

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 81 (1955)  
**Heft:** 11

**Artikel:** Étude de la flexion, pour différentes conditions d'appui, des plaques rectangulaires d'épaisseur linéairement variable: application au cas d'une pression hydrostatique  
**Autor:** Favre, Henry / Schumann, Walter  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61334>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 22.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

**Abonnements :**  
Suisse : 1 an, 24 francs  
Etranger : 28 francs  
Pour sociétaires :  
Suisse : 1 an, 20 francs  
Etranger : 25 francs  
Prix du numéro : Fr. 1.40  
Ch. post. « Bulletin technique de la Suisse romande »  
N° II. 57 75, à Lausanne.  
**Expédition**  
Imprimerie « La Concorde »  
Terreaux 31 — Lausanne.  
**Rédaction**  
et éditions de la S. A. du  
Bulletin technique (tirés à  
part), Case Chauderon 475  
**Administration générale**  
Ch. de Rosneck 6 Lausanne

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président : R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président : G. Epitoux, architecte, à Lausanne; Secrétaire : J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg : MM. P. Joye, professeur; † E. Lateltin, architecte — Vaud : MM. F. Chenaux, ingénieur; A. Chevalley, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; Ch. Thévenaz, architecte — Genève : MM. † L. Archinard, ingénieur; Cl. Groscurin, architecte; E. Martin, architecte — Neuchâtel : MM. J. Béguin, architecte; R. Guye, ingénieur — Valais : MM. J. Dubuis, ingénieur; Burgener, D. architecte.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration  
de la Société anonyme du Bulletin technique : A. Stucky, ingénieur, président;  
M. Bridel; G. Epitoux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

## Tarif des annonces

1/1 page	Fr. 264.—
1/2 »	» 134.40
1/4 »	» 67.20
1/8 »	» 33.60

Annonces Suisses S. A.  
(ASSA)



Place Bel-Air 2. Tél. 22 33 26  
Lausanne et succursales

SOMMAIRE : *Etude de la flexion, pour différentes conditions d'appui, des plaques rectangulaires d'épaisseur linéairement variable. Application au cas d'une pression hydrostatique*, par HENRY FAVRE, D<sup>r</sup> ès Sc. techn., professeur à l'E. P. F., et WALTER SCHUMANN, D<sup>r</sup> ès Sc. nat., assistant à l'E. P. F. — BIBLIOGRAPHIE. — Société suisse des ingénieurs et des architectes : *Communiqué du Secrétariat*. — CARNET DES CONCOURS. — SERVICE DE PLACEMENT. — DOCUMENTATION GÉNÉRALE. — INFORMATIONS DIVERSES.

## ÉTUDE DE LA FLEXION, POUR DIFFÉRENTES CONDITIONS D'APPUI, DES PLAQUES RECTANGULAIRES D'ÉPAISSEUR LINÉAIREMENT VARIABLE

### Application au cas d'une pression hydrostatique

HENRY FAVRE, D<sup>r</sup> ès Sc. techn.  
Professeur à l'E. P. F.

par

WALTER SCHUMANN, D<sup>r</sup> ès Sc. nat.  
Assistant à l'E. P. F.

Dans un mémoire paru il y a trois ans, B. Gilg et l'un des deux auteurs du présent exposé ont développé une méthode générale pour l'étude des *plaques rectangulaires fléchies, d'épaisseur linéairement variable*, et l'ont appliquée en supposant la plaque *simplement appuyée* le long du contour<sup>1</sup>. Nous désirons aujourd'hui étendre ce calcul au cas où *deux côtés sont simplement appuyés*, et où *les deux autres satisfont à certaines conditions, très générales*, que nous préciserons plus loin.

Nous rappellerons tout d'abord l'équation différentielle du problème, et la solution de cette équation à l'aide d'un développement en série (§ 1). Nous intégrerons ensuite, dans les nouvelles conditions d'appui, le système d'équations auxquelles doivent satisfaire les coefficients de ce développement (§ 2). Enfin, nous appliquerons les résultats obtenus au cas d'une *plaque*

*simplement appuyée le long de trois côtés et soumise à une pression hydrostatique* (§ 3). Cette étude nous permettra, en particulier, d'examiner l'influence des conditions d'appui et celle de la variation de l'épaisseur sur les déformations, sur les moments de flexion et de torsion, et sur les tensions. Elle nous donnera également des renseignements utiles sur les réactions des appuis.

#### § 1. Equation différentielle des plaques d'épaisseur linéairement variable. Solution de cette équation à l'aide d'un développement en série.

L'équation régissant la *flexion d'une plaque où l'épaisseur varie selon une loi quelconque* est, en coordonnées cartésiennes rectangulaires<sup>1</sup> :

<sup>1</sup> H. FAVRE et B. GILG, *La plaque rectangulaire fléchie d'épaisseur linéairement variable*. Zeitschrift für angew. Math. u. Physik, Fasc. 5, Vol. III, 1952, p. 354-371.

<sup>1</sup> Voir S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, Mc Graw-Hill Book Company, New York et Londres, 1940, p. 195. Les axes *x* et *y* sont situés dans le plan moyen de la plaque, *z* est perpendiculaire à ce plan.

$$D\Delta\Delta\zeta + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \Delta\zeta}{\partial x} + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \Delta\zeta}{\partial y} + \Delta D\Delta\zeta - \left. \begin{aligned} & - (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) = P, \end{aligned} \right\} (1)$$

où 
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (2)$$

$\zeta$  étant le déplacement d'un point du feuillet moyen,  $\Delta$  l'opérateur de Laplace  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $h(x, y)$  l'épaisseur,  $E$  le module d'élasticité,  $\nu$  le nombre de Poisson et  $p(x, y)$  la surcharge par unité de surface.

Cette équation différentielle n'est évidemment applicable que si l'épaisseur  $h$  est partout petite par rapport aux autres dimensions et si le déplacement  $\zeta$  d'un point quelconque du feuillet moyen est lui-même petit par rapport à  $h$ , ce que nous supposons essentiellement dans la suite. Nous admettrons également qu'aucune force n'agisse dans le plan de ce feuillet. Dans ces conditions, l'équation (1), jointe à deux conditions le long du contour, définit la fonction  $\zeta(x, y)$ .

Les expressions des moments de flexion  $M_x, M_y$  et de torsion  $M_{xy}$ , par unité de longueur, sont les mêmes que lorsque l'épaisseur est constante :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} (3)$$

Il en est de même de celles des tensions  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , en fonction des moments :

$$\sigma_x = \frac{M_x}{h^3/12} z, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{h^3/12} z, \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{h^3/12} z, \quad (4)$$

$z$  désignant la distance d'un point de la plaque au feuillet moyen. En particulier, les valeurs de ces tensions aux points  $z = \frac{h}{2}$  de la face opposée  $i$  à celle où agit la surcharge  $p$  sont données par les formules :

$$(\sigma_x)_i = \frac{6M_x}{h^2}, \quad (\sigma_y)_i = \frac{6M_y}{h^2}, \quad (\tau_{xy})_i = \frac{6M_{xy}}{h^2}. \quad (5)$$

Soit maintenant une plaque rectangulaire, de côtés  $a, b$  (fig. 1). Choisissons les axes  $x, y, z$  indiqués dans la figure et posons, pour l'épaisseur  $h$  en un point quelconque :

$$h = \left[ 1 + \lambda \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \right] h_0, \quad (6)$$

d'où

$$(h)_{y=0} = (1-\lambda)h_0, \quad (h)_{y=b} = (1+\lambda)h_0, \quad (7)$$

$h_0$  désignant l'épaisseur le long de la droite  $y = \frac{b}{2}$ . Le nombre  $\lambda$  est la variation, divisée par  $h_0$ , que subit  $h$  depuis cette droite jusqu'à l'un ou l'autre des côtés qui lui sont parallèles. Nous supposons donc que  $h$  varie uniquement dans la direction de l'axe  $y$ .

Dans ce cas, l'équation (1) devient, compte tenu des relations (2) et (6), et en posant pour abrégier :

$$D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}; \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Delta\zeta &= \frac{p}{D_0} - 3\lambda \left[ \frac{4}{b} \frac{\partial \Delta\zeta}{\partial y} + \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \Delta\Delta\zeta \right] - \\ & - 3\lambda^2 \left[ \frac{8}{b^2} \left\{ \Delta\zeta - (1-\nu) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right\} + \frac{8}{b} \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{\partial \Delta\zeta}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{2y}{b} - 1 \right)^2 \Delta\Delta\zeta \right] - \lambda^3 \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \left[ \frac{24}{b^2} \left\{ \Delta\zeta - \right. \right. \\ & \left. \left. - (1-\nu) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right\} + \frac{12}{b} \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{\partial \Delta\zeta}{\partial y} + \left( \frac{2y}{b} - 1 \right)^2 \Delta\Delta\zeta \right]. \end{aligned} \right\} (9)$$

Nous supposons que les deux côtés parallèles à l'axe  $y$  soient simplement appuyés et que les deux autres soient formés de deux poutres dont les axes coïncident avec les droites  $y = 0$  et  $y = b$ . Désignons respectivement par  $B',$

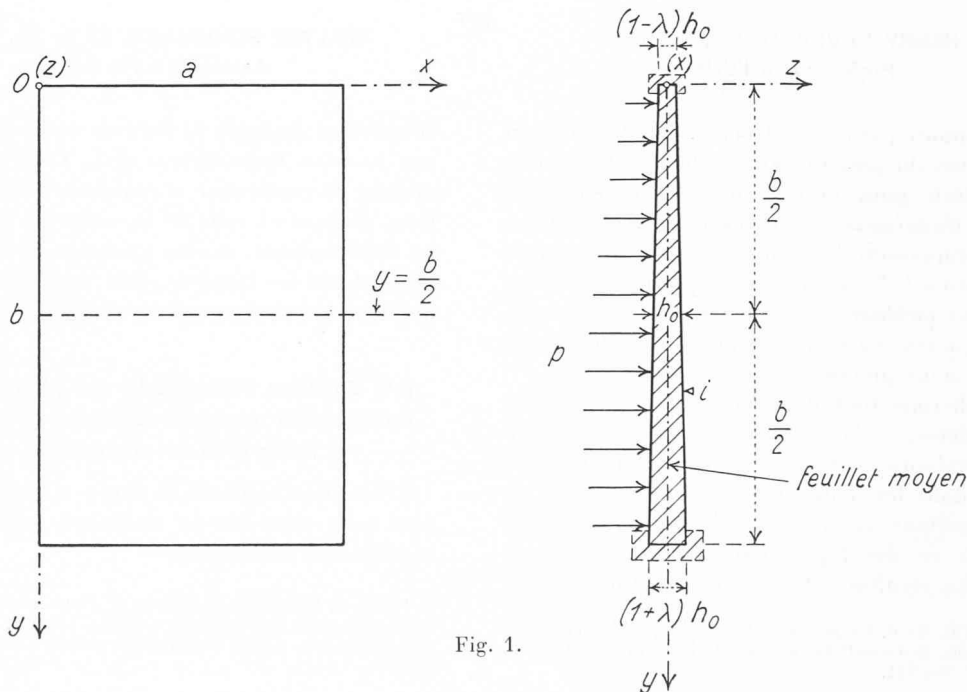


Fig. 1.

$C'$  les modules de rigidité à la flexion et à la torsion de la poutre  $y = 0$ , et par  $B''$ ,  $C''$  les grandeurs analogues relatives à la poutre  $y = b$ . Les conditions aux limites s'écrivent, si nous admettons que les deux poutres et la plaque soient parfaitement solidaires<sup>1</sup> :

$$\left. \begin{aligned} \text{côtés } x = 0 \text{ et } x = a : \quad & \zeta = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 ; \\ \text{côté } y = 0 : & \left\{ \begin{aligned} -B' \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} &= D' \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right] + \\ &+ \frac{dD'}{dy} \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right], \\ &+ C' \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} = D' \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right]; \end{aligned} \right\} (10) \\ \text{côté } y = b : & \left\{ \begin{aligned} +B'' \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} &= D'' \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right] + \\ &+ \frac{dD''}{dy} \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right], \\ &- C'' \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} = D'' \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Dans ces relations,  $D'$ ,  $\frac{dD'}{dy}$ ,  $D''$ ,  $\frac{dD''}{dy}$  désignent respectivement les valeurs du module  $D$  et de sa dérivée par rapport à  $y$  le long des côtés  $y = 0$  et  $y = b$ . Ces valeurs se calculent sans difficulté à l'aide des formules (2) et (6).

Les conditions prescrites le long des côtés parallèles à l'axe  $x$  sont très générales. Elles comprennent les trois cas particuliers importants :

$$\left. \begin{aligned} \text{côté simplement appuyé : } & B = \infty, \quad C = 0, \\ \text{bord libre : } & B = 0, \quad C = 0, \\ \text{côté encasté : } & B = \infty, \quad C = \infty. \end{aligned} \right\} (11)$$

Par exemple, si le côté  $y = 0$  est libre et si le côté opposé  $y = b$  est simplement appuyé, on a :

$$B' = C' = 0 \quad \text{et} \quad B'' = \infty, \quad C'' = 0,$$

et les conditions (10) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \text{côtés } x = 0 \text{ et } x = a : \quad & \zeta = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 ; \\ \text{côté } y = 0 : & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right] &= 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0; \end{aligned} \right\} (12) \\ \text{côté } y = b : & \left\{ \begin{aligned} \zeta &= 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Revenons au cas général et remarquons que  $\zeta$  dépend non seulement de  $x, y$ , mais aussi de  $\lambda$ . Nous pouvons donc chercher à satisfaire à l'équation différentielle (9) à l'aide du développement en série illimitée :

$$\zeta(x, y, \lambda) = \zeta_0(x, y) + \zeta_1(x, y) \lambda + \zeta_2(x, y) \lambda^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i \lambda^i. \quad (13)$$

<sup>1</sup> Les deux premières conditions (10) prescrivent aux déplacements  $z$  et aux moments  $M_x$  d'être nuls le long des côtés parallèles à l'axe  $y$ . Les quatre autres conditions peuvent s'établir par un raisonnement analogue à celui que l'on fait dans le cas où  $D$  est constant (voir p. ex. S. TIMOSHENKO, *loc. cit.*, p. 89 et suiv.).

<sup>2</sup> Car si  $B' = \infty$ , le côté  $y = b$  reste rectiligne.

En introduisant cette série dans les deux membres de l'équation (9), puis en identifiant les coefficients des mêmes puissances de  $\lambda$ , nous obtenons un système d'équations différentielles simultanées pour les coefficients  $\zeta_i(x, y)$  :

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta \zeta_0 &= \frac{P}{D_0}, \\ \Delta \Delta \zeta_1 &= -3 \left[ \frac{4}{b} \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial y} + \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \Delta \Delta \zeta_0 \right], \\ \Delta \Delta \zeta_2 &= -3 \left[ \frac{4}{b} \frac{\partial \Delta \zeta_1}{\partial y} + \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \Delta \Delta \zeta_1 \right] - \\ &- 3 \left[ \frac{8}{b^2} \left\{ \Delta \zeta_0 - (1-\nu) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{b} \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial y} + \left( \frac{2y}{b} - 1 \right)^2 \Delta \Delta \zeta_0 \right], \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta \Delta \zeta_i &= -3 \left[ \frac{4}{b} \frac{\partial \Delta \zeta_{i-1}}{\partial y} + \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \Delta \Delta \zeta_{i-1} \right] - \\ &- 3 \left[ \frac{8}{b^2} \left\{ \Delta \zeta_{i-2} - (1-\nu) \frac{\partial^2 \zeta_{i-2}}{\partial x^2} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{b} \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{\partial \Delta \zeta_{i-2}}{\partial y} + \left( \frac{2y}{b} - 1 \right)^2 \Delta \Delta \zeta_{i-2} \right] - \\ &\quad - \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \left[ \frac{24}{b^2} \left\{ \Delta \zeta_{i-3} - (1-\nu) \frac{\partial^2 \zeta_{i-3}}{\partial x^2} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{b} \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{\partial \Delta \zeta_{i-3}}{\partial y} + \left( \frac{2y}{b} - 1 \right)^2 \Delta \Delta \zeta_{i-3} \right], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (14)$$

**§ 2. Intégration du système d'équations pour les coefficients du développement en série.**

Les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction  $\zeta$  le long du contour seront remplies, si chacun des coefficients  $\zeta_i(x, y)$  satisfait séparément aux relations (10). Nous pourrions alors déterminer ces coefficients comme suit :

La première des équations (14), contenant la seule fonction inconnue  $\zeta_0$ , n'est autre que celle d'une plaque d'épaisseur constante  $h_0$ , sous l'action de la surcharge connue  $p(x, y)$ , mais où les conditions le long du contour sont exprimées par les relations (10). Nous pourrions donc calculer  $\zeta_0$  par la méthode de Maurice Lévy, qui consiste à développer le second membre de la première des équations (14) en une série simple de sinus et à mettre également la fonction  $\zeta_0$  sous la même forme. En introduisant la valeur obtenue pour  $\zeta_0$  dans le membre de droite de la seconde des équations (14), on est conduit à des opérations analogues pour déterminer  $\zeta_1$ , cette grandeur devant également satisfaire aux conditions (10) le long du contour. En introduisant ensuite les valeurs  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  dans le membre de droite de la troisième des relations (14), on pourra calculer  $\zeta_2$ , et ainsi de suite.

En somme, grâce au développement en série (13), le problème est ramené à des calculs successifs, par la méthode de Maurice Lévy, d'une plaque d'épaisseur constante, la surcharge considérée dans chaque calcul

étant fonction des déformations de la plaque obtenues par les opérations précédentes<sup>1</sup> :

Après avoir esquissé la marche des calculs, nous allons en préciser certains détails essentiels.

Considérons le membre de droite de la première des équations (14) et développons-le en une série de sinus, en posant :

$$\frac{p(x,y)}{D_0} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin(\alpha_n x), \tag{15}$$

où

$$\boxed{\alpha_n = \frac{\pi n}{a}} \tag{16 a}$$

Les coefficients  $e_n$  sont donnés par la formule

$$e_n = \frac{2}{a D_0} \int_0^a p(x,y) \sin(\alpha_n x) dx. \tag{16 b}$$

Ce sont des fonctions de  $y$  qui, en général, peuvent elles-mêmes être développées en une série de puissances, en posant :

$$e_n = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n\mu} y^\mu, \tag{17}$$

les coefficients  $a_{n\mu}$  étant des constantes.

Dans de nombreuses applications, le développement (17) ne comprendra qu'un nombre fini de termes. Ce sera en particulier le cas si la plaque est sous l'action d'une pression constante ou sous celle d'une pression hydrostatique, comme nous le verrons plus loin. Si le développement est illimité, on pourra en général négliger les termes à partir d'un certain rang, sans commettre d'erreur appréciable. Nous supposons donc que la série (17) ne comprenne que  $k + 1$  termes, d'où :

$$e_n = \sum_{\mu=0}^k a_{n\mu} y^\mu. \tag{17'}$$

Remarquons que les coefficients  $a_{n\mu}$  dépendent de la surcharge de la plaque, mais pas des conditions aux limites.

La première des équations (14) s'écrit, dans ces conditions :

$$\Delta\Delta\zeta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^k a_{n\mu} y^\mu \sin(\alpha_n x). \tag{18}$$

Cherchons une solution représentée par la série simple :

$$\zeta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{on} \sin(\alpha_n x), \tag{19}$$

<sup>1</sup> Si les quatre côtés sont simplement appuyés, on peut faire également les calculs par la méthode de Navier à l'aide de séries trigonométriques multiples, comme B. GILG et l'un des deux auteurs l'ont montré (*loc. cit.*, p. 358 et suiv.). La méthode de MAURICE LÉVY présente le grand avantage d'être applicable au cas beaucoup plus général des conditions (10) le long du contour. Elle n'est pas soumise à une restriction de symétrie pour les surcharges  $p(x, y)$ , comme il a été indiqué par erreur p. 359 du mémoire cité.

les coefficients  $Y_{on}$  ne dépendant que de  $y$ . Cette série satisfait aux deux premières conditions (10), relatives aux côtés  $x = 0$  et  $x = a$ .

En substituant dans l'équation (18) et en identifiant les coefficients de  $\sin(\alpha_n x)$ , on obtient pour chaque fonction  $Y_{on}$  l'équation différentielle linéaire :

$$\alpha_n^4 Y_{on} - 2\alpha_n^2 Y_{on}'' + Y_{on}'''' = \sum_{\mu=0}^k a_{n\mu} y^\mu, \tag{20}$$

$Y_{on}'$ ,  $Y_{on}''$ ... désignant les dérivées de  $Y_{on}$  par rapport à  $y$ .

La solution générale de l'équation homogène correspondante peut être mise sous la forme :

$$\bar{Y}_{on} = A_{on} e^{\alpha_n y} + B_{on} e^{-\alpha_n y} + C_{on} \alpha_n y e^{\alpha_n y} - D_{on} \alpha_n y e^{-\alpha_n y}, \tag{21}$$

$A_{on}$ , ...,  $D_{on}$  étant des constantes. Cherchons une solution particulière  $f_{on}(y)$  de l'équation complète, en posant :

$$f_{on}(y) = \sum_{\mu=0}^k H_{on}^{(\mu)} \alpha_n^\mu y^\mu. \tag{22}$$

En introduisant cette fonction de  $y$  dans la relation (20) et en identifiant, on obtient pour déterminer les coefficients  $H_{on}^{(\mu)}$  le système :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n^{k+4} H_{on}^{(k)} &= a_{nk}, \\ \alpha_n^{k+3} H_{on}^{(k-1)} &= a_{n, k-1}, \\ \alpha_n^{k+2} H_{on}^{(k-2)} - 2k(k-1) \alpha_n^{k+2} H_{on}^{(k)} &= a_{n, k-2}, \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_n^4 H_{on}^{(0)} - 2.2.1 \alpha_n^4 H_{on}^{(2)} + 4.3.2.1 \alpha_n^4 H_{on}^{(4)} &= a_{no}, \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

qu'il est facile de résoudre. Comme les quantités  $a_{n\mu}$ , les coefficients  $H_{on}^{(\mu)}$  dépendent de la surcharge de la plaque, mais pas des conditions aux limites.

La solution générale de l'équation (20) est donc :

$$Y_{on} = \bar{Y}_{on} + f_{on}(y) = A_{on} e^{\alpha_n y} + B_{on} e^{-\alpha_n y} + C_{on} \alpha_n y e^{\alpha_n y} - D_{on} \alpha_n y e^{-\alpha_n y} + \sum_{\mu=0}^k H_{on}^{(\mu)} \alpha_n^\mu y^\mu. \tag{24}$$

Pour déterminer les constantes  $A_{on}$ , ...,  $D_{on}$ , substituons d'abord l'expression (19) de  $\zeta_0$  dans les quatre dernières conditions aux limites (10), relatives aux côtés  $y = 0$  et  $y = b$ , puis identifions les coefficients de  $\sin(\alpha_n x)$ . Nous obtenons ainsi, après quelques transformations, le système :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{B'}{D'} \alpha_n^4 Y_{on}(0) = Y_{on}'''(0) - \left(2 - \nu + \frac{C'}{D'^2} \frac{dD'}{dy}\right) \alpha_n^2 Y_{on}'(0), \\ -\frac{C'}{D'} \alpha_n^2 Y_{on}'(0) = Y_{on}''(0) - \nu \alpha_n^2 Y_{on}(0), \\ +\frac{B''}{D''} \alpha_n^4 Y_{on}(b) = Y_{on}'''(b) - \left(2 - \nu - \frac{C''}{D''^2} \frac{dD''}{dy}\right) \alpha_n^2 Y_{on}'(b), \\ +\frac{C''}{D''} \alpha_n^2 Y_{on}'(b) = Y_{on}''(b) - \nu \alpha_n^2 Y_{on}(b). \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

<sup>1</sup> Il est ici préférable, pour les calculs numériques, d'utiliser des fonctions exponentielles plutôt que des fonctions hyperboliques.

En remplaçant, dans ces équations,  $Y_{on}$  par la solution générale (20), on obtient un système de quatre équations linéaires d'où l'on tire les valeurs cherchées des quatre constantes (nous précisons plus loin ce système dans le cas général de la fonction  $Y_{in}$  que nous allons définir). Les quantités  $A_{on}, \dots, D_{on}$  dépendent ainsi non seulement de la surcharge, mais encore des conditions aux limites.

La fonction  $\zeta_0$  étant maintenant entièrement déterminée, introduisons-la dans la seconde des équations (14). On pourra en tirer la fonction  $\zeta_1$  à l'aide d'opérations analogues à celles que nous venons de décrire. On introduira ensuite  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  dans la troisième des équations (14), et ainsi de suite. Toutes les fonctions  $\zeta_i$  obtenues seront donc mises sous la forme :

$$\zeta_i = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{in} \sin(\alpha_n x), \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

$Y_{in}$  ne dépendant que de  $y$ .

Pour montrer le développement des calculs, supposons que l'on ait déterminé  $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{i-1}$ , c'est-à-dire  $Y_{on}, Y_{1n}, \dots, Y_{i-1,n}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), et voyons quelles opérations permettent alors de calculer  $\zeta_i$ . Dans ce but, remplaçons, dans l'équation de rang  $i$  du système (14),  $\zeta_i, \zeta_{i-1}, \zeta_{i-2}, \zeta_{i-3}$  par leurs expressions (26). Nous obtenons, en identifiant les coefficients de  $\sin(\alpha_n x)$  :

$$\left. \begin{aligned} &\alpha_n^4 Y_{in} - 2\alpha_n^2 Y_{in}'' + Y_{in}'''' = -3 \left[ \frac{4}{b} (-\alpha_n^2 Y'_{i-1,n} + Y_{i-1,n}''') + \right. \\ &+ \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) (\alpha_n^4 Y_{i-1,n} - 2\alpha_n^2 Y_{i-1,n}'' + Y_{i-1,n}''') - \\ &- 3 \left[ \frac{8}{b^2} (-\alpha_n^2 Y_{i-2,n} + Y_{i-2,n}'' + (1-\nu)\alpha_n^2 Y_{i-2,n}) + \right. \\ &+ \frac{8}{b} \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) (-\alpha_n^2 Y'_{i-2,n} + Y_{i-2,n}''') + \\ &+ \left( \frac{2y}{b} - 1 \right)^2 (\alpha_n^4 Y_{i-2,n} - 2\alpha_n^2 Y_{i-2,n}'' + Y_{i-2,n}''') - \\ &- \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \left[ \frac{24}{b^2} (-\alpha_n^2 Y_{i-3,n} + Y_{i-3,n}'' + (1-\nu)\alpha_n^2 Y_{i-3,n}) + \right. \\ &+ \frac{12}{b} \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) (-\alpha_n^2 Y'_{i-3,n} + Y_{i-3,n}''') + \\ &+ \left. \left. \left( \frac{2y}{b} - 1 \right)^2 (\alpha_n^4 Y_{i-3,n} - 2\alpha_n^2 Y_{i-3,n}'' + Y_{i-3,n}''') \right] \right] \end{aligned} \right\} (27)$$

Le second membre de cette équation est une fonction connue de  $y$ , les quantités  $Y_{i-1,n}, Y_{i-2,n}, Y_{i-3,n}$  l'étant elles-mêmes. Il s'agit donc d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre, qui va nous permettre de déterminer  $Y_{in}$ , compte tenu des conditions aux limites. La solution générale de l'équation homogène peut de nouveau être mise sous la forme :

$$\bar{Y}_{in} = A_{in} e^{\alpha_n y} + B_{in} e^{-\alpha_n y} + C_{in} \alpha_n y e^{\alpha_n y} - D_{in} \alpha_n y e^{-\alpha_n y}, \quad (28)$$

$A_{in}, \dots, D_{in}$  étant des constantes. Le lecteur vérifiera, d'autre part, que l'équation (27) admet la solution particulière :

$$\left. \begin{aligned} f_{in}(y) &= \alpha_n^2 y^2 (E_{in}^{(1)} e^{\alpha_n y} + F_{in}^{(1)} e^{-\alpha_n y}) + \\ &+ \alpha_n^3 y^3 (E_{in}^{(2)} e^{\alpha_n y} - F_{in}^{(2)} e^{-\alpha_n y}) + \dots \\ &\dots + \alpha_n^{i+1} y^{i+1} (E_{in}^{(i)} e^{\alpha_n y} + F_{in}^{(i)} e^{-\alpha_n y}) + \sum_{\mu=0}^{k+i} H_{in}^{(\mu)} \alpha_n^\mu y^\mu, \end{aligned} \right\} (29)$$

où  $E_{in}^{(1)}, \dots, F_{in}^{(i)}, H_{in}^{(0)}, \dots, H_{in}^{(k+i)}$  sont des constantes,  $k+1$  désignant toujours le nombre de termes de la série (17'). On calcule ces constantes en résolvant le système obtenu en substituant l'expression (29) dans l'équation (27) et en identifiant les coefficients des différents termes en  $y$  dans les deux membres. Cette opération montre que les constantes  $H_{in}^{(\mu)}$  dépendent des quantités  $a_{n\mu}$ , c'est-à-dire de la surcharge, mais pas des conditions aux limites (nous l'avons déjà reconnu pour  $H_{on}^{(\mu)}$ ). Nous donnerons plus loin les valeurs de  $H_{in}^{(\mu)}$  dans deux cas particuliers importants<sup>1</sup>. Par contre, les constantes  $E_{in}^{(1)}, \dots, F_{in}^{(i)}$  dépendent de ces conditions, car elles s'expriment en fonction des constantes  $A_{on}, A_{1n}, \dots, A_{i-1,n}, B_{on}, \dots, D_{i-1,n}$ , toutes déjà calculées, qui, elles-mêmes, dépendent des conditions aux limites, comme nous l'avons remarqué à propos du calcul de  $A_{on}, \dots, D_{on}$ .

En faisant successivement les calculs pour  $i = 1, 2, \dots$  on obtient :

$$\left. \begin{aligned} E_{1n}^{(1)} &= -\frac{3}{\alpha_n b} C_{on}, & F_{1n}^{(1)} &= \frac{3}{\alpha_n b} D_{on}, \\ E_{2n}^{(1)} &= -\frac{3}{\alpha_n^2 b^2} \left[ (1-\nu) A_{on} + \nu C_{on} + \alpha_n b (C_{on} + C_{1n}) \right], \\ F_{2n}^{(1)} &= -\frac{3}{\alpha_n^2 b^2} \left[ (1-\nu) B_{on} + \nu D_{on} - \alpha_n b (D_{on} + D_{1n}) \right], \\ E_{2n}^{(2)} &= \frac{7+\nu}{\alpha_n^2 b^2} C_{on}, & F_{2n}^{(2)} &= \frac{7+\nu}{\alpha_n^2 b^2} D_{on}, \\ E_{3n}^{(1)} &= \dots, & F_{3n}^{(1)} &= \dots, \end{aligned} \right\} (30)$$

Enfin, pour calculer  $A_{in}, \dots, D_{in}$ , substituons d'abord l'expression (26) de  $\zeta_i$  dans les quatre dernières conditions aux limites (10). Nous obtenons entre  $Y_{in}$  et ses trois premières dérivées par rapport à  $y$ , pour chaque valeur de  $n$ , quatre relations identiques — aux indices  $i$  près — aux équations du système (25). En remplaçant, dans ces relations,  $Y_{in}$  par la solution générale

$$Y_{in} = \bar{Y}_{in} + f_{in}(y), \quad (31)$$

où  $\bar{Y}_{in}$  et  $f_{in}$  ont respectivement les valeurs (28) et (29), nous sommes ramenés à résoudre le système de quatre équations à quatre inconnues :

$$\left. \begin{aligned} L_{11} A_{in} + L_{12} B_{in} + L_{13} C_{in} + L_{14} D_{in} &= \\ = \frac{B' \alpha_n}{D'} f_{in}(0) - \left( 2 - \nu + \frac{C'}{D'^2} \frac{dD'}{dy} \right) \frac{f'_{in}(0)}{\alpha_n} + \frac{f'''_{in}(0)}{\alpha_n^3}, \\ L_{21} A_{in} + L_{22} B_{in} + L_{23} C_{in} + L_{24} D_{in} &= \\ = \nu f_{in}(0) - \frac{C'}{D'} f'_{in}(0) - \frac{f'''_{in}(0)}{\alpha_n^2}, \\ L_{31} A_{in} + L_{32} B_{in} + L_{33} C_{in} + L_{34} D_{in} &= \\ = -\frac{B'' \alpha_n}{D''} f_{in}(b) - \left( 2 - \nu - \frac{C''}{D''^2} \frac{dD''}{dy} \right) \frac{f'_{in}(b)}{\alpha_n} + \frac{f'''_{in}(b)}{\alpha_n^3}, \\ L_{41} A_{in} + L_{42} B_{in} + L_{43} C_{in} + L_{44} D_{in} &= \\ = \nu f_{in}(b) + \frac{C''}{D''} f'_{in}(b) - \frac{f'''_{in}(b)}{\alpha_n^2}, \end{aligned} \right\} (32)$$

où

<sup>1</sup> Pour ne pas alourdir notre exposé, nous renonçons à donner le système d'équations permettant de calculer les constantes  $H_{in}^{(\mu)}$ . Ce système est analogue à (23).



$$\left. \begin{aligned}
 L_{11} &= 1 - \nu - \frac{B'\alpha_n}{D'} + \frac{C' dD'}{D'^2 dy}, \\
 L_{12} &= \nu - 1 - \frac{B'\alpha_n}{D'} - \frac{C' dD'}{D'^2 dy}, \\
 L_{13} &= -1 - \nu + \frac{C' dD'}{D'^2 dy}, \quad L_{14} = 1 + \nu - \frac{C' dD'}{D'^2 dy}, \\
 L_{21} &= 1 - \nu + \frac{C'\alpha_n}{D'}, \quad L_{22} = 1 - \nu - \frac{C'\alpha_n}{D'}, \\
 L_{23} &= 2 + \frac{C'\alpha_n}{D'}, \quad L_{24} = 2 - \frac{C'\alpha_n}{D'}, \\
 L_{31} &= \left(1 - \nu + \frac{B''\alpha_n}{D''} - \frac{C'' dD''}{D''^2 dy}\right) e^{\alpha_n b}, \\
 L_{32} &= \left(\nu - 1 + \frac{B''\alpha_n}{D''} + \frac{C'' dD''}{D''^2 dy}\right) e^{-\alpha_n b}, \\
 L_{33} &= \left[-1 - \nu - \frac{C'' dD''}{D''^2 dy} + \right. \\
 &+ \left. \left(1 - \nu + \frac{B''\alpha_n}{D''} - \frac{C'' dD''}{D''^2 dy}\right) \alpha_n b\right] e^{\alpha_n b}, \\
 L_{34} &= \left[1 + \nu + \frac{C'' dD''}{D''^2 dy} + \right. \\
 &+ \left. \left(1 - \nu - \frac{B''\alpha_n}{D''} - \frac{C'' dD''}{D''^2 dy}\right) \alpha_n b\right] e^{-\alpha_n b}, \\
 L_{41} &= \left(1 - \nu - \frac{C''\alpha_n}{D''}\right) e^{\alpha_n b}, \\
 L_{42} &= \left(1 - \nu + \frac{C''\alpha_n}{D''}\right) e^{-\alpha_n b}, \\
 L_{43} &= \left[2 - \frac{C''\alpha_n}{D''} + \left(1 - \nu - \frac{C''\alpha_n}{D''}\right) \alpha_n b\right] e^{\alpha_n b}, \\
 L_{44} &= \left[2 + \frac{C''\alpha_n}{D''} - \left(1 - \nu + \frac{C''\alpha_n}{D''}\right) \alpha_n b\right] e^{-\alpha_n b}.
 \end{aligned} \right\} (33)$$

Pour résoudre le système (32) par rapport à  $A_{in}, \dots, D_{in}$ , on peut utiliser soit la *théorie classique des déterminants*, soit le procédé de l'*algorithme de Gauss*, soit encore les méthodes plus récentes du commandant *Cholesky*<sup>1</sup> ou de l'astronome polonais *Banachiewicz*<sup>2</sup>. Des simplifications interviendront, en général, dans les calculs, dues aux valeurs particulières (33) des coefficients  $L$ , qui ne dépendent ni de l'indice  $i$ , ni des fonctions  $f_{in}$ . Si l'on utilise par exemple le premier de ces procédés, on remarquera que le déterminant fondamental du système et les déterminants mineurs du 3<sup>e</sup> degré qui interviennent dans le calcul des inconnues, lorsqu'on développe les numérateurs en fonction des éléments des colonnes correspondantes, ne dépendent que de l'indice  $n$  et peuvent être calculés une fois pour toutes, indépendamment de l'indice  $i$  et des fonctions  $f_{in}$ . On remarquera encore que pour  $n > 5$ , les termes où  $e^{-\alpha_n b} = e^{-\frac{n\pi}{a} b}$  figure comme facteur deviennent en général très petits et peuvent être négligés, ce qui simplifie également le calcul.

En résumé, l'étude théorique d'une plaque rectangulaire fléchie d'épaisseur linéairement variable comprend les opérations suivantes :

1. Calcul des coefficients  $e_n$  de la formule (15), en utilisant la formule (16 b), et des coefficients  $a_{ni}$  du développement limité (17'), en appliquant par exemple la formule de *Maclaurin* en négligeant le reste.

2. Détermination des constantes  $H_{on}^{(\mu)}$  de la solution particulière (22) à l'aide du système (23), puis des constantes  $H_{in}^{(\mu)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) de la formule (29), à l'aide de systèmes analogues.

3. Calcul du déterminant fondamental et des déterminants mineurs du 3<sup>e</sup> degré du système (32), pour un certain nombre de valeurs de  $n$ , choisi suffisamment grand pour permettre d'évaluer les séries (26) avec une bonne approximation.

4. Détermination des constantes  $A_{on}, \dots, D_{on}$  à l'aide du système (32), en posant  $i = 0$ . Les quantités  $f_{on}(0), f'_{on}(0), \dots, f_{on}(b), f'_{on}(b), \dots$  figurant aux seconds membres se déduisent de la formule (22).

5. Calcul des constantes  $E_{1n}^{(1)}, F_{1n}^{(1)}$  en utilisant les deux premières formules du système (30). Ces deux grandeurs et les quantités  $H_{1n}^{(\mu)}$  déjà obtenues, introduites dans (29) où l'on pose  $i = 1$ , donnent la solution particulière  $f_{1n}(y)$ .

6. Détermination des constantes  $A_{1n}, \dots, D_{1n}$  à l'aide du système (32), en posant  $i = 1$ , les seconds membres se déduisant de  $f_{1n}(y)$ .

Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait atteint une valeur de l'indice  $i$  suffisamment grande pour permettre de calculer avec une bonne approximation la série (13), ainsi que ses dérivées premières, secondes et éventuellement troisièmes, par rapport à  $x, y$ .

7. Calcul des valeurs de la fonction  $\zeta(x, y, \lambda)$  et de ses dérivées, à l'aide de la série (13), puis détermination des moments  $M_x, M_y, M_{xy}$  et des tensions  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  en utilisant les formules (3), (4) et (5). On pourra éventuellement calculer encore les réactions des appuis à l'aide de formules simples à établir, en faisant intervenir les dérivées troisièmes de  $\zeta$ .

*Remarque.* Nous avons supposé, jusqu'à présent, que l'épaisseur de la plaque variait selon la formule (6), c'est-à-dire que  $h$  était constant dans la direction  $x$ , mais variait linéairement dans la direction  $y$ . On peut considérer également le cas plus général où l'épaisseur varie linéairement en fonction des deux variables  $x$  et  $y$ , c'est-à-dire où

$$h = h_0 \left[ 1 + \lambda \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) + \mu \left( \frac{2x}{a} - 1 \right) \right], \quad (6')$$

$\lambda$  et  $\mu$  étant des constantes. Un calcul analogue à celui que nous avons fait dans le § 1 montre alors que  $\zeta$  doit satisfaire à une équation aux dérivées partielles passablement plus compliquée que (9). On peut cependant chercher à intégrer cette nouvelle équation à l'aide de la série double

$$\zeta(x, y, \lambda, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_{ik}(x, y) \lambda^i \mu^k. \quad (13')$$

En introduisant cette série dans l'équation différentielle, on obtient pour les coefficients  $\zeta_{ik}(x, y)$  le système suivant :

<sup>1</sup> Voir BENOIT, *Sur une méthode de résolution des équations normales, etc.* (procédé du commandant CHOLESKY). Bull. géodésique 2 (1924).

<sup>2</sup> TH. BANACHIEWICZ, *Méthode de résolution numérique des équations linéaires*. Bull. internat. Acad. Polon. Sci., S. A., 1938, p. 393-404.

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Delta\zeta_{00} &= \frac{P}{D_0}, \\ \dots\dots\dots \\ \Delta\Delta\zeta_{ik} &= L_b(\zeta_{i-1, k}) + L_a(\zeta_{i, k-1}) + \\ &\quad + L_{bb}(\zeta_{i-2, k}) + L_{ba}(\zeta_{i-1, k-1}) + \\ &\quad + L_{aa}(\zeta_{i, k-2}) + L_{bbb}(\zeta_{i-3, k}) + \\ &\quad + L_{bba}(\zeta_{i-2, k-1}) + L_{baa}(\zeta_{i-1, k-2}) + \\ &\quad + L_{aaa}(\zeta_{i, k-3}), \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} (14')$$

où  $L_b, L_a, L_{bb}, \dots, L_{aaa}, \dots$  désignent des opérateurs différentiels. On a, par exemple :

$$\begin{aligned} L_b(\dots) &= -3 \left[ \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \Delta\Delta(\dots) + \frac{4}{b} \frac{\partial}{\partial y} \Delta(\dots) \right], \\ L_{ba}(\dots) &= -6 \left[ \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \left( \frac{2x}{a} - 1 \right) \Delta\Delta(\dots) + \right. \\ &\quad + \frac{4}{a} \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} \Delta(\dots) + \frac{4}{b} \left( \frac{2x}{a} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \Delta(\dots) + \\ &\quad \left. + (1 - \nu) \frac{8}{ab} \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x \partial y} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les équations (14'), on pourra déterminer successivement  $\zeta_{00}, \zeta_{01}, \zeta_{10}, \zeta_{11}, \zeta_{12}, \dots$ , en tenant compte des conditions aux limites. Comme précédemment, on est en effet ramené à des calculs successifs de la plaque donnée, la surcharge considérée dans chaque calcul étant fonction des déformations de la plaque obtenues par les opérations précédentes.

Malheureusement, la méthode de Maurice Lévy n'est pas ici applicable, certains des opérateurs  $L$  contenant non seulement des termes en  $y$  et  $\frac{\partial}{\partial y}$ , mais aussi en  $x$  et  $\frac{\partial}{\partial x}$ .

Dans le cas où la plaque est simplement appuyée le long du contour, on pourrait appliquer la méthode de Navier, consistant à utiliser des séries trigonométriques multiples, mais les calculs seraient alors beaucoup plus compliqués que dans le cas où l'épaisseur varie dans une seule direction<sup>1</sup>.

**§ 3. Application au cas d'une plaque rectangulaire d'épaisseur linéairement variable, simplement appuyée le long de trois côtés et soumise à une pression hydrostatique.**

Revenons au cas où l'épaisseur varie uniquement dans la direction de l'axe  $y$ , selon la formule (6), et commençons par calculer les constantes  $H_{in}^{(\mu)}$  dans deux cas particuliers, celui d'une pression constante  $p_0$  et celui d'une pression hydrostatique  $p = \gamma y$ .

1. *Cas d'une pression constante  $p_0$ .* L'application de la formule (16 b) montre que  $e_n$  se réduit à la valeur constante :

$$e_n = \frac{4 p_0}{a D_0 \alpha_n}.$$

En utilisant le système (23) (qui se réduit ici à une seule équation) et les systèmes analogues dont il a été

question au § 2, donnés par la substitution de l'expression (29) dans l'équation (27), on obtient les valeurs :

$$\left. \begin{aligned} H_{on}^{(0)} &= \frac{4 p_0}{a D_0 \alpha_n^5}, \\ H_{1n}^{(0)} &= \frac{12 p_0}{a D_0 \alpha_n^5}, \quad H_{1n}^{(1)} = -\frac{24 p_0}{ab D_0 \alpha_n^6}, \\ H_{2n}^{(0)} &= \frac{24 p_0}{a D_0 \alpha_n^5} + \frac{96(1 + \nu) p_0}{ab^2 D_0 \alpha_n^7}, \quad H_{2n}^{(1)} = -\frac{96 p_0}{ab D_0 \alpha_n^6}, \\ H_{2n}^{(2)} &= \frac{96 p_0}{ab^2 D_0 \alpha_n^7}, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} (34)$$

2. *Cas d'une pression hydrostatique  $p = \gamma y$*  (la plaque a ses côtés  $x = 0$  et  $x = a$  verticaux et limite un liquide de poids spécifique  $\gamma$ , dont la surface libre atteint le côté  $y = 0$ ). La formule (16 b) donne, dans ce cas :

$$e_n = \frac{4 \gamma y}{a D_0 \alpha_n}.$$

La série (17') ne comprend également qu'un seul terme :

$$e_n = a_{n1} y, \quad \text{où} \quad a_{n1} = \frac{4 \gamma}{a D_0 \alpha_n}.$$

On en déduit pour les constantes  $H_{in}^{(\mu)}$  les valeurs :

$$\left. \begin{aligned} H_{on}^{(0)} &= 0, \quad H_{on}^{(1)} = \frac{4 \gamma}{a D_0 \alpha_n^6}, \\ H_{1n}^{(0)} &= -\frac{48 \gamma}{ab D_0 \alpha_n^7}, \quad H_{1n}^{(1)} = \frac{12 \gamma}{a D_0 \alpha_n^6}, \\ &\quad H_{1n}^{(2)} = -\frac{24 \gamma}{ab D_0 \alpha_n^7}, \\ H_{2n}^{(0)} &= -\frac{192 \gamma}{ab D_0 \alpha_n^7}, \quad H_{2n}^{(1)} = \frac{24 \gamma}{a D_0 \alpha_n^6} + \frac{96(5 + \nu) \gamma}{ab^2 D_0 \alpha_n^8}, \\ H_{2n}^{(2)} &= -\frac{96 \gamma}{ab D_0 \alpha_n^7}, \quad H_{2n}^{(3)} = \frac{96 \gamma}{ab^2 D_0 \alpha_n^8}, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} (35)$$

Remarquons que dans le cas plus général d'une pression hydrostatique  $p = p_0 + \gamma y$ , où la surface libre du liquide est située à la hauteur  $\frac{p_0}{\gamma}$  au-dessus du côté  $y = 0$ , les constantes  $H_{in}^{(\mu)}$  s'obtiennent en ajoutant les valeurs (34) et (35) de mêmes indices.

Nous allons maintenant étudier en détail le cas d'une plaque carrée  $a = b$ , soumise à une pression hydrostatique  $p = \gamma y$ , en supposant le côté  $y = 0$  libre et les côtés  $x = 0, x = a, y = b$  simplement appuyés.

Les conditions aux limites sont alors exprimées par les relations (12), car  $B' = C' = 0$  et  $B'' = \infty, C'' = 0$ , et les constantes  $H_{in}^{(\mu)}$  ont les valeurs (35), où  $a = b$ . Le système (32) se simplifie à un tel point que sa solution peut être mise sous la forme quasi explicite suivante :

<sup>1</sup> Voir H. FAVRE et B. GILG, *loc. cit.*, p. 358-361.



$$\begin{aligned}
 C_{in} &= \frac{1}{3 + \nu} \frac{1}{1 - \nu} (e^{2b\alpha_n} - e^{-2b\alpha_n}) + 4b\alpha_n \left[ \left( f_{in}(b) - \frac{f''_{in}(b)}{\alpha_n^2} \right) \left\{ \frac{3 + \nu}{2(1 - \nu)} e^{b\alpha_n} + \left( \frac{1}{2} + b\alpha_n \right) e^{-b\alpha_n} \right\} - \right. \\
 &\quad - 2f_{in}(b)e^{-b\alpha_n} + \frac{e^{-2b\alpha_n}}{1 - \nu} \left\{ -\nu f_{in}(0) - (2 - \nu) \frac{f'_{in}(0)}{\alpha_n} + \frac{f''_{in}(0)}{\alpha_n^2} + \frac{f'''_{in}(0)}{\alpha_n^3} \right\} + \frac{1}{1 - \nu} \left\{ -\nu f_{in}(0) + \right. \\
 &\quad \left. \left. + (2 - \nu) \frac{f'_{in}(0)}{\alpha_n} + \frac{f''_{in}(0)}{\alpha_n^2} - \frac{f'''_{in}(0)}{\alpha_n^3} \right\} \right], \\
 D_{in} &= \frac{1}{3 + \nu} \frac{1}{1 - \nu} (e^{2b\alpha_n} - e^{-2b\alpha_n}) + 4b\alpha_n \left[ \left( \frac{f''_{in}(b)}{\alpha_n^2} - f_{in}(b) \right) \left\{ \frac{3 + \nu}{2(1 - \nu)} e^{-b\alpha_n} + \left( \frac{1}{2} - b\alpha_n \right) e^{b\alpha_n} \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + 2f_{in}(b)e^{b\alpha_n} - \frac{e^{2b\alpha_n}}{1 - \nu} \left\{ -\nu f_{in}(0) + (2 - \nu) \frac{f'_{in}(0)}{\alpha_n} + \frac{f''_{in}(0)}{\alpha_n^2} - \frac{f'''_{in}(0)}{\alpha_n^3} \right\} - \frac{1}{1 - \nu} \left\{ -\nu f_{in}(0) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (2 - \nu) \frac{f'_{in}(0)}{\alpha_n} + \frac{f''_{in}(0)}{\alpha_n^2} + \frac{f'''_{in}(0)}{\alpha_n^3} \right\} \right], \\
 A_{in} &= -\frac{1}{2} \left[ C_{in} + \frac{3 + \nu}{1 - \nu} D_{in} + \frac{1}{1 - \nu} \left\{ -\nu f_{in}(0) + (2 - \nu) \frac{f'_{in}(0)}{\alpha_n} + \frac{f''_{in}(0)}{\alpha_n^2} - \frac{f'''_{in}(0)}{\alpha_n^3} \right\} \right], \\
 B_{in} &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{3 + \nu}{1 - \nu} C_{in} + D_{in} + \frac{1}{1 - \nu} \left\{ -\nu f_{in}(0) - (2 - \nu) \frac{f'_{in}(0)}{\alpha_n} + \frac{f''_{in}(0)}{\alpha_n^2} + \frac{f'''_{in}(0)}{\alpha_n^3} \right\} \right].
 \end{aligned} \tag{36}$$

Tableau des valeurs des constantes  $A_{on}, B_{on} \dots$   
 (multipliées par  $Eh_0^3/12 (1 - \nu^2) a^5 \gamma$ )  
 pour une plaque carrée  $a = b$  appuyée le long des côtés  
 $x = 0, x = a, y = b$ , et soumise à une pression hydrostatique  
 $p = \gamma y$  ( $\nu = 0,25$ )

[Les valeurs indiquées sont encore à multiplier par 10 élevé aux puissances indiquées dans les petites colonnes]

n	1		3		5		7	
$A_{on}$	-1,48059	-3	-2,47971	-8	-5,58107	-12	-2,62547	-15
$B_{on}$	5,04703	-3	8,18497	-6	3,82351	-7	5,07803	-8
$C_{on}$	2,85457	-4	2,17045	-9	3,15173	-13	1,09435	-16
$D_{on}$	-1,62287	-3	-3,06223	-6	-1,43380	-7	-1,90426	-8
$H_{on}^{(1)}$	4,16065	-3	5,70733	-6	2,66281	-7	3,53649	-8
$A_{1n}$	1,53365	-3	7,09795	-9	9,76176	-13	3,33736	-16
$B_{1n}$	1,76656	-2	2,35723	-5	1,11857	-6	1,49639	-7
$C_{1n}$	1,12378	-3	7,20219	-9	1,00571	-12	3,43234	-16
$D_{1n}$	-5,41489	-4	-5,14900	-6	-3,15798	-7	-4,62800	-8
$E_{1n}^{(1)}$	-2,72591	-4	-6,90875	-10	-6,01936	-14	-1,49290	-17
$F_{1n}^{(1)}$	-1,54973	-3	-9,74739	-7	-2,73835	-8	-2,59777	-9
$H_{1n}^{(0)}$	-1,58925	-2	-7,26680	-6	-2,03424	-7	-1,92977	-8
$H_{1n}^{(1)}$	1,24819	-2	1,71220	-5	7,98844	-7	1,06095	-7
$H_{1n}^{(2)}$	-7,94625	-3	-3,63340	-6	-1,01712	-7	-9,64886	-9
$A_{2n}$	-5,9038	-3	-3,78395	-8	-7,78628	-12	-3,55495	-15
$B_{2n}$	7,15255	-2	5,22483	-5	2,30039	-6	3,02019	-7
$C_{2n}$	5,04373	-4	7,48193	-9	1,13549	-12	4,00030	-16
$D_{2n}$	2,8500	-3	-5,88865	-6	-4,66759	-7	-7,51924	-8
$E_{2n}^{(1)}$	-1,02988	-3	-2,37361	-9	-2,02335	-13	-4,97071	-17
$F_{2n}^{(1)}$	-3,09408	-3	-2,79519	-6	-9,07472	-8	-9,11794	-9
$E_{2n}^{(2)}$	2,09690	-4	1,77151	-10	9,26077	-15	1,64058	-18
$F_{2n}^{(2)}$	-1,19213	-3	-2,49939	-7	-4,21294	-9	-2,85476	-10
$H_{2n}^{(0)}$	-6,35700	-2	-2,90672	-5	-8,13696	-7	-7,71909	-8
$H_{2n}^{(1)}$	7,80806	-2	4,23398	-5	1,73366	-6	2,21403	-7
$H_{2n}^{(2)}$	-3,17850	-2	-1,45336	-5	-4,06848	-7	-3,85954	-8
$H_{2n}^{(3)}$	1,01175	-2	1,54206	-6	2,59008	-8	1,75504	-9

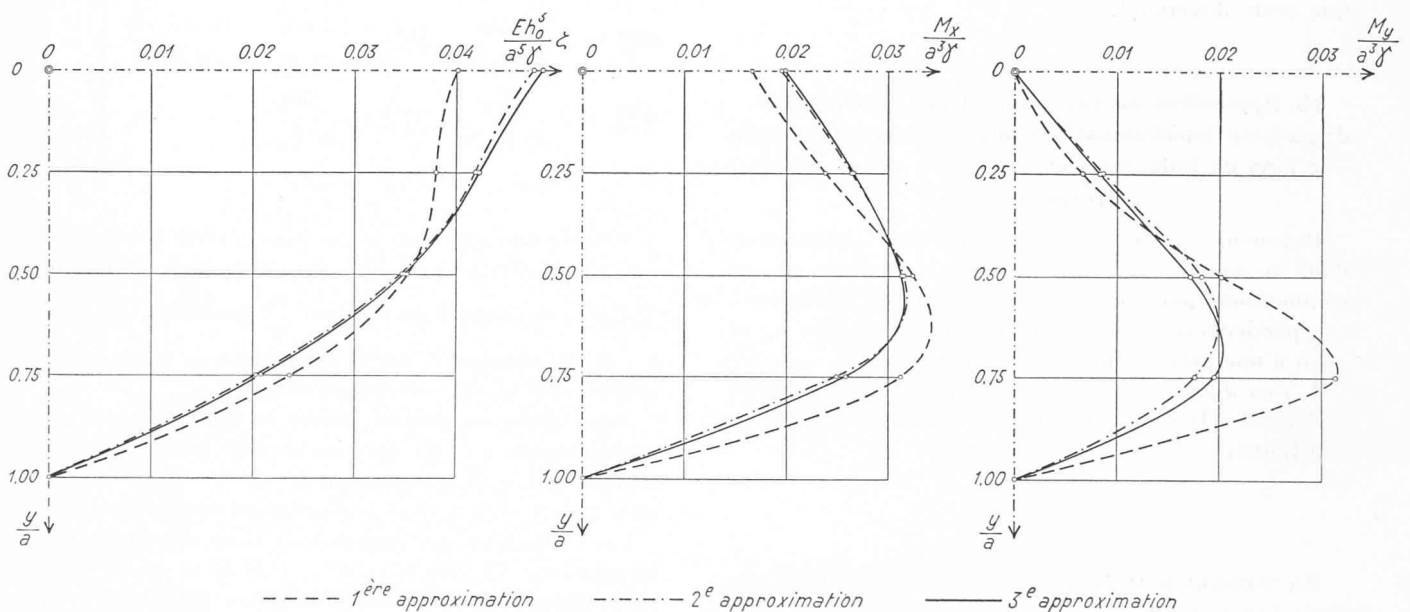


Fig. 2. — Plaque carrée, simplement appuyée le long des trois côtés  $x = 0, x = a, y = b$ , soumise à une pression hydrostatique  $p = \gamma y$ . Cas où  $\lambda = 0,2$  et  $\nu = 0,25$ . Diagrammes des grandeurs  $z, M_x$  et  $M_y$  le long de l'axe vertical de la plaque ( $x = a/2$ ), pour les trois premières approximations.

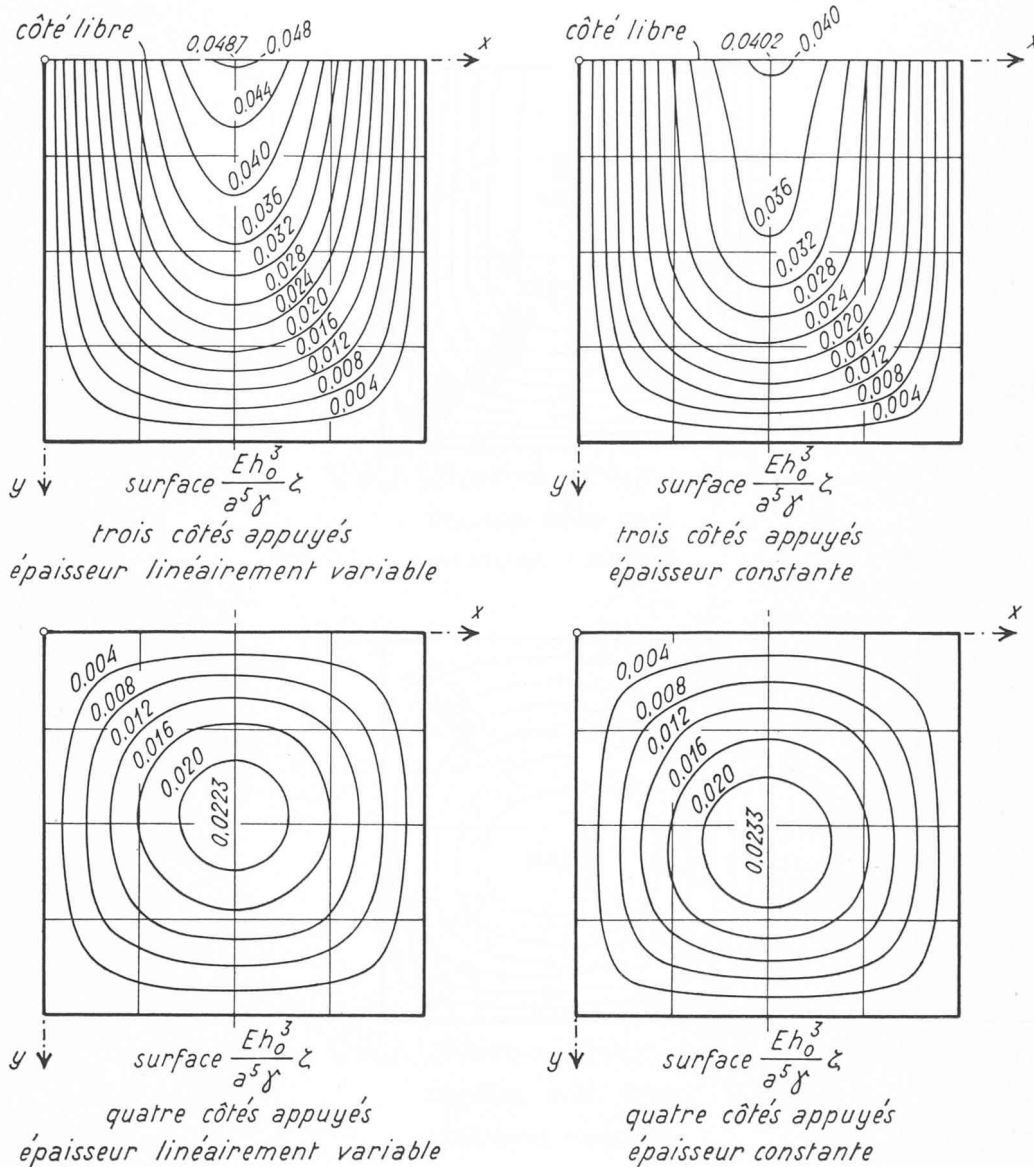


Fig. 3. — Plaque carrée, d'épaisseur linéairement variable ( $\lambda = 0,2$ ) ou constante, appuyée le long de trois ou de quatre côtés et soumise à une pression hydrostatique  $p = \gamma y$ . Surfaces  $\frac{Eh_0^3}{a^5\gamma} \zeta$ , pour  $\nu = 0,25$ .

Le calcul numérique de ces constantes est donc, dans ce cas, relativement rapide. En faisant les opérations dans l'ordre indiqué à la fin du paragraphe précédent, et en poussant les calculs jusqu'à  $i = 2$  et  $n = 7$  (par raison de symétrie, seuls les nombres  $n$  impairs interviennent), nous avons obtenu, en choisissant  $\nu = 0,25$ , les valeurs des constantes  $A_{in}, \dots, D_{in}, E_{in}, F_{in}, \dots, H_{in}^{(0)}, \dots, H_{in}^{(k+i)}$  indiquées dans le tableau ci-contre. En supposant  $\lambda = 0,2$ <sup>1</sup> et en limitant la série (13) à ses trois premiers termes, il a été ensuite facile de calculer les valeurs approchées de  $\zeta(x, y, \lambda)$  et de ses deux pre-

<sup>1</sup> Les valeurs indiquées pour les constantes dans les tableaux peuvent être utilisées pour des valeurs quelconques de  $\lambda$ , pourvu que la série (13) soit convergente.

mières dérivées par rapport à  $x$  et  $y$ , d'où l'on a déduit, à l'aide des relations (3) et (5), les valeurs des moments  $M_x, M_y, M_{xy}$  et celles des tensions  $(\sigma_x)_i, (\sigma_y)_i, (\tau_{xy})_i$ .

Les diagrammes de la figure 2 représentent les valeurs obtenues pour les grandeurs  $\zeta, M_x$  et  $M_y$  le long de l'axe vertical ( $x = a/2$ ) de la plaque, pour les trois premières approximations du calcul. Dans la première approximation, on a limité la série (13) à son premier terme, dans la deuxième, à ses deux premiers termes, etc.

On voit que la convergence est assez rapide et qu'il serait inutile d'aller jusqu'à la quatrième approximation. C'est pourquoi tous les calculs ont été faits en limitant la série (13) à ses trois premiers termes.

A titre de comparaison, nous avons fait également

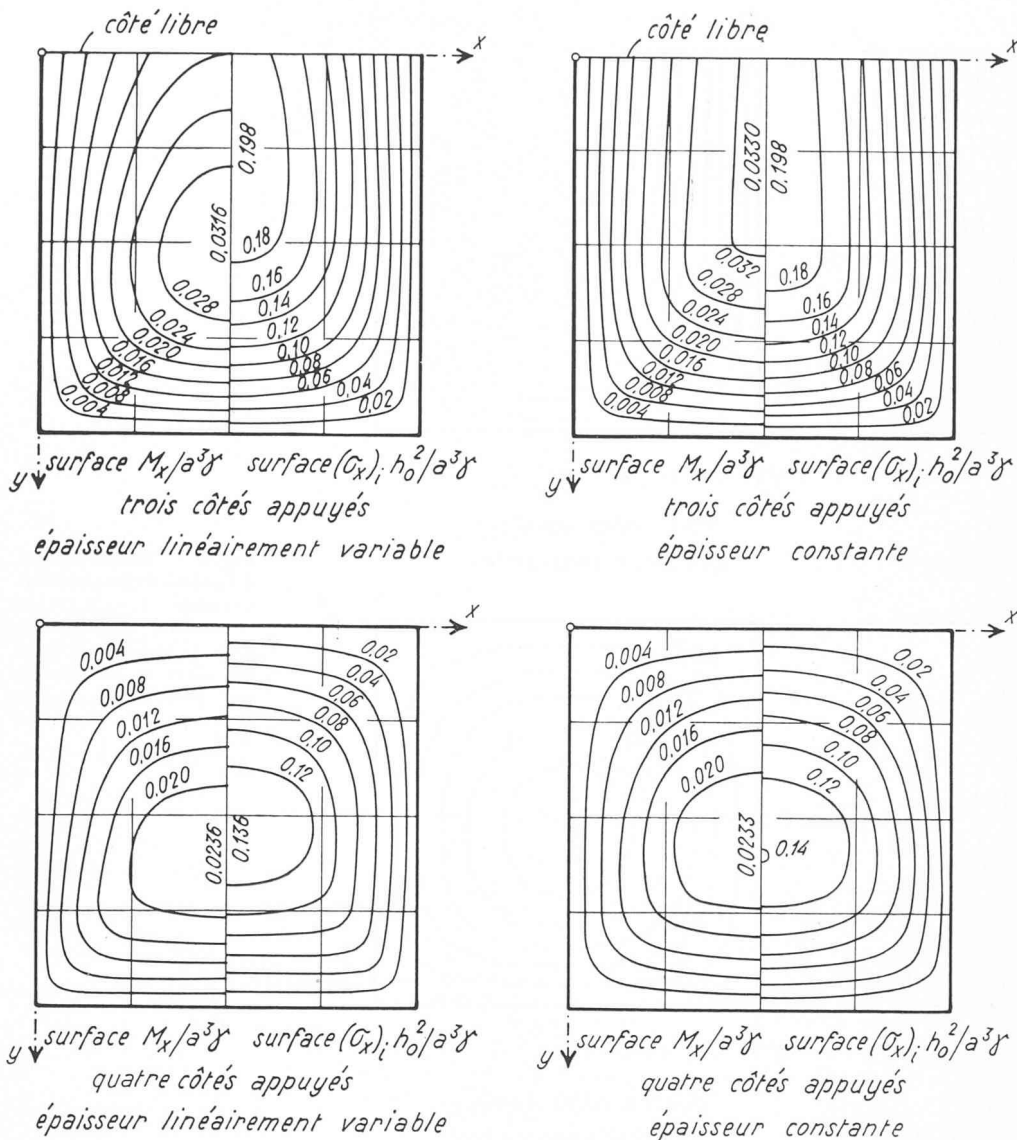


Fig. 4. — Plaque carrée, d'épaisseur linéairement variable ( $\lambda = 0,2$ ) ou constante, appuyée le long de trois ou de quatre côtés et soumise à une pression hydrostatique  $p = \gamma y$ . Surfaces  $M_x/a^3\gamma$  et  $(\sigma_x)_i h_0^2/a^3\gamma$ , pour  $\nu = 0,25$ .

les calculs dans les mêmes hypothèses, mais en supposant l'épaisseur constante ( $\lambda = 0$ ), puis en admettant de nouveau une épaisseur linéairement variable ( $\lambda = 0,2$ ), mais la plaque appuyée le long des quatre côtés<sup>1</sup>, et enfin, en supposant simultanément l'épaisseur constante et la plaque appuyée le long de ses quatre côtés.

La figure 3 donne les courbes de niveau des surfaces représentant la fonction  $\zeta$ , dans les quatre cas considérés. Les figures 4, 5, 6 montrent, dans les parties des carrés situées à gauche de l'axe de symétrie  $x = a/2$ , les courbes de niveau des surfaces représentant respectivement  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  et, dans les parties situées à droite de cet

axe, les courbes des surfaces représentant les tensions  $(\sigma_x)_i$ ,  $(\sigma_y)_i$ ,  $(\tau_{xy})_i$ , toujours pour les quatre cas étudiés.

Toutes ces figures montrent éloquentement l'influence de la variation de l'épaisseur et celle, en général plus considérable, des conditions d'appui, sur les déformations et sur les efforts intérieurs de la plaque.

Dans le cas des trois côtés appuyés, la variation de l'épaisseur entraîne une augmentation des déformations (comparer les deux parties supérieures de la figure 3). Le contraire se produit — dans une beaucoup moins grande mesure il est vrai — lorsque la plaque repose sur quatre côtés (voir les deux parties inférieures de la figure 3). Dans ce dernier cas, si l'épaisseur varie, la surface  $\zeta$  est quasi symétrique par rapport au plan

<sup>1</sup> Ce cas avait déjà été traité par H. FAVRE et B. GILG comme nous l'avons remarqué dans notre introduction.

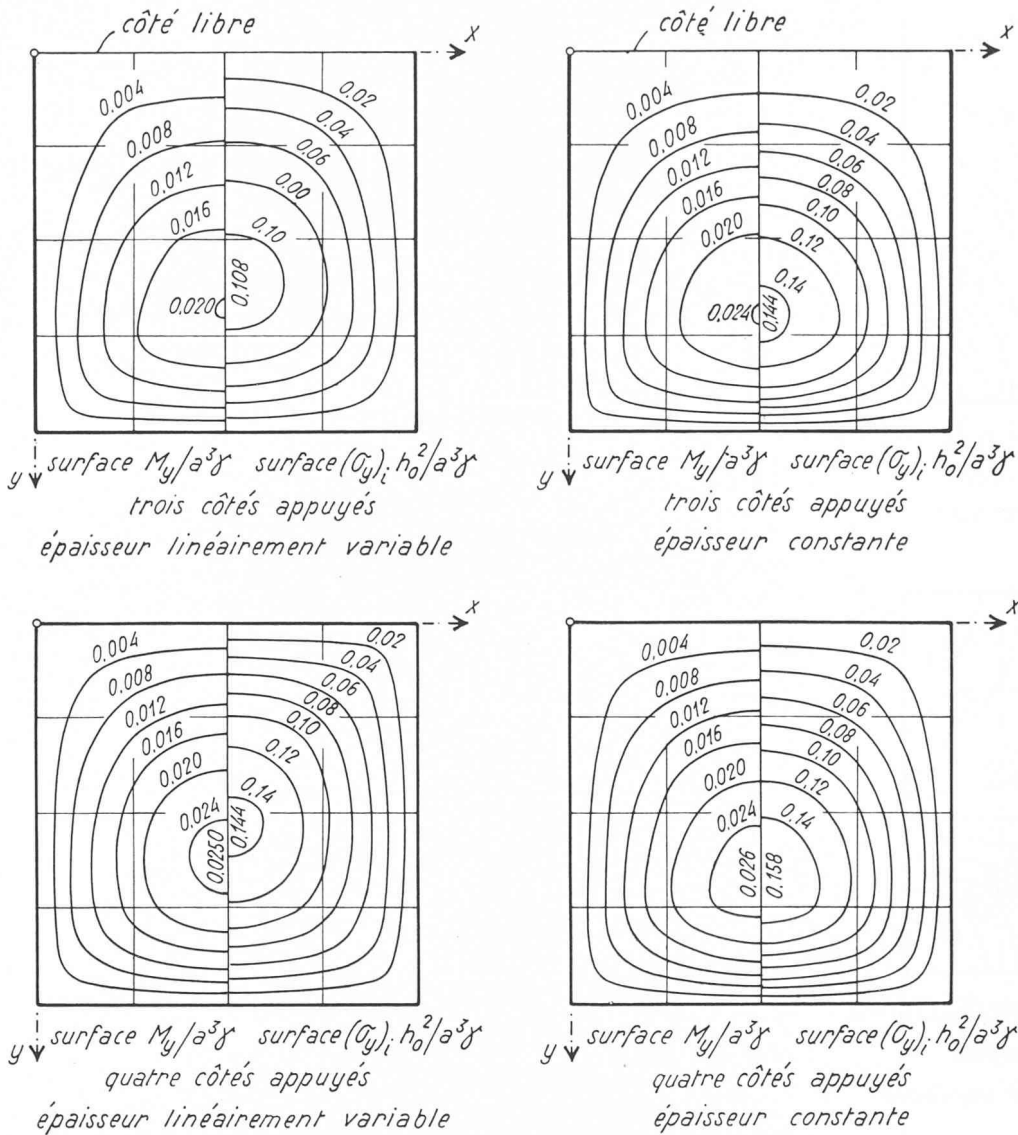


Fig. 5. — Plaque carrée, d'épaisseur linéairement variable ( $\lambda=0,2$ ) ou constante, appuyée le long de trois ou de quatre côtés et soumise à une pression hydrostatique  $p = \gamma y$ . Surfaces  $\frac{M_y}{a^3\gamma}$  et  $\frac{(\sigma_y)_i h_0^2}{a^3\gamma}$ , pour  $\nu = 0,25$ .

horizontal  $y = b/2$ , ce qui montre que la plaque se déforme sensiblement comme si son épaisseur et sa surcharge étaient constantes. Cela signifie que la variation d'épaisseur compense, en quelque sorte, la variation de la pression, quant aux déformations.

L'influence de la variation de l'épaisseur sur la répartition des moments  $M_x$  et des tensions  $(\sigma_x)_i$  est plus grande dans le cas des trois côtés appuyés que dans celui où la plaque repose le long du contour entier (comparer entre elles les deux parties supérieures de la figure 4, puis les deux parties inférieures). On voit également que la suppression de l'appui du quatrième côté entraîne, dans les deux cas de variation d'épaisseur considérés, une importante augmentation des moments  $M_x$  et des tensions  $(\sigma_x)_i$  (comparer les deux parties de gauche de la

figure 4 d'une part, et les deux parties de droite, d'autre part).

La variation de l'épaisseur engendre une diminution des moments  $M_y$  et des tensions  $(\sigma_y)_i$ , surtout lorsque la plaque est appuyée le long de trois côtés (comparer les deux parties supérieures, puis les deux parties inférieures de la figure 5). La suppression de l'appui du quatrième côté entraîne une diminution de ces moments et de ces tensions, particulièrement sensible dans le cas de l'épaisseur variable (comparer les deux parties de gauche, puis celles de droite de la figure 5).

Enfin, la variation de l'épaisseur engendre une augmentation des valeurs absolues des moments de torsion  $M_{xy}$ , surtout dans la partie inférieure de la plaque, mais ne modifie pas sensiblement les tensions tangentielles  $(\tau_{xy})_i$

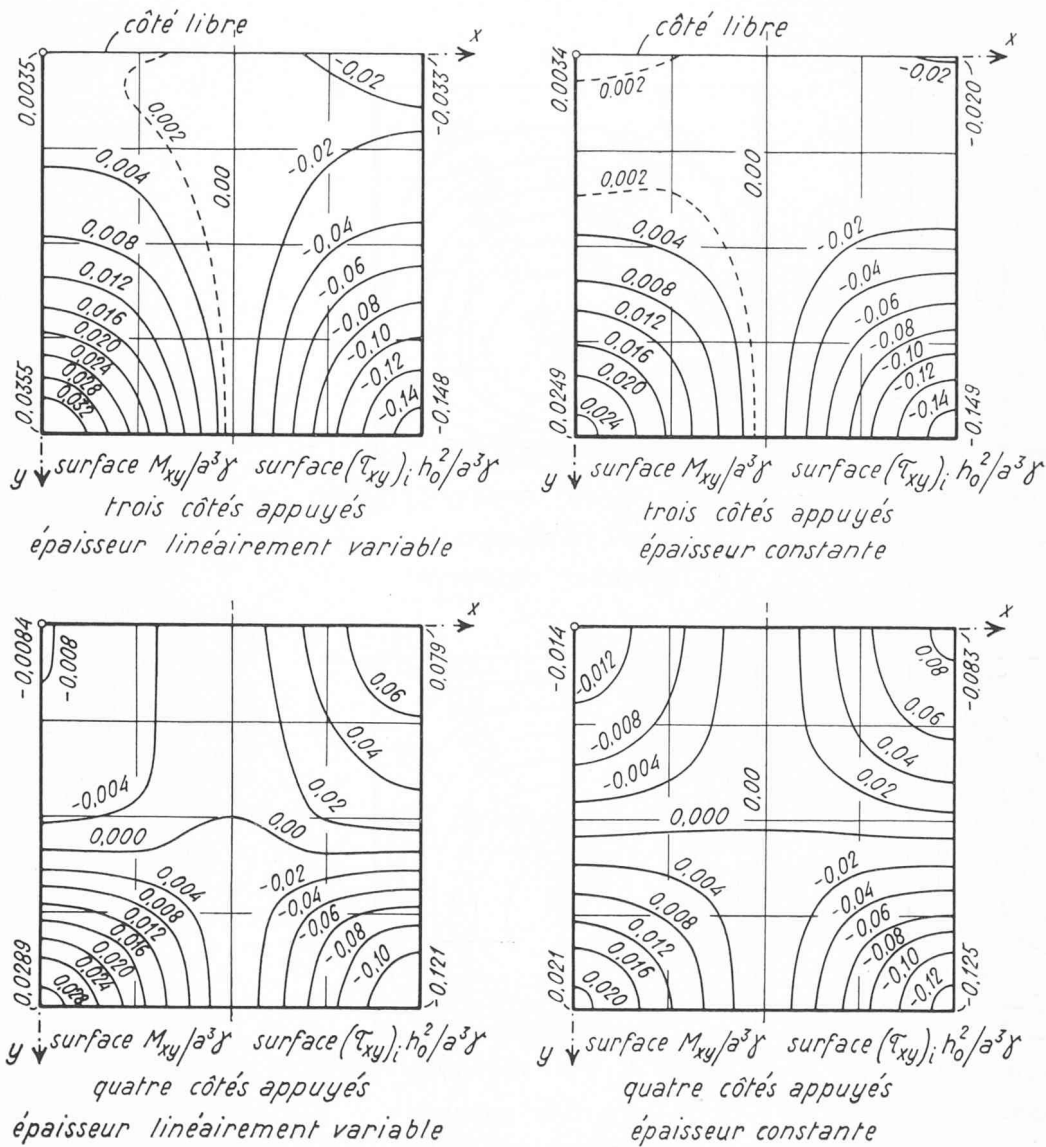


Fig. 6. — Plaque carrée, d'épaisseur linéairement variable ( $\lambda=0,2$ ) ou constante, appuyée le long de trois ou de quatre côtés et soumise à une pression hydrostatique  $p = \gamma y$ . Surfaces  $\frac{M_{xy}}{a^3\delta}$  et  $\frac{(\tau_{xy})_i h_0^2}{a^3\delta}$ , pour  $\nu = 0,25$ .

(comparer les deux parties supérieures, puis les deux parties inférieures de la figure 6). La suppression de l'appui du quatrième côté entraîne une augmentation sensible des valeurs de  $|M_{xy}|$  et de  $|(\tau_{xy})_i|$  dans la partie inférieure de la plaque, mais une diminution dans la partie supérieure (comparer les deux parties de gauche, puis les deux parties de droite de la figure 6).

On voit ainsi que, dans le cas d'une plaque carrée soumise à une pression hydrostatique  $p = \gamma y$ , il est difficile de porter un jugement global sur l'influence favorable ou défavorable — que peut avoir une variation de l'épaisseur sur les déformations et les efforts intérieurs : cette influence dépend beaucoup des conditions d'appui et des grandeurs considérées. Les quelques remarques que nous avons formulées permettront cependant au constructeur, dans certains cas, de juger

s'il a intérêt ou non à faire varier l'épaisseur d'une plaque.

Enfin, nous avons encore calculé les réactions des appuis de la plaque carrée, d'épaisseur linéairement variable ( $\lambda = 0,2$ ), soumise à la pression hydrostatique  $p = \gamma y$ , dans le cas où le côté  $y = 0$  est libre et où les trois autres côtés sont simplement appuyés. A titre de comparaison, nous avons également fait le calcul dans les mêmes hypothèses, mais en supposant l'épaisseur constante. La figure 7 est une représentation graphique des résultats obtenus. Elle montre qu'une variation d'épaisseur de la plaque entraîne : dans la partie inférieure, une augmentation, dans la partie supérieure, une diminution des valeurs des réactions.

Zurich, le 20 avril 1955.



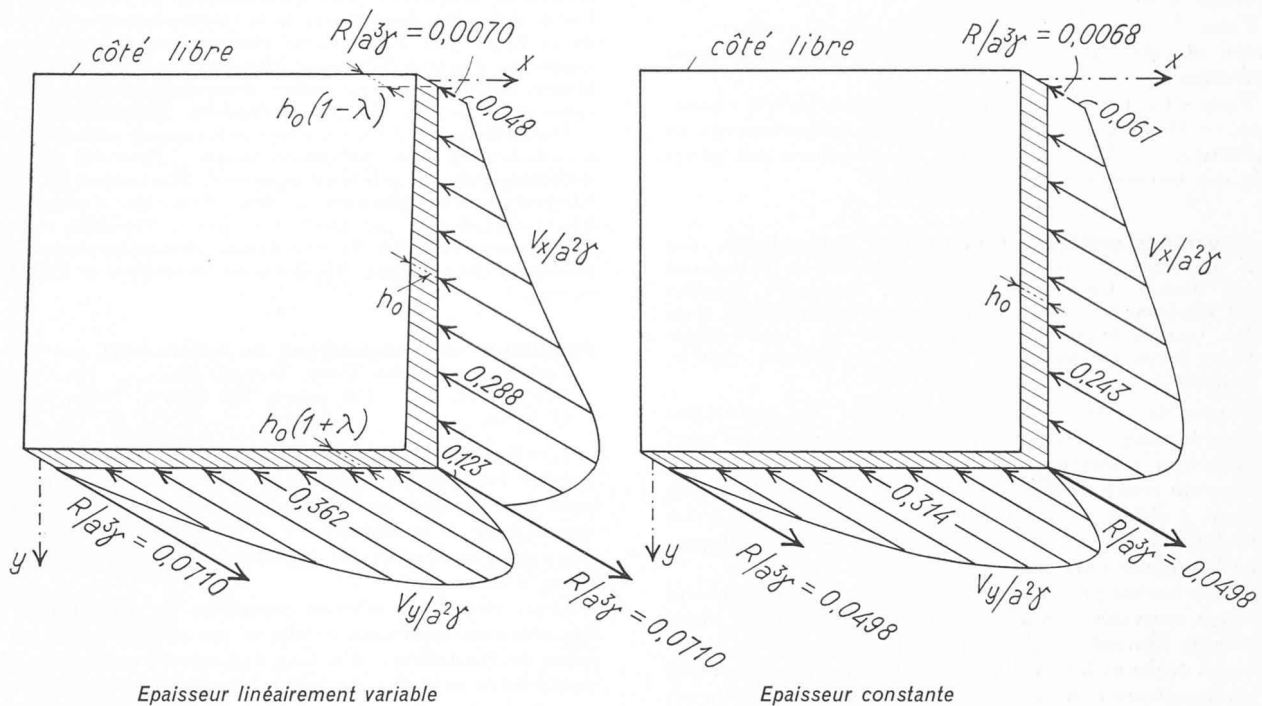


Fig. 7. — Plaque carrée, d'épaisseur linéairement variable ( $\lambda = 0,2$ ) ou constante, appuyée le long de trois côtés et soumise à une pression hydrostatique  $p = \gamma y$ . Diagrammes des réactions  $V_x$ ,  $V_y$  réparties le long des côtés et valeurs des réactions locales  $R$  appliquées aux sommets du contour.

## BIBLIOGRAPHIE

**Technique des travaux. Traité de pratique des travaux : Constructions, bétons, travaux publics. — Tome troisième : Terrassements et mouvements des terres, souterrains et tunnels**, par Max Jacobson, professeur à l'Ecole des arts et manufactures. Paris, Librairie polytechnique Ch. Béranger, 1955. — Un volume  $19 \times 28$  cm, 792 pages, 1289 figures, 359 planches, 221 tableaux. Prix : relié, 7300 fr. français.

Le tome III de la *Technique des travaux*, de M. le professeur Max Jacobson, continue et complète son *Traité de pratique des travaux*.

Le nouveau tome, plus particulièrement consacré aux importants chapitres des terrassements et mouvements de terres, et des souterrains et tunnels, est conçu dans le même esprit essentiellement pratique qui a fait l'extraordinaire succès des deux tomes précédents.

Il comporte presque autant de croquis que de texte. Ce dernier, clair et concis, permet de se renseigner dans un temps minimum.

L'auteur, qui a voulu faire de sa *Technique des travaux* un instrument de travail pour tous ceux, ingénieurs, architectes, entrepreneurs, qui ont à connaître du génie civil, a remarquablement réussi, puisque son ouvrage, déjà considéré comme un « classique », figure dans la plupart des bureaux de France et a eu une grande acceptation dans d'autres pays.

### Sommaire :

**Chapitre VII, Terrassements et mouvements de terres :** 1. Généralités. Reconnaissance des terrains. Division d'un travail de terrassement. Classification des terrains. Caractéristiques générales des terrains. — 2. Piquetage des terrassements. — 3. Terrassements à sec ou à l'air libre. Classification des déblais. Extraction et chargement des déblais meubles ou terreux. Extraction et chargement des déblais rocheux. Evacuation et transport des déblais. Mise en place, régalaage et damage des déblais. — 4. Procédés d'exécution

des déblais et des remblais. Travaux préliminaires. Exécution des déblais-tranchées. Exécution des remblais. Parachèvement des tranchées et des remblais. — 5. Cubage et mode de paiement des terrassements. — 6. Mouvements des terres et déblais. Cas particuliers : dépôts et emprunts. Mouvements des terres non parallèles à l'axe de la voie. — 7. Exemples de terrassements. Terrassement d'une voie de communications. Chemin de fer, route, canal. Protection des voies de communications contre la neige et les avalanches. Terrassement d'un aéroport. Barrages en terre. — 8. Terrassements sous l'eau. Dragages et dérochages. Engins de dragage. Dérochages. Transports et mise en dépôt des produits dragués. Exploitation du matériel de dragage. Métré des dragages. Prix de revient des dragages.

**Chapitre VIII, Souterrains et tunnels :** 1. Généralités. Etudes préliminaires. Caractéristiques et tracé. Eléments particuliers des souterrains et tunnels. Action de la température. Classification des souterrains et tunnels. — 2. Procédés généraux d'exécution. Tracé de l'axe du souterrain. Implantation. Extraction et évacuation des déblais. Blindage. Boisage. Coffrage. Etalement. Evacuation des eaux. Ventilation en cours d'exécution. Revêtement des souterrains et tunnels. — 3. Procédés généraux de percement. Méthodes anglaise, belge, française ou américaine, autrichienne, allemande, italienne. Choix de la méthode de percement. — 4. Eléments particuliers des souterrains et tunnels. Tranchées couvertes ou faux tunnels. Puits et galeries transversales. — 5. Souterrains et tunnels spéciaux. Souterrains ou tunnels de montagne. Souterrains et tunnels sous fleuves et bras de mer. Souterrains et tunnels urbains. — 6. Ventilation des souterrains et tunnels. Ventilation pendant la construction. Ventilation pendant l'exploitation. Refroidissement de l'air par la ventilation. Calcul des caractéristiques de la ventilation. Calcul de la puissance d'un ventilateur. Caractéristiques des ventilateurs et des compresseurs rotatifs. Choix d'un compresseur. Canalisation à air comprimé. — 7. Accidents, incidents. Dégradations. Accidents en cours d'exécution. Prescriptions réglementaires. Réparation des revêtements en béton. — 8. Organisation des chantiers et prix de revient. Projet d'exécution des travaux. Organisation des chantiers. Vitesses d'avancement. Prix de revient. Destruction des tunnels.