et s , par rapport à l'axe y . Le moment

M varie avec la position de la section droite de la voûte, par conséquent il en est de même pour l'effort N_x . Si on considère deux sections droites distantes de dx , la différence des efforts N_x a la valeur

$$\frac{dM}{dx} \frac{S_y(s)}{I_y} dx = T \frac{S_y(s)}{I_y} dx \quad (5')$$

où T désigne l'effort tranchant total dans la section x de la voûte autoportante. L'effort (5') est équilibré par les efforts tangentiels agissant dans les sections parallèles aux génératrices, qui ont donc la valeur

$$N_{\varphi x} = \frac{T}{I_y} S_y(s) \quad (6)$$

La formule 6 montre que l'effort tangentiel le long du méridien est proportionnel au moment statique de la partie de section limitée par le parallèle considéré. Il l'est aussi à l'effort tranchant. On peut montrer que les projections verticales de cet effort tangentiel varient comme les contraintes tangentielles sur les sections d'une poutre rectangulaire.

b) Efforts d'arc

Si on découpe un arc de largeur dx , on voit qu'il est soumis, en plus des charges extérieures directement appliquées, à la différence entre les efforts tangentiels N_{φ} à gauche et à droite, dont la résultante est

$$N'_{\varphi} = N'_{\varphi x} = \frac{P}{I_y} S_y(s) \quad (7)$$

L'effort N'_{φ} doit être considéré comme une charge dirigée suivant la tangente de l'arc de largeur dx . Celui-ci est alors en équilibre sous l'influence de N'_{φ} et de la charge extérieure p et peut être calculé d'après les règles de la statique. On trouvera ainsi l'effort N_{φ} , le moment M_{φ} et l'effort tranchant Q_{φ} sous forme d'intégrales, dont la résolution se fait par différences finies.

4. Le dimensionnement des voûtes autoportantes

En partant de la méthode générale de Lundgren, telle qu'elle a été exposée au paragraphe précédent, on peut développer des formules explicites et des

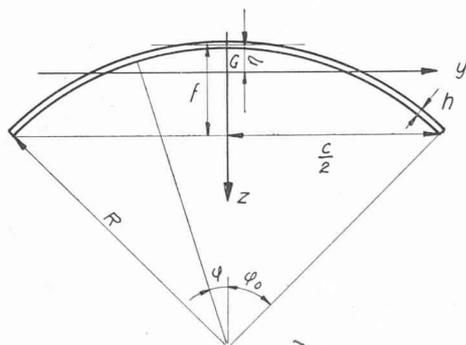


Fig. 6.

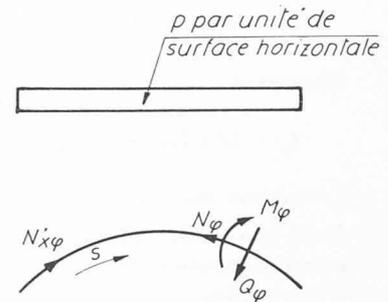


Fig. 5.

graphiques propres à guider le choix vers des solutions avantageuses.

a) Formules de base

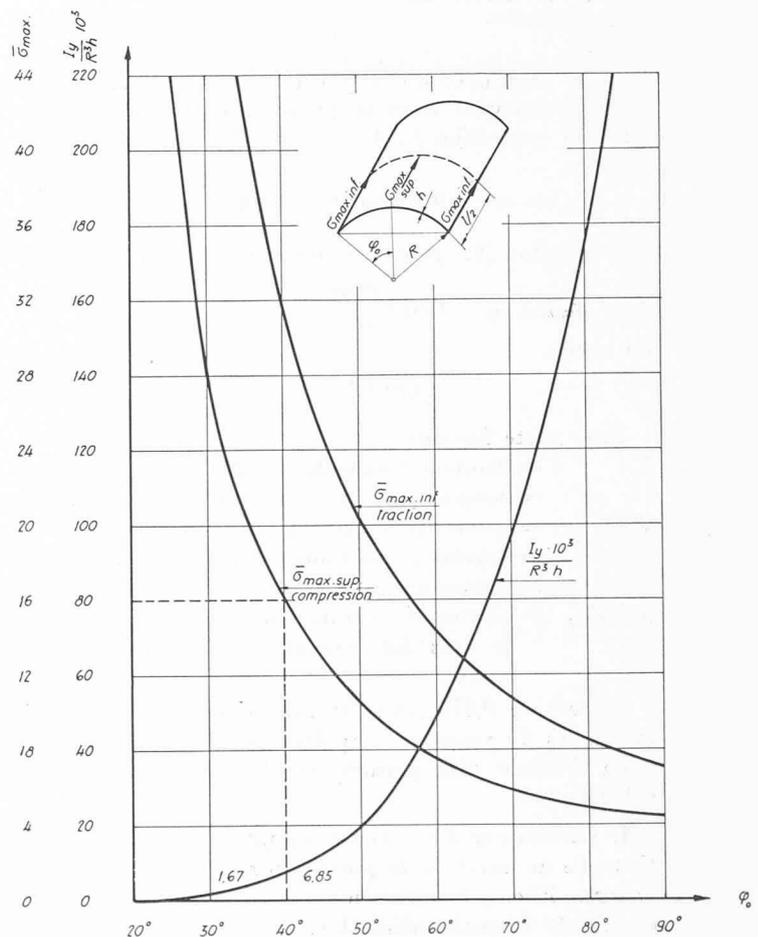
Les calculs suivants traitent le cas des voûtes autoportantes longues, symétriques, appuyées librement et soumises à des charges uniformément réparties sur la totalité de leur surface développée.

Pour une voûte de forme circulaire, on peut établir les formules suivantes :

$$\eta = R \left(1 - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right) \quad (8)$$

Moment statique par rapport à l'axe passant par le centre de gravité de la section :

GRAPHIQUE 1
Voûtes autoportantes circulaires



$$S_y(s) = R^2 h \left(\sin \varphi - \varphi \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right) \quad (9)$$

Moment d'inertie par rapport au même axe :

$$I_y = R^3 h \left(\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - 2 \frac{\sin^2 \varphi_0}{\varphi_0} + \varphi_0 \right) \quad (10)$$

Contraintes maxima

Dans une section droite de la voûte, les contraintes maxima se produisent sur les fibres les plus éloignées de l'axe neutre.

Les plus grandes contraintes prennent naissance au milieu de la voûte, où le moment M est maximum. Elles ont les valeurs suivantes sous l'effet du poids propre et d'une surcharge uniformément répartie sur la surface développée :

Fibre supérieure :

$$\sigma_{x, max} \frac{h}{\gamma h + q} \left(\frac{8 R}{l^2} \right) = \varphi_0 \frac{2h R^2 \eta}{I_y} = \bar{\sigma}_{max, sup} \quad (11)$$

Fibre inférieure :

$$\sigma_{x, max} \frac{h}{\gamma h + q} \left(\frac{8 R}{l^2} \right) = \varphi_0 \frac{2h R^2}{I_y} (f - \eta) = \bar{\sigma}_{max, inf} \quad (11')$$

En remplaçant les expressions de f , η et I_y dans les équations (11), on peut exprimer $\bar{\sigma}_{max}$ en fonction de φ_0 (graphique 1). Ce graphique permet alors d'obtenir directement le profil de voûte autoportante offrant la résistance désirée. Le calcul d'un tel profil conduirait à des tâtonnements, car il demanderait la résolution des 3 équations (8), (10) et (11). L'emploi du graphique 1 épargne ce travail progressif.

Un exemple d'application du graphique 1 est donné dans l'annexe.

b) *Influence de la hauteur du profil sur les contraintes σ_x*

En remplaçant dans la première partie de (11) R par son expression $f : (1 - \cos \varphi_0)$ (fig. 6), on trouve

$$\sigma_{x, max, sup} = \bar{\sigma}_{max, sup} (1 - \cos \varphi_0) \frac{\gamma h + q}{8 h} \frac{l^2}{f} \quad (12)$$

L'équation (12) peut être mise sous une autre forme

$$\sigma_{x, max, sup} = 0,473 \frac{l^2}{f} \frac{\gamma h + q}{h}$$

ou encore

$$f = 0,473 \frac{\gamma h + q}{h} \frac{l^2}{\sigma_{x, max, sup}} \quad (13)$$

Dans cette formule

- f = hauteur totale du profil
- l = longueur de la voûte autoportante
- γ = poids spécifique du matériau
- q = surcharge par unité de surface de la voûte
- h = épaisseur de la voûte
- $\sigma_{x, max, sup}$ = contrainte normale de compression dans le sens des génératrices au milieu de la voûte.

Le facteur 0,473 provient des expressions trigonométriques du rapport $I_y : \eta$ dans la formule (11).

La formule (13) permet de tirer les conclusions suivantes :

1. La hauteur d'une voûte autoportante est proportionnelle au carré de la portée entre tympans et à la charge. Elle est inversement proportionnelle à la contrainte normale admissible.

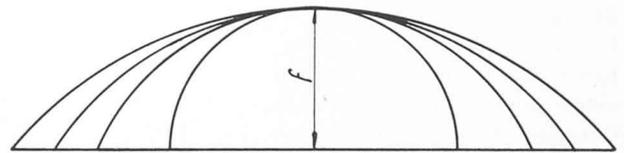


Fig. 7.

2. Elle ne dépend pas de la largeur de la voûte. Il en résulte que toutes les voûtes de la figure 7 ont les mêmes contraintes extrêmes.

c) *Influence du degré d'ouverture de la voûte*

Le degré d'ouverture de la voûte est caractérisé par l'angle d'ouverture φ_0 . Si le rayon est donné, l'ouverture de la voûte, c'est-à-dire la corde c , est également définie.

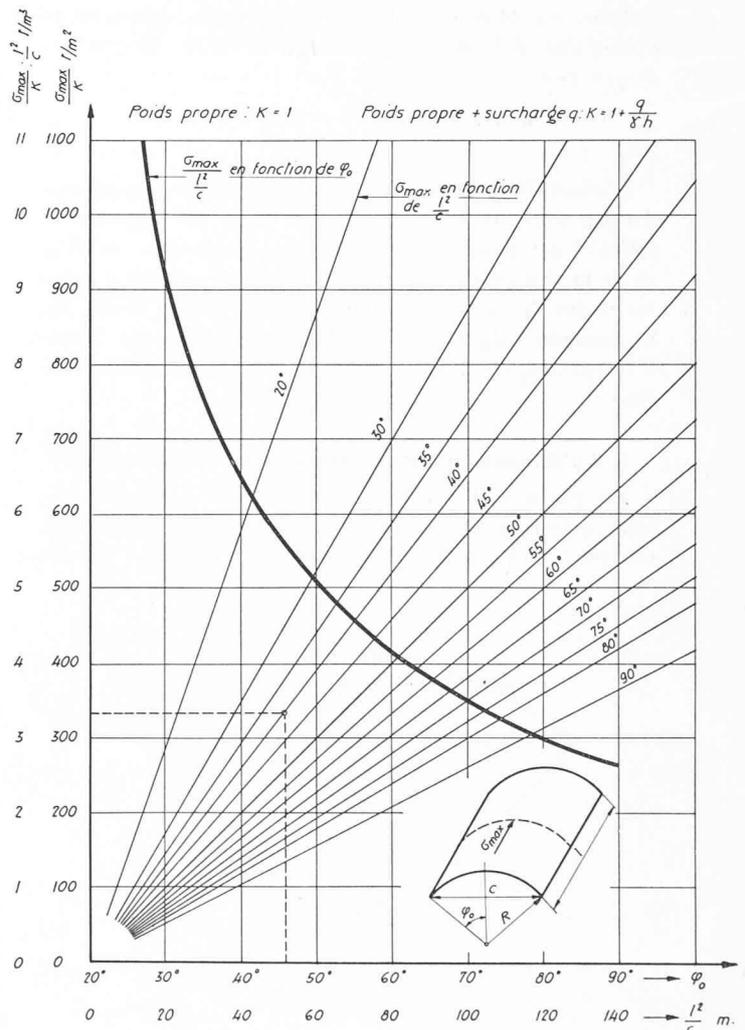
$$c = 2R \sin \varphi_0$$

En remplaçant dans (11) on trouve

$$\sigma_{x, max} = \bar{\sigma}_{max} \left(1 + \frac{q}{\gamma h} \right) 0,625 \sin \varphi_0 \frac{l^2}{c} \quad (14)$$

Sur le graphique 2, on a tracé les courbes

GRAPHIQUE 2
Voûtes autoportantes circulaires
Influence de $\frac{l^2}{c}$ sur σ_{max}



$\sigma_{x, max}$ en fonction de $\frac{l^2}{c}$ pour plusieurs valeurs de φ_0 .

$\frac{\sigma_{x, max}}{\frac{l^2}{c}}$ en fonction de φ_0 .

Les graphiques sont établis dans l'hypothèse que le poids propre seul intervient, en admettant que le poids spécifique γ du béton armé est de 2,5 t/m³.

Pour trouver l'influence cumulée du poids propre et d'une surcharge répartie q , il suffit de multiplier σ par

$$\text{le facteur } \left(1 + \frac{q}{\gamma h}\right).$$

Applications du graphique 2 :

On suppose $\sigma_{x, max}$ et l données.

1. La largeur est fixée. On détermine $\frac{l^2}{c}$ et la courbe donne directement l'angle φ_0 , pour lequel le σ_{max} imposé est en concordance avec la formule (13).

2. On fixe l'angle φ_0 . La connaissance de σ_{max} permet alors de trouver la largeur du profil.

Un exemple d'application du graphique 2 est donné dans l'annexe.

d) *Contraintes tangentielles*

L'effort $N_{\varphi x}$, défini par l'équation (6), est la résultante des contraintes tangentielles

$$\mathcal{T}_{\varphi x} = \frac{N_{\varphi x}}{h} = \frac{T}{I_y h} S_y (s)$$

Sur une section droite, ces contraintes sont maxima sur l'axe neutre. Le long de la voûte, ce maximum est le plus grand au voisinage des tympans d'extrémité. Pour une voûte circulaire soumise à son poids propre et à une surcharge q , on peut établir l'expression donnant la contrainte \mathcal{T}_{max} .

$$T_{max} = p l : 2 = l \varphi_0 R (\gamma h + q)$$

$$\mathcal{T}_{max} = \frac{\gamma h + q}{h} l \varphi_0 \frac{\sin \varphi_1 - \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{2 \sin^2 \varphi_0}{\varphi_0} + \varphi_0} \quad (15)$$

L'angle d'ouverture φ_1 définissant la position de l'axe neutre est lié à φ_0 par la relation

$$\cos \varphi_1 = \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}$$

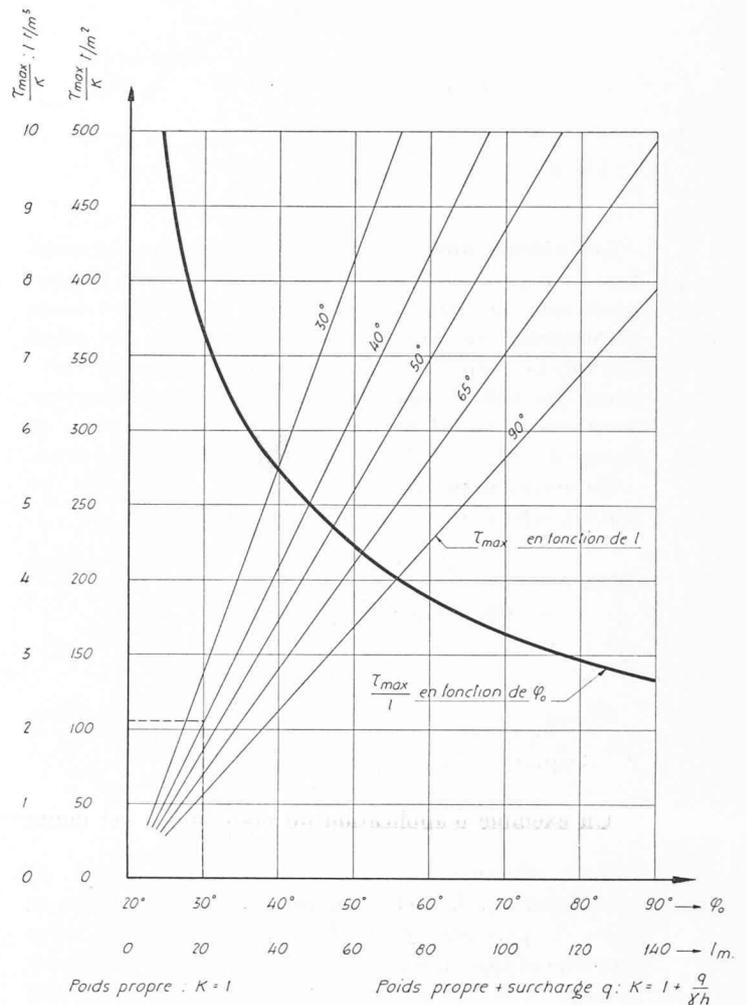
On a reporté sur le graphique 3 les courbes \mathcal{T}_{max} en fonction de l pour plusieurs valeurs de φ_0 .
 $\frac{\mathcal{T}_{max}}{l}$ en fonction de φ_0 .

Ce graphique permet de déterminer si, pour une portée de voûte donnée, l'angle φ_0 est choisi de telle manière que la contrainte \mathcal{T}_{max} ne dépasse pas les valeurs admissibles.

L'effet cumulé d'une surcharge q s'obtient en multipliant \mathcal{T}_{max} par le facteur $\left(1 + \frac{q}{\gamma h}\right)$.

Un exemple d'application du graphique 3 est donné dans l'annexe.

GRAPHIQUE 3
Voûtes autoportantes circulaires
Influence de l sur \mathcal{T}_{max}



5. Le calcul des efforts d'arc

a) *Voûtes isolées*

Les intégrales donnant les efforts d'arc N_{φ} , Q_{φ} et M_{φ} peuvent être mis sous une forme permettant une résolution analytique.

$$N_{\varphi}(s) = + \cos \varphi \int_0^s N'_{x\varphi} \cos \varphi ds + \sin \varphi \int_0^s N'_{x\varphi} \sin \varphi ds - \sin \varphi \int_0^s (\gamma h + q) ds \quad (16)$$

$$Q_{\varphi}(s) = + \sin \varphi \int_0^s N'_{x\varphi} \cos \varphi ds - \cos \varphi \int_0^s N'_{x\varphi} \sin \varphi ds + \cos \varphi \int_0^s (\gamma h + q) ds \quad (17)$$

$$M_{\varphi}(s) = - \int_0^s \sin \varphi \left(\int_0^s N'_{x\varphi} \cos \varphi ds \right) ds + \int_0^s \cos \varphi \left(\int_0^s N'_{x\varphi} \sin \varphi ds \right) ds - \int_0^s \cos \varphi \left(\int_0^s (\gamma h + q) ds \right) ds \quad (18)$$

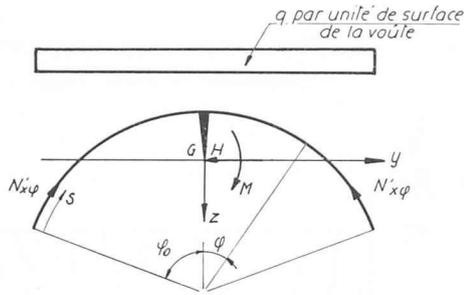


Fig. 8.

Les valeurs ainsi obtenues sont celles qui agissent dans la région centrale d'une voûte autoportante longue, symétrique, à directrice circulaire, sous une charge uniformément répartie sur sa surface entière. Le calcul suivant ne s'applique donc pas aux panneaux extérieurs des voûtes multiples qui subissent un encastrement unilatéral. Il ne prévoit pas non plus le cas de charge de neige d'un panneau ou d'une gondole sur deux.

En introduisant les valeurs de (7), (9) et (10), on obtient, après résolution des équations (16) et (18)

$$N_{\varphi max} = \frac{2(\gamma h + q) R \varphi_0}{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{2 \sin^2 \varphi_0}{\varphi_0} + \varphi_0} \left[\frac{\sin^2 \varphi_0}{2} - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} (1 - \cos \varphi_0) \right]$$

$$\frac{M_{\varphi max}}{(\gamma h + q) R^2} = \frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{2 \sin^2 \varphi_0}{\varphi_0} + \varphi_0} \left[\left(2 - 2 \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} (1 - \cos \varphi_0) + \sin^2 \varphi_0 - \varphi_0 \sin \varphi_0 \right) - (1 - \cos \varphi_0) \right]$$

Pour effectuer ces calculs, il est avantageux de développer S_y , I_y et les fonctions trigonométriques en séries de puissance de φ . Ces séries convergent assez rapidement tant que $\varphi_0 < 1$. Il faut cependant remarquer qu'à partir de 58° , $\varphi_0 > 1$. Les formules données ci-contre ne seront alors plus assez précises. Ceci ne restreint d'ailleurs pas beaucoup leur valeur, puisqu'en pratique la valeur de 40° n'est guère dépassée.

Pour illustrer la rapidité de convergence des séries employées, on a réuni au tableau 1 ci-dessous les valeurs exactes et les valeurs données par les séries du moment d'inertie I_y , de l'effort N_φ et du moment M_φ à la clé de la voûte. Le moment d'inertie a été calculé au moyen des formules (10) et (20), N_φ et M_φ d'après (26') et (25).

On pose $I_y^* = 10^3 I_y : R^3 h$ $N^* = N_\varphi : (\gamma h + q) R$
 $M^* = M_\varphi : (\gamma h + q) R^2 10^3$

Comparaison entre valeurs exactes (1) et valeurs données par séries (2)

φ_0	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
I_y^*	0,23	1,67	6,85	20,12	47,8	96,4	177,8	298,3
I_y^*	0,23	1,67	6,85	20,06	47,0	94,6	170,6	273,2
D%	0,0	0,0	0,0	-0,3	-1,7	-1,9	-4,0	-9,2
$N_{\varphi 1}^*$	1,82	1,83	1,83	1,73	1,68	1,64	1,54	1,44
$N_{\varphi 2}^*$	1,80	1,80	1,80	1,80	1,80	1,80	1,80	1,80
D%	-1,2	-1,7	-1,7	+4,1	+7,2	+9,7	+16,8	+24,8
$M_{\varphi 1}^*$		48,8	79,3	113,5	147	164	183	167
$M_{\varphi 2}^*$		47,6	80,0	113	142	157	159	124
D%		-2,5	+1,2	-0,4	-3,5	-4,5	-15	-34,7

Tableau 1

Le développement en séries de puissances des formules (7), (9) et (10) fournit les expressions suivantes :

$$S_y(s) = R^2 h \left(\frac{\varphi \varphi_0^2}{6} - \frac{\varphi^3}{6} \right) \tag{19}$$

$$I_y = R^3 h \frac{2 \varphi_0^5}{45} \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{7} \right) \tag{20}$$

$$N_{x\varphi} = \frac{45(\gamma h + q)}{\varphi_0^4} \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{7} \right) \left(\frac{\varphi \varphi_0^2}{6} - \frac{\varphi^3}{6} \right) \tag{21}$$

En effectuant le calcul indiqué dans les équations (16-18), on trouve

$$N_\varphi = - \frac{(\gamma h + q) R}{1008 \varphi_0^4} (1890 \varphi_0^4 - 3780 \varphi^2 \varphi_0^2 - 171 \varphi_0^6 + 1890 \varphi^4 - 126 \varphi^6 - 288 \varphi^2 \varphi_0^4 + 585 \varphi^4 \varphi_0^2) \tag{22}$$

$$Q_\varphi = - \frac{(\gamma h + q) R}{1008 \varphi_0^4} (882 \varphi \varphi_0^4 - 1260 \varphi^3 \varphi_0^2 + 378 \varphi^5 + 72 \varphi^3 \varphi_0^4 - 171 \varphi \varphi_0^6 - 18 \varphi^7 + 117 \varphi^5 \varphi_0^2) \tag{23}$$

$$M_\varphi = - \frac{(\gamma h + q) R^2}{1008 \varphi_0^4} (189 \varphi_0^6 - 50,3 \varphi_0^8 - 441 \varphi^2 \varphi_0^4 + 315 \varphi^4 \varphi_0^2 - 63 \varphi^6 - 18 \varphi^4 \varphi_0^4 + 85,5 \varphi^2 \varphi_0^6 + 2,25 \varphi^8 - 19,5 \varphi^6 \varphi_0^2) \tag{24}$$

Le moment M_φ croît de la valeur 0 au bord de la voûte jusqu'à la clé, où il atteint la valeur

$$M_{\varphi, max} = - (\gamma h + q) R^2 \varphi_0^2 (0,1874 - 0,0500 \varphi_0^2) \tag{25}$$

Cette formule montre que le moment fléchissant M_φ dans une voûte autoportante isolée augmente avec le carré du rayon et de l'angle d'ouverture. Ce moment est accompagné d'un effort normal, qui croît du bord, où il est nul, vers la clé où il est maximum.

$$N_{\varphi, max} = - (\gamma h + q) R (1,88 - 0,17 \varphi_0^2) \tag{26}$$

ou sous une forme plus simple (avec une erreur de 3 %)

$$N_{\varphi, max} = - 1,80 (\gamma h + q) R \tag{26'}$$

L'effort normal à la clé ne dépend pratiquement pas de l'angle d'ouverture. Il n'est fonction que de la charge et du rayon de la voûte.

On voit donc que tout le long de la voûte s'exerce simultanément un moment fléchissant et un effort de compression, ce qui revient à dire que la compression annulaire s'excentre. A la clé, l'excentricité a pour valeur

$$t = (0,1042 - 0,0278 \varphi_0^2) R \varphi_0^2 \tag{27}$$

b) Voûtes multiples : encastrement parfait d'un panneau intérieur

Si l'on considère une série de voûtes multiples chargées uniformément, par symétrie un déplacement horizontal et une rotation de la naissance d'une voûte n'est pas possible. L'arc se comportera donc d'une manière semblable à un arc encastré ne subissant qu'une poussée hyperstatique H et un moment hyperstatique M qu'on peut déterminer en appliquant les formules classiques (fig. 8).

$$H = \frac{\int M_o \quad z \quad ds}{\int z^2 \frac{ds}{EI} + \int \frac{ds}{EF}} \tag{28}$$

$$M = \frac{\int M_o \frac{ds}{EI}}{\int \frac{ds}{EI}} \quad (29)$$

$M_o =$ moment dans l'arc isolé (équ. 24).

Après intégration, on trouve

$$M = -\frac{(\gamma h + q) R^2 \varphi_o^2}{1008} (96 - 27,92 \varphi_o^2) \quad (30)$$

On trouve de même

$$H = -\frac{(\gamma h + q) R}{1008} (432 - 81,8 \varphi_o^2) \quad (31)$$

Connaissant M et H , on obtient par superposition le moment fléchissant $M_\varphi = M_o - M + zH$ et l'effort normal

$$N_\varphi = N_o - H \cos \varphi$$

$$N_\varphi = -\frac{(\gamma h + q) R}{1008 \varphi_o^4} (1458 \varphi_o^4 - 89,2 \varphi_o^6 - 72 \varphi^2 \varphi_o^4 - 3780 \varphi^2 \varphi_o^2 + 1890 \varphi^4 - 126 \varphi^6 + 585 \varphi^4 \varphi_o^2) \quad (32)$$

$$Q_\varphi = -\frac{(\gamma h + q) R}{1008 \varphi_o^4} (450 \varphi \varphi_o^4 - 1260 \varphi^3 \varphi_o^2 + 378 \varphi^5 + 144 \varphi^3 \varphi_o^4 - 89,2 \varphi \varphi_o^6 - 18 \varphi^7 + 117 \varphi^5 \varphi_o^2) \quad (33)$$

$$M_\varphi = -\frac{(\gamma h + q) R^2}{1008 \varphi_o^4} (21 \varphi_o^6 - 5,13 \varphi_o^8 - 225 \varphi^2 \varphi_o^4 + 315 \varphi^4 \varphi_o^2 - 63 \varphi^6 - 36 \varphi^4 \varphi_o^4 + 44,6 \varphi^2 \varphi_o^6 + 2,25 \varphi^8 - 19,5 \varphi^6 \varphi_o^2) \quad (34)$$

Les valeurs extrêmes de M_φ et de N_φ agissent à la naissance et à la clé :

$$M_\varphi, \text{ naissance} = -\frac{(\gamma h + q) R^2 \varphi_o^2}{21} (1 - 0,287 \varphi_o^2) \quad (35)$$

$$M_\varphi, \text{ clé} = -\frac{(\gamma h + q) R^2 \varphi_o^2}{48} (1 - 0,244 \varphi_o^2) \quad (36)$$

$$N_\varphi, \text{ naissance} = +\frac{(\gamma h + q) R}{1008} (432 - 298 \varphi_o^2) \quad (37)$$

$$N_\varphi, \text{ clé} = -\frac{(\gamma h + q) R}{1008} (1458 - 89,2 \varphi_o^2) \quad (38)$$

Pour un avant-projet, on peut utiliser la formule simple

$$N_\varphi, \text{ clé} = -1,40 (\gamma h + q) R \quad (38')$$

erreur e sur (38) $< 2 \%$

La figure 9 montre la variation du moment M_φ et de l'effort N_φ le long de l'arc pour les voûtes isolées et les voûtes multiples. On remarque que dans les voûtes multiples le moment M_φ est négatif à la clé et à la naissance et positif aux reins. La valeur maxi-

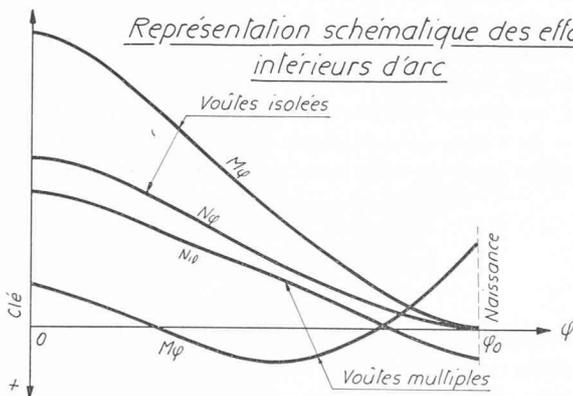


Fig. 9.

um de l'effort normal N_φ à la clé est à nouveau indépendante de l'angle d'ouverture de la voûte. Dans la section d'encastrement de deux voûtes adjacentes, l'effort normal N_φ est une traction.

Il est intéressant de constater que le plus grand moment fléchissant dans les voûtes multiples est environ 3,5 fois plus petit que le plus grand moment dans une voûte isolée.

Au moyen des formules (22) à (38), il est possible d'effectuer le calcul statique des efforts d'arc dans les voûtes autoportantes isolées et multiples. Il est utile de rappeler encore le domaine d'application de ces formules :

1. Voûte autoportante longue à directrice circulaire.
2. Epaisseur h constante le long de l'arc.
3. Angle d'ouverture inférieur ou égal à 100° .
4. Charge q symétrique et uniformément répartie sur toute la surface de la voûte.
5. Voûte isolée ou voûte multiple parfaitement encastree.

6. Le choix de la courbe directrice

On peut se demander si la directrice circulaire constitue la meilleure solution pour la construction d'une voûte autoportante. Une étude comparative de plusieurs courbes directrices (développante du cercle, chaînette, cycloïde, ellipse) permet de constater que les efforts N_x , $N_{x\varphi}$ et $N_{\varphi x}$ sont sensiblement les mêmes pour les voûtes de même longueur, largeur, hauteur et épaisseur, quelle que soit leur directrice. Par contre, les efforts d'arc, et notamment le moment M_φ , varient d'une directrice à l'autre en fonction de la cambrure du bord. Ceci ressort d'ailleurs de l'équation d'équilibre de projection sur le rayon de courbure

$$N_\varphi + Rq_n = 0$$

car avec un bord plus cambré la composante normale q_n des charges usuelles diminue et provoque aussi une diminution de l'effort méridien N_φ , et avec lui de son moment d'excentricité M_φ .

La possibilité de « régler » ainsi la valeur du moment M_φ au moyen d'un bord plus ou moins cambré peut revêtir une grande importance dans le cas des voûtes autoportantes circulaires isolées. Pour ce genre de voûtes, les contraintes dues à M_φ dépassent fréquemment les valeurs admissibles. Dans ce cas, on pourrait procéder de deux manières :

1. Prévoir une voûte plus épaisse.
2. Adopter une directrice plus cambrée.

La première solution présente l'inconvénient d'une augmentation du poids mort de la voûte et par conséquent de la valeur de M_φ . C'est donc généralement la deuxième solution qu'on adoptera.

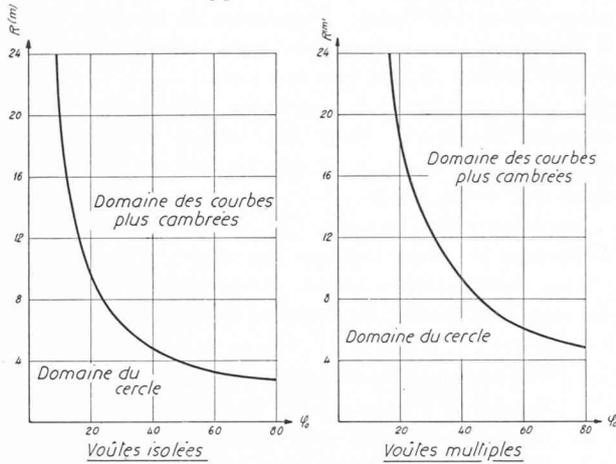
Il est possible de définir le domaine d'application des voûtes circulaires et celui des voûtes plus cambrées au bord. Si on admet une épaisseur de voûte de 8 cm et une contrainte admissible $\sigma_{arête}$ de 500 t/m^2 , on peut évaluer le moment fléchissant admissible

$$M_{max} = 0,54 \text{ tm/m.}$$

En admettant, en outre, que la charge totale (poids mort, couverture, neige, etc.)

$$(\gamma h + q) = 1,5 \gamma h$$

Domaines d'application des voûtes circulaires



GRAPHIQUE 12

on peut écrire (25) sous une forme simplifiée (erreur <10 %)

$$M_{\phi, \max} = -0,16 (\gamma h + q) R^2 \phi_0^2$$

On obtient alors $0,16 (\gamma h + q) R^2 \phi_0^2 \leq 0,54$ d'où résulte la condition pour une voûte isolée

$$R \phi_0 \leq 3,35 \text{ m} \tag{39}$$

et pour une voûte multiple

$$R \phi_0 \leq 6,30 \text{ m.} \tag{40}$$

Le graphique 12 permet de juger si une voûte autoportante de R et ϕ_0 donné peut être réalisée au moyen d'une directrice circulaire. Si le point caractérisant la voûte sur le graphique se situe à droite de la courbe limite, il faut adopter une directrice plus cambrée au bord. Dans ce dernier cas, on choisira avantageusement une directrice elliptique.

Il est possible de calculer les efforts intérieurs d'une voûte elliptique d'après les principes énoncés aux paragraphes 4 et 5.

Les équations paramétriques de l'ellipse ont la forme

$$y = a \sin \phi \tag{41}$$

$$z = b (1 - \cos \phi) \tag{42}$$

$$ds = a (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi \tag{43}$$

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$y_0 = a \sin \phi_0$$

$$z_0 = b (1 - \cos \phi_0)$$

L'intégration sous cette forme conduit à un calcul compliqué faisant intervenir des intégrales elliptiques. On peut éliminer cette difficulté en posant

$$ds = a (1 - \frac{k^2}{2} \sin^2 \phi) d\phi \tag{44}$$

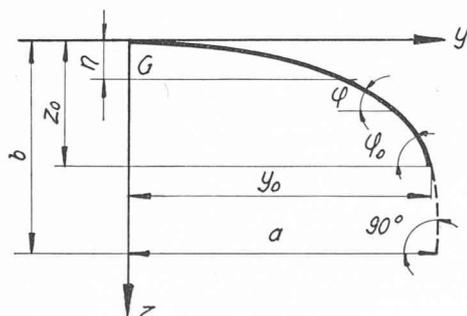


Fig. 10.

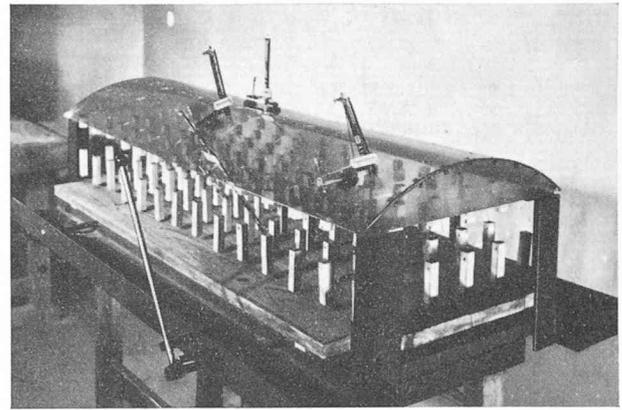


Fig. 11.

On montrera plus loin que l'erreur introduite par cette forme ne dépasse guère quelques pour cent. En effectuant la suite du calcul au moyen de (44), on obtient

$$\eta = b \left(1 - \frac{\sin \phi_0 \left(1 - \frac{k^2}{6} \sin^2 \phi_0 \right)}{\left(1 - \frac{k^2}{4} \right) \phi_0 + \frac{k^2}{4} \sin \phi_0 \cos \phi_0} \right) \tag{45}$$

$$\eta = b \left[\frac{\phi_0^2}{6} - \frac{\phi_0^4}{360} (3 + 8k^2) \right] \tag{46}$$

$$z = z_0 - \eta = b \left[\frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^4}{24} - \frac{\phi_0^2}{6} + \frac{\phi_0^4}{360} (3 + 8k^2) \right] \tag{47}$$

$$S_y(s) = \frac{hab}{2} \left[\frac{\phi \phi_0^2}{3} - \frac{\phi^3}{3} + \frac{\phi^5}{60} (1 + 6k^2) - k^2 \frac{\phi^3 \phi_0^2}{18} + \frac{\phi \phi_0^4}{180} (3 + 8k^2) \right] \tag{48}$$

$$M_{\phi, \max} = -(\gamma h + q) a^2 \phi_0^2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\phi_0^2}{24} (1 + 4k^2) - \frac{a}{b} \left[\frac{1}{3,2} - \frac{\phi_0^2}{200} (1 + 21,88k^2) \right] \right\} \tag{49}$$

$$N_{\phi, \max} = \frac{-(\gamma h + q) a^2}{b} \left[1,875 - \frac{\phi_0^2}{3,72} (1 + 2,415k^2) \right] \tag{50}$$

$$W = \frac{12}{45} abh \phi_0^3 \left[1 - \frac{\phi_0^2}{13,65} (1 + 1,19k^2) \right] \tag{51}$$

$$\bar{T}_{\max} = \frac{T}{hb \phi_0^2} \left[1,444 + \frac{\phi_0^2}{12,24} (1 - 0,2235k^2) \right] \tag{52}$$

Les formules (49) à (52) déterminent les valeurs maxima des efforts de poutre et d'arc dans une voûte autoportante à directrice elliptique. Si on pose $a = b$, c'est-à-dire, $k = 0$, on retrouve le cas particulier de la voûte circulaire.

En comparant les résultats donnés par les formules (49) à (52) avec ceux obtenus par le calcul direct du cercle, on trouve l'erreur introduite du fait de l'élimination de l'intégrale elliptique. Pour un angle d'inclinaison au bord de 40° , cette erreur est de

- 1,27 % pour W
- 1,36 % pour \bar{T}_{\max}
- 4,00 % pour $M_{\phi, \max}$
- 5,40 % pour $N_{\phi, \max}$

Les formules (45) à (52) permettent donc de calculer les efforts intérieurs d'une voûte elliptique avec une précision suffisante.

(A suivre.)