

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 83 (1957)
Heft: 18

Artikel: Introduction à la théorie des distributions pour l'étude des réglages linéaires
Autor: Stiefel, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-62793>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

10. Conclusion

Aux différents cas traités ci-dessus, correspond, d'une façon générale, le schéma fonctionnel représenté par la *figure 38* avec, tant dans la chaîne d'action, que dans la chaîne de réaction, des éléments non linéaires et deux autres éléments linéaires, mais présentant un retard par rapport au temps. Pour des oscillations de faibles amplitudes, les critères de stabilité classiques

peuvent être utilisés, par contre, pour des amplitudes importantes et des asservissements positifs très forts, peuvent se produire des instabilités^{1, 2}.

¹ Traduit de l'allemand par M. Cuénod, Dr. ès sciences techniques, Genève.

² *Littérature* : « Drei Beispiele aus der Elektroservotechnik », par EDUARD GERECKE. (Z. für angewandte Mathematik und Physik [ZAMP], vol. V, 1954, fasc. 6, pages 443 à 465.)

INTRODUCTION A LA THÉORIE DES DISTRIBUTIONS POUR L'ÉTUDE DES RÉGLAGES LINÉAIRES

par E. STIEFEL, Professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich¹

Définition de la linéarité

Une des notions fondamentales de la servo-technique est celle des « dispositifs de transfert » représentés en principe par la *figure 1*. C'est un organe qui, excité par la variation d'une certaine grandeur d'entrée (input), est caractérisé par une certaine « réponse » de sa grandeur de sortie (output). Excitation et réponse sont des fonctions du temps « t ». Un exemple d'un tel dispositif est donné par un circuit électrique. La grandeur d'entrée est la tension appliquée à ce circuit. La grandeur de sortie est le courant qui parcourt ce circuit. Il serait facile de donner d'autres exemples de dispositifs de transfert parmi les appareils mécaniques ou hydrauliques.

Nous limitons nos considérations aux dispositifs de transfert linéaire, c'est-à-dire à ceux pour lesquels le principe de superposition est valable. Ce principe s'exprime mathématiquement de la façon suivante :

Lorsque pour une excitation $f_1(t)$ un organe de transfert donne la réponse $g_1(t)$ et que pour une excitation $f_2(t)$ sa réponse est $g_2(t)$, il doit en résulter que pour une excitation égale à la somme $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$, sa réponse doit être égale à la somme $c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)$, les paramètres c_1 et c_2 étant des constantes quelconques. Les notions de « linéarité » et de « non-linéarité » sont fondamentales en mathématiques ; il n'existe aujourd'hui de théories générales et complètes que pour l'étude des phénomènes linéaires.

Suites de temps

Ainsi que le représente la *figure 2*, une fonction quelconque du temps t peut être décomposée en première approximation en une suite d'impulsions ayant une base uniforme égale à h et comme hauteurs les ordonnées $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ et se suivant à l'intervalle h .

¹ Exposé présenté au cours de perfectionnement organisé par l'A.S.P.A. les 7 et 8 décembre 1956, à Zurich, sur le thème « Méthodes modernes pour l'analyse de phénomènes dynamiques dans la mécanique, l'électrotechnique et l'automatique ».

Nous appelons « suite de temps », la suite $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$ qui correspond à la fonction $f(t)$.

Considérons en particulier la suite $(\frac{1}{h}, 0, 0, \dots, 0)$

qui ne comprend qu'un seul terme d'amplitude $\frac{1}{h}$, les autres termes étant nuls ainsi que le représente la *figure 3*.

La suite caractérise une fonction discontinue pour $t = h$, fonction que l'on peut définir comme étant une « impulsion unité » et à laquelle on a donné le nom de « suite de Dirac » en l'honneur du physicien Dirac qui le premier a opéré systématiquement avec des fonctions de ce genre pour l'étude de phénomènes physiques.



Fig. 1. — Principe d'un dispositif de transfert.

Nous admettons qu'un dispositif de transfert a été excité par une fonction de ce genre et qu'il en résulte la réponse $\varphi(t)$ représentée par la *figure 4* et appelée « réponse impulsionnelle ». Nous admettons que la suite $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ qui caractérise cette réponse soit connue. Quelle sera la réponse de ce dispositif pour une variation quelconque de sa grandeur d'entrée ? On peut répondre à cette question en faisant usage du principe de superposition. Ainsi que l'indique la *figure 2*, on peut décomposer la fonction $f(t)$ en une suite d'impulsions qui se suivent à l'intervalle h . La réponse à la première impulsion d'amplitude f_0 est caractérisée par la suite de temps suivante :

$$hf_0\varphi_0, hf_0\varphi_1, hf_0\varphi_2, \dots, hf_0\varphi_n, \dots$$

La deuxième impulsion caractérisée par l'amplitude f_1 et retardée de h par rapport à la première impulsion, conduit à la réponse suivante :

$$0, hf_1\varphi_0, hf_1\varphi_1, \dots, hf_1\varphi_{n-1}, \dots$$

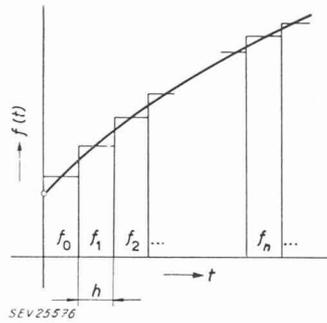


Fig. 2. — Décomposition d'une fonction en une suite d'impulsions.

On obtient ainsi comme schéma de calcul :

$$\begin{array}{ccccccc}
 hf_0\varphi_0, & hf_0\varphi_1, & hf_0\varphi_2, & hf_0\varphi_3, & \dots, & hf_0\varphi_n, & \dots \\
 hf_1\varphi_0, & hf_1\varphi_1, & hf_1\varphi_2, & \dots, & hf_1\varphi_{n-1}, & \dots & \\
 hf_2\varphi_0, & hf_2\varphi_1, & \dots, & hf_2\varphi_{n-2}, & \dots & & \\
 \vdots & & & & & & \\
 hf_n\varphi_0, & \dots & & & & &
 \end{array}$$

En utilisant le principe de superposition, on obtient les termes de la suite qui caractérise la réponse cherchée $g(t)$ provoquée par l'excitation $f(t)$ en effectuant la somme des différentes colonnes de ce schéma de calcul. Ainsi le nième terme de la suite ($g_0, g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$) est donné par la formule suivante :

$$g_n = h(f_0\varphi_n + f_1\varphi_{n-1} + f_2\varphi_{n-2} + \dots + f_n\varphi_0). \quad (1)$$

On dit que la suite $g(t)$ est obtenue par le « produit composé », ou « produit de composition » des suites $f(t)$ et $\varphi(t)$. On retrouve ainsi le principe de Duhamel qui énonce que la réponse d'un système de transfert linéaire est donnée par le produit de composition de son excitation par sa réponse impulsionnelle.

Exemple : $f(t) = (0, 1, 2, 3, \dots)$ (2)

$$\varphi(t) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$$

$$g(t) = (0, 1, \frac{5}{2}, \frac{13}{3}, \dots)$$

Le produit composé de deux suites de temps permet ainsi de calculer en première approximation la réponse d'un système linéaire lorsque sa réponse impulsionnelle est connue. Cette méthode de calcul a été découverte par A. Tustin¹, puis développée en Suisse par M. Cuénod² qui l'a illustrée par de nombreux exemples.

Relevons que le produit composé s'effectue selon les mêmes règles que celles qui régissent le produit de polynômes en algèbre élémentaire, et que l'on peut également effectuer le quotient composé de deux suites comme indiqué en annexe.

¹ A. TUSTIN : *A method of analysing the behaviour of linear systems in time-series*. (The journal of the Institution of Electr. Eng. 1947, vol. 94, N° 1, part II A.)

² M. CUÉNOD : *Contribution à l'étude de phénomènes transitoires à l'aide de suites de temps*. (Bulletin technique de la Suisse romande 1949, N° 16.)

Méthode de calcul à l'aide de suites (Dissertation E.P.F., 1955).

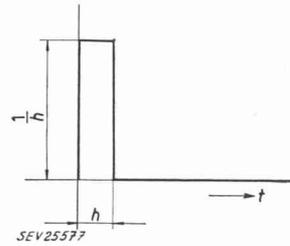


Fig. 3. — Suite de Dirac.

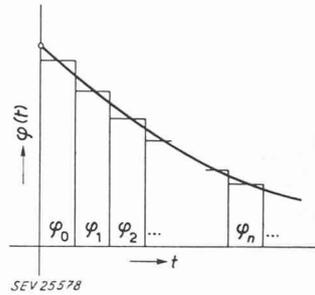


Fig. 4. — Exemple d'une réponse impulsionnelle $\varphi(t)$ et de sa décomposition en une suite d'impulsions.

La suite de Dirac $(\frac{1}{h}, 0, 0, 0, \dots)$ joue le rôle de « suite unité ». Si dans la formule (1) on admet que la suite $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ est égale à la suite de Dirac, on obtient comme résultat que $g_n = f_n$. Autrement, la multiplication d'une suite par la suite de Dirac laisse cette fonction inchangée.

Passage à la limite

Le calcul à l'aide de suites est d'autant plus exact que l'unité choisie h est petite. On peut écrire la formule (1) de la façon suivante :

$$g(t) = h \left(f(0)\varphi(t) + f(h)\varphi(t-h) + f(2h)\varphi(t-2h) + \dots + f(t)\varphi(0) \right).$$

Lorsque l'on fait tendre h vers zéro, on obtient :

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau. \quad (3)$$

Ce résultat est connu sous le nom de « l'intégrale de composition ». Cependant ce passage à la limite n'est pas admissible sans autre en ce sens que la notion « d'impulsion » telle que nous l'avons définie s'évanouit. Ainsi que le met en évidence la figure 3 lorsque $h \rightarrow 0$, l'amplitude de l'impulsion unité tend vers infini, cette impulsion unité dégénère en une fonction de Dirac. Cette fonction ne peut être traitée avec les moyens classiques de l'analyse. Cette difficulté a été ignorée du temps de Heaviside ; ensuite elle a été contournée au moyen des transformations de Laplace. Malgré tout le parti que l'on peut tirer de ces transformations, elles ne sont pas adéquates pour traiter des fonctions de ce genre.

Le fait que les limites d'intégration de l'intégrale de Laplace s'étendent jusqu'à l'infini est une source de difficultés. Le moyen de se tirer d'affaire est d'élargir la notion de fonction telle qu'elle est définie dans l'analyse classique. En 1950, L. Schwartz a introduit cette nouvelle notion de fonction généralisée qu'il a baptisée *distribution*. Notre introduction à la théorie de ces

nouvelles conceptions mathématiques est basée sur le cours de A. Erdélyi¹ qui traite la théorie simplifiée des distributions, telle que l'a développée le Polonais J. Mikusinski.

Distributions

Nous admettons que les fonctions du temps $f(t)$, $g(t)$, etc., soient définies et continues pour $t > 0$.

Le produit de composition défini par la formule (3)

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau$$

de deux fonctions du temps quelconques $f(t)$ et $\varphi(t)$, produit qui joue un rôle si important dans la servo-technique, peut s'écrire de la façon suivante :

$$g = f \cdot \varphi.$$

Nous n'utilisons pas le signe d'une « étoile » entre f et φ pour signifier ce produit. Toutefois pour éviter toute confusion avec le produit algébrique, nous devons faire usage d'une autre convention. Nous établissons une différence entre la fonction « f » en tant qu'entité (par exemple une courbe en représentation graphique) et la valeur $f(t)$, cette fonction au temps t (ordonnée de la représentation graphique au temps t). Le produit composé $f \cdot \varphi$ se distingue ainsi sans ambiguïté possible du produit algébrique $f(t) \cdot \varphi(t)$ des deux valeurs des fonctions au temps t .

Comme pour le produit composé de suites de temps, les règles de calcul élémentaires sont également valables pour ce produit de composition et nous pouvons écrire :

$$fg = gf, \quad f(g + h) = fg + fh, \quad (fg)h = f(gh).$$

Comme pour les suites de temps, on peut définir l'opération inverse au produit composition, également pour les fonctions, à condition toutefois que ce quotient existe sous la forme d'une fonction continue ; on peut démontrer que dans ce cas le quotient est unique. Cependant il faut relever que ce « quotient composé » ne donne pas toujours une fonction continue. Ainsi par exemple le quotient composé $f : f$ ne conduit pas à une fonction continue g . Cela signifierait

$$fg = f \quad \text{donc} \quad f(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Pour $t = 0$, il en résulterait $f(0) = 0$, ce qui est une contradiction dès que la valeur initiale de $f(t)$ n'est pas nulle.

Toutes les règles de calcul concernant les fractions sont valables. Dès qu'un quotient composé de deux fonctions continues ne « finit » pas et ne conduit pas à une fonction continue, ce quotient est par définition une *distribution*.

Cette explication peut paraître un peu abstraite. Elle n'est pas plus abstraite que ce que les enfants doivent apprendre lorsqu'en 5^e de l'école primaire ils sont initiés à la division. Le maître leur explique (peut-être avec des mots différents) qu'un nombre rationnel est le nombre obtenu par le quotient de deux nombres entiers lorsque ce quotient ne « finit » pas. Il s'efforce

de leur donner une représentation concrète de cette opération en donnant l'exemple de la division en morceaux d'un gâteau.

Ici également nous avons la possibilité d'avoir une représentation concrète de ce qu'est une distribution. Pour illustrer le quotient $g : f$, nous faisons une approximation de $f(t)$ et de $g(t)$ en suites de temps et nous formons le quotient composé de ces deux suites. La nouvelle suite ainsi obtenue est en représentation de la distribution $g : f$, représentation d'autant meilleure que l'unité choisie « h » est faible.

Cette distribution $g : f$ est en servo-technique celle qui caractérise la *réponse impulsionnelle* d'un système dont on connaît la distribution f de la réponse et la distribution g de l'excitation qui a provoqué cette réponse.

Deux distributions $f : g$ et $h : k$ peuvent être considérées comme étant égales lorsque

$$fk = gh.$$

Les opérations au moyen de distributions sont définies par les mêmes règles que celles qui régissent le calcul avec des fractions.

$$\text{Addition : } \frac{f}{g} + \frac{h}{k} = \frac{fk + gh}{gk}.$$

$$\text{Produit de composition : } \frac{f}{g} \cdot \frac{h}{k} = \frac{fh}{gk}.$$

Distributions particulières

Lorsque f est une fonction quelconque, le quotient $f : f$ n'est pas — ainsi que nous l'avons déjà relevé — une fonction ordinaire. C'est une distribution qui est indépendante du choix de f ainsi que cela résulte de notre définition d'égalité de deux fonctions. Nous désignons cette distribution par **I** parce que cette distribution joue le rôle de l'unité dans le cas de multiplication de distributions

$$\mathbf{I}g = \frac{f}{f} g = \frac{fg}{f} = g.$$

Pour la dernière de ces équations on fait usage de la faculté de « simplifier » le quotient de deux distributions. Comment se représenter exactement cette distribution **I** ? Comme indiqué en annexe, le quotient composé d'une suite de temps par elle-même, donne toujours comme résultat une *suite de Dirac* représentée par la *figure 3*. La distribution **I** est ainsi le rectangle dont la largeur est nulle et la hauteur infinie que nous avons désignée sous le nom de *fonction de Dirac* et que nous définissons maintenant comme étant la *distribution de Dirac*.

2. Nous désignons par « e » la fonction continue qui est toujours égale à la valeur I , à savoir :

$$e(t) = I. \quad (6)$$

En utilisant les définitions (4) et (5) du produit de composition, nous obtenons

$$ef = fe = \int_0^t f(\tau) e(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (7)$$

La multiplication avec la distribution e correspond donc à l'intégration (au sens d'une intégrale indéfinie).

¹ A. ERDÉLYI: *Operational calculus*. (California Institut of Technology, Math. Department.)

Une distribution particulière qui a une grande importance est la distribution p fournie par la valeur réciproque de e

$$p = \frac{1}{e} \tag{8}$$

Elle est représentée par la *figure 5* (voir en annexe). Pour une fonction continue et différentiable $f(t)$, on obtient la formule fondamentale suivante :

$$pf = f' + f(0) \mathbf{1} \tag{9}$$

dans laquelle f' est la dérivée de f . Comme dans l'algèbre ordinaire, nous n'avons pas besoin d'écrire le facteur $\mathbf{1}$ et obtenons ainsi

$$pf = f' + f(0). \tag{10}$$

Démonstration

En partant de l'équation analytique classique qui caractérise la relation entre les valeurs de la dérivée $f'(t)$ et de la fonction $f(t)$

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau) d\tau$$

on obtient, en utilisant les relations (6) et (7), l'équation suivante entre les fonctions f et f'

$$f = f(0)e + e f'.$$

La division par e et l'utilisation de la relation (8) donnent

$$\frac{1}{e} f = pf = f(0) + f'.$$

Cette formule fondamentale signifie que la multiplication avec la distribution p correspond à la différenciation.

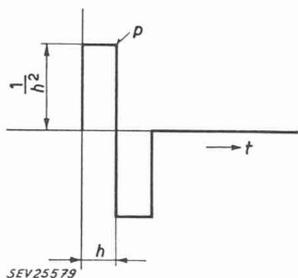


Fig. 5. — Distribution correspondant à l'opération de dérivation.

3. La notion « valeur de la fonction » n'existe pas pour une distribution qui ne correspond pas à une fonction continue. Ainsi cela n'a pas de sens de parler de la valeur de la distribution de Dirac au temps $t = 0$. Tout au plus peut-on dire qu'il s'agit d'une impulsion d'amplitude infinie et de durée infiniment courte.

Le problème fondamental de la théorie des distributions est de déterminer si une distribution donnée est une fonction continue et possède une « valeur de fonction » qui soit définie en fonction de la variable indé-

¹ Une table très complète de ces transformations est donnée dans la publication de Bateman : *Tables of integral transforms*. (Mc Graw-Hill, 1954), vol. 1.

pendante (t). Dans ce cas il s'agit de déterminer l'expression analytique de cette fonction. A titre d'exemple nous prenons la distribution

$$y = \frac{1}{p - a} \tag{11}$$

dans laquelle « a » est une constante numérique.

Nous chassons le dénominateur

$$py - ay = \mathbf{1}$$

et divisons par p en utilisant la relation (8)

$$y = a(ey) + e.$$

Si y est une fonction continue, nous obtenons en utilisant la relation (7) l'équation suivante entre les valeurs de fonction $y(t)$

$$y(t) = a \int_0^t y(\tau) d\tau + 1.$$

Pour $t = 0$ nous obtenons

$$y(0) = 1. \tag{12}$$

D'autre part en différenciant cette équation on obtient

$$y'(t) = ay(t). \tag{13}$$

La seule solution qui satisfasse l'équation différentielle (13) compte tenu de la condition initiale (12) est

$$y = e^{at}.$$

Il en résulte : $\frac{1}{p - a} = e^{at}$ avec $\epsilon = 2,71828$. $\tag{14}$

Ce résultat illustre qu'à chaque expression rationnelle de p pour laquelle le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, correspond une fonction du temps. Pour arriver à ce résultat il suffit d'utiliser la décomposition en fraction simple.

A titre d'exercice, il est facile de démontrer la correspondance suivante :

$$\frac{1}{p^2 + a^2} = \frac{1}{a} \sin at. \tag{15}$$

Ces correspondances sont groupées dans des tables qui ont été établies bien avant la découverte de la théorie des distributions. Ainsi que les relations (14) et (15) le laissent supposer, il suffit d'utiliser les tables des transformations de Laplace inverses pour déterminer la valeur des fonctions qui correspondent à une distribution donnée (au cas où cette valeur existe)¹.

Fonction de transfert en électrotechnique

Le circuit électrique représenté par la *figure 6* se compose d'une résistance R , d'une inductivité L et est alimenté par la tension variable $u(t)$. Ce circuit constitue

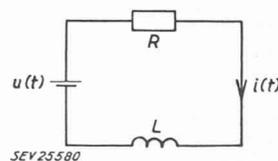


Fig. 6. — Circuit électrique composé d'une résistance R et d'une inductivité L .

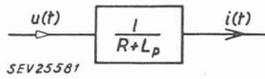


Fig. 7. — Diagramme fonctionnel correspondant au circuit électrique représenté par la figure 6.

un dispositif de transfert tel que le définit la servotechnique et tel que le représente la figure 7 avec $u(t)$ comme « excitation » et le courant $i(t)$ comme réponse. On sait que le courant $i(t)$ est défini par l'équation différentielle suivante :

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) = u(t).$$

Si au temps $t = 0$ le courant est nul, nous pouvons écrire en utilisant la formule (10)

$$Lpi + Ri = u$$

il en résulte
$$i = \frac{u}{R + Lp} = \frac{\mathbf{1}}{R + Lp} u \quad (16)$$

i est ainsi obtenu par le produit de composition de l'excitation u par la distribution $\mathbf{1} : (R + Lp)$. Compte tenu du principe de Duhamel, nous voyons que l'expression

$$\frac{\mathbf{1}}{R + Lp} = \frac{\mathbf{1}}{L} \cdot \frac{\mathbf{1}}{p + \frac{R}{L}} \quad (17)$$

peut être définie comme la fonction de transfert ou plutôt la distribution de transfert du dispositif de transfert pris en considération. Nous écrivons cette expression dans le rectangle de la figure 7 qui symbolise cette relation de transfert. Dans ce cas particulier, ainsi que l'indique la relation (14), à cette distribution correspond une fonction, à savoir

$$\frac{\mathbf{1}}{L} \varepsilon^{-\frac{R}{L} t}.$$

La formule (16) conduit ainsi à l'intégrale de composition suivante :

$$i(t) = \frac{\mathbf{1}}{L} \int_0^t u(t - \tau) \varepsilon^{-\frac{R}{L} \tau} d\tau. \quad (18)$$

Cette intégrale est la solution analytique du problème tel qu'il est posé.

Il est d'usage en électrotechnique de donner une interprétation un peu différente de la formule (16). Par analogie à la loi d'Ohm, l'expression $R + Lp$ est assimilée à une impédance généralisée; en particulier le terme Lp est assimilé à une inductance. Si dans le circuit intervient une capacité C et que l'on définit de même une capacitance $\frac{1}{Cp}$, on peut également utiliser la loi d'Ohm pour les circuits alternatifs ainsi que les lois de Kirchhoff.

Exemple : Machine à courant continu compoundée

La partie de gauche du schéma de principe donné par la figure 8 représente le circuit d'excitation (impédance $R_0 + L_0p$). La grandeur de sortie constituée par le courant i_0 est multipliée par une constante K et

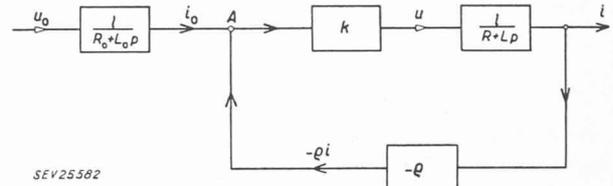


Fig. 8. — Diagramme fonctionnel d'une machine à courant continu compoundée.

transformée en une tension qui alimente du courant i le circuit de charge caractérisé par l'impédance $R + Lp$. En vue d'obtenir une caractéristique déterminée de la tension par rapport au courant, un asservissement en retour reconduit une partie ($-\rho i$) du courant au point A ; il en résulte que lorsque le courant augmente, l'excitation de la machine, et partant sa tension, diminuent.

Le courant i_0 est obtenu par la relation suivante :

$$i_0 = \frac{u_0}{R_0 + L_0p}.$$

Au courant se soustrait au point A le courant ρi , il en résulte

$$u = K \left(\frac{u_0}{R_0 + L_0p} - \rho i \right)$$

et
$$i = \frac{K}{R + Lp} \left(\frac{u_0}{R_0 + L_0p} - \rho i \right).$$

Nous résolvons cette équation par rapport à i et obtenons

$$i = \frac{K}{(R_0 + L_0p)(R + \rho K + Lp)} u_0. \quad (19)$$

Le facteur de u_0 est la fonction de transfert Φ

$$\Phi = \frac{K}{(R_0 + L_0p)(R + \rho K + Lp)}.$$

Nous introduisons les abréviations suivantes :

$$a = \frac{R_0}{L_0} \quad \text{et} \quad b = \frac{R + \rho K}{L}.$$

et obtenons en utilisant les tables de transformation de Laplace

$$\Phi(t) = \frac{K}{L_0L} \frac{\varepsilon^{-bt} - \varepsilon^{-at}}{a - b}. \quad (20)$$

C'est la réponse du système à une excitation ayant la forme d'une impulsion de Dirac. Cette réponse tend vers zéro avec le temps. Le réglage est donc stable.

Si la tension $u_0(t)$ est constante $= U$, il en résulte en utilisant soit le principe de Duhamel, soit la formule (19) :

$$i(t) = U \int_0^t \Phi(\tau) d\tau.$$

En effectuant cette intégrale on obtient

$$i(t) = \frac{KU}{L_0L} \left(\frac{1}{ab} - \frac{\frac{1}{b} \varepsilon^{-bt} - \frac{1}{a} \varepsilon^{-at}}{a - b} \right).$$

Après un certain temps s'établit la valeur suivante :

$$i(t) = \frac{KU}{L_0 L} \frac{1}{ab} = \frac{KU}{R_0(R + \rho K)}. \quad (21)$$

Nous constatons avec satisfaction que notre théorie conduit ainsi exactement au même résultat que celui auquel les ingénieurs sont habitués depuis l'époque de Heaviside. La différence réside dans les nouveaux fondements de ce calcul qui satisfait la rigueur mathématique (de même que les transformations de Laplace) et qui répond à une signification physique plus évidente des phénomènes.

Annexe

Opérations avec les suites de temps à l'aide d'une « fonction génératrice »

Il est commode d'attribuer à une suite de temps $f(t) = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$ de façon purement formelle un polynôme en x constitué par la série des puissances en x

$$f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots + f_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f_nx^n.$$

Nous appelons cette série la « fonction génératrice » de la suite.

Si $\varphi(t) = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots)$ est une deuxième suite

$$\text{et } \varphi_0 + \varphi_1x + \varphi_2x^2 + \dots + \varphi_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_nx^n$$

la fonction génératrice correspondante, le produit de ces deux fonctions génératrices conduit à une nouvelle série

$$(f_0\varphi_0) + (f_0\varphi_1 + f_1\varphi_0)x + (f_0\varphi_2 + f_1\varphi_1 + f_2\varphi_0)x^2 + \dots$$

Ainsi que l'indique la formule (1), nous voyons que le coefficient de x^n correspond au *nième* terme du produit composé de deux suites (à l'exception du facteur h). Autrement dit :

La fonction génératrice du produit composé de deux suites est égale au produit des fonctions génératrices des deux fonctions correspondantes (multipliées en outre par h).

Pour effectuer le quotient composé des deux suites correspondant aux fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$, il suffit de diviser les fonctions génératrices correspondantes en utilisant les règles classiques du calcul à l'aide de séries de puissances.

$$\text{Exemple : } f(t) = (1, 7, 21, 35, \dots)$$

$$\varphi(t) = (1, 4, 6, 4, \dots)$$

$$(1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + \dots) : (1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + \dots) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + \dots$$

$$\frac{1 + 4x + 6x^2 + 4x^3}{3x + 15x^2 + 31x^3} = \frac{3x + 12x^2 + 13x^3}{3x + 12x^2 + 13x^3} = \frac{3x^2 + 13x^3}{3x^2 + 12x^3} = \frac{1 + 13x}{1 + 12x} = \frac{1}{1 - 12x} = 1 + 12x + 144x^2 + \dots$$

$$\text{Il en résulte } \frac{f}{\varphi} = \left(\frac{1}{h}, \frac{3}{h}, \frac{3}{h}, \frac{1}{h}, \dots\right)$$

A titre d'exercice, on peut contrôler que pour toute fonction $f(t)$, le quotient $\frac{f}{\varphi}$ correspond à la suite de Dirac

$$\left(\frac{1}{h}, 0, 0, 0, \dots\right)$$

Il est également facile de prouver que

$$\left(\frac{1}{h}, 0, 0, 0, \dots\right) : (1, 1, 1, \dots, 1) = \left(\frac{1}{h^2}, -\frac{1}{h^2}, 0, 0, \dots\right).$$

(Voir fig. 5.)

PRINCIPES ET EXEMPLES D'APPLICATION DES DISPOSITIFS DE STABILISATION

par M. CUÉNOD, ing. dipl. E.P.F., Dr. ès sc. techn.

Ingénieur à la Société Générale pour l'Industrie, Genève¹

Sommaire

Introduction. — I. Cause de l'instabilité d'un réglage automatique. — II. Principes des dispositifs d'anticipation : 1. Mesure de la dérivée de la grandeur à régler ; 2. Asservissement passager. — III. Principe de réalisation d'un régulateur différentiel : 1. Régulateur différentiel purement électrique ; 2. Régulateur différentiel avec translation ; 3. Régulateur différentiel avec asservissement électrique ; 4. Régulateur différentiel avec rotation. — IV. Exemples d'utilisation du régulateur différentiel : 1. Réglage de la chaudière d'un groupe thermique ; 2. Asservissement passager de la tension d'un générateur aux variations de sa puissance ; 3. Accélération du réglage de la tension ; 4. Amélioration du réglage puissance-fréquence. — Conclusion. — Annexe : Equations du réglage de vitesse d'un groupe hydro-électrique en marche isolée.

¹ Exposé présenté au cours de perfectionnement organisé par l'Association suisse pour l'automatique (A.S.P.A.) les 7 et 8 décembre 1956, à Zurich sur le thème : « Méthodes modernes pour l'analyse de phénomènes dynamiques dans la mécanique, l'électro-technique et l'automatique ».

Introduction

La première qualité que l'on exige d'un réglage automatique, c'est qu'il soit stable. Nous nous proposons d'examiner quelles sont les causes qui peuvent rendre un réglage instable, puis les remèdes que l'on peut apporter à cette instabilité.

Pour fixer les idées, nous prenons comme exemple le cas du réglage de vitesse d'un groupe hydro-électrique en service isolé tel que le représente en principe la figure 1.

La turbine T , alimentée par la conduite forcée C entraîne le générateur G qui débite son énergie sur la charge K , constituée par l'ensemble des consommateurs du réseau. Le régulateur R accouplé à l'axe du groupe mesure la vitesse angulaire n de cet axe et commande, par l'intermédiaire du servo-moteur S , l'ouverture l de la turbine. Par suite de l'inertie de l'eau dans la conduite