Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 83 (1957)

Heft: 8

Artikel: Sur le calcul approché d'une dérivée

Autor: Blanc, Ch.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-62779

83e année 13 avril 1957 N° 8

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale

SUR LE CALCUL APPROCHÉ D'UNE DÉRIVÉE

par CH. BLANC, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne

Le plus souvent, lorsqu'on se propose de résoudre un problème d'une manière approchée, on le fait en substituant à ce problème un autre problème, qui est plus simple et que l'on résout exactement. En fait, une méthode approchée de calcul est donc, en général, une méthode consistant à résoudre exactement un problème voisin du problème posé. Cherchons à préciser ce qu'il faut entendre par *problèmes voisins*. La première idée qui vient à l'esprit est la suivante : deux problèmes sont voisins lorsque les données sont assez peu différentes ; on sous-entend alors que les solutions elles-mêmes sont par conséquent également voisines.

Malheureusement, un problème aussi simple que celui de la dérivation nous apporte un démenti immédiat : deux fonctions qui sont et restent voisines peuvent parfaitement avoir des dérivées fort différentes (il suffit, pour s'en persuader, de tracer une courbe assez régulière et, sur cette courbe, une autre courbe comportant de rapides oscillations de faible amplitude : les pentes sont très différentes !)

Pour calculer d'une manière approchée la dérivée d'une fonction donnée, il ne suffit donc pas de calculer la dérivée d'une fonction voisine ; plus généralement, pour résoudre d'une manière approchée un problème donné, il convient de le remplacer par un problème dont non seulement les données, mais aussi la solution, sont voisines de celles du problème primitif.

Dérivation approchée. Lorsqu'une fonction est donnée par une expression analytique explicite, comme combinaison d'opérations élémentaires (polynôme, fonction trigonométrique, par exemple), il est possible de donner explicitement une expression de la dérivée ; en principe, dans ce cas, le problème d'une dérivation approchée ne se pose pas. Si par contre, la fonction résulte de données expérimentales, ou bien se présente sous forme d'une *table de valeurs*, la dérivation ne peut se faire que d'une manière approchée.

Avant d'en venir à la considération précise de diverses méthodes de dérivation approchée, envisageons le cas le plus simple, où on désire la dérivée première à l'abscisse x pour une fonction donnée par une courbe tracée sur du papier millimétré. On pourra pour cela lire les valeurs de cette fonction $f(x)$ pour x et $x + h$, et former le quotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

qui constituera une approximation de $f'(x)$; il est clair que si h est choisi relativement grand, l'approximation sera grossière ; si h est par contre très petit, les imprécisions sur $f(x+h)$ et $f(x)$ risquent de fausser complètement le résultat (du fait de la division par h) ; l'expression ci-dessus est donc d'une précision limitée, cette précision étant maximum pour une valeur de h qui dépend notamment des imprécisions sur la donnée de $f(x)$. La recherche de cette valeur optimum de h est une question importante dans l'étude d'une formule de dérivation approchée.

En fait, le problème de la dérivation approchée peut se poser comme un problème de théorie de l'information (cela est vrai du reste de la plupart des problèmes d'analyse numérique) : utiliser le mieux possible l'information fournie sur la fonction pour en déduire une estimation de sa dérivée (ou de ses dérivées) ; dans l'exemple ci-dessus, on peut reconnaître que cette information est assez mal utilisée, puisqu'on ne prend que deux valeurs de la fonction ; nous allons essayer des méthodes qui utilisent un nombre supérieur de valeurs.

Dérivation approchée par interpolation. Une idée toute naturelle pour obtenir une valeur approchée d'une dérivée consiste en ceci : étant données les valeurs $f_k = f(x_k)$ d'une fonction $f(x)$ pour des valeurs x_k formant une progression arithmétique ($x_k = k\,h$, $h =$ = const.), on construit un polynôme $P(x)$ de degré n prenant, pour $(n+1)$ valeurs consécutives de x_k, les $(n+1)$ valeurs f_k, puis on prend pour valeur d'une dérivée de $f(x)$ la valeur de la même dérivée de $P(x)$; par exemple, si on veut la dérivée seconde de $f(x)$ pour $x = x_0 = 0$, on cherche le polynôme de second degré $P(x)$ avec

$$P(-h) = f_{-1}, \quad P(0) = f_0, \quad P(h) = f_1 \,;$$

on trouve facilement ainsi

$$P(x) = \frac{1}{2h^2}\left[x(x-h)f_{-1} + 2(h^2 - x^2)f_0 + x(x+h)\,f_1\right]$$

d'où

$$f''(0) \;\#\; P''(0) = \frac{1}{h^2}\,(f_1 - 2f_0 + f_{-1}) \,;$$

cette expression est, dans certains cas, une bonne approximation de la dérivée seconde de $f(x)$ pour $x = 0$; il importe cependant de savoir si cette approximation est suffisante ; si elle ne l'est pas, il convient de rechercher un moyen de l'améliorer.

On pourrait s'attendre à ce qu'une bonne méthode pour améliorer un tel résultat consiste toujours à prendre simplement plus de points et par conséquent un polynôme de degré plus élevé ; avec les cinq points x_{-2}, $x_{-1}, \ldots, x_2$, et les valeurs correspondantes de $f(x)$, on peut former un polynôme du quatrième degré ; nous laissons les calculs de côté ; on trouve ainsi, pour la dérivée seconde de ce polynôme à l'origine :

$$f''(0) \;\#\; \frac{1}{12h^2}\,(-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2})$$

Or, ce résultat est souvent moins bon que celui qui n'utilise que trois valeurs de $f(x)$; c'est le cas notamment si la fonction $f(x)$ est assez régulière et si les f_k ne sont connus qu'avec une précision limitée.

Pour le montrer, commençons par modifier un peu l'écriture. On sait qu'il est possible de former, à partir des valeurs d'une fonction tabulée, les différences tabulaires des divers ordres ; adoptons les notations suivantes :

$$f_{k+1} - f_k = \Delta'_{k+\frac{1}{2}}$$

$$\Delta'_{k+\frac{1}{2}} - \Delta'_{k-\frac{1}{2}} = \Delta''_k$$

$$\Delta''_{k+1} - \Delta''_k = \Delta'''_{k+\frac{1}{2}}, \quad \text{etc.}$$

ce qui donne un tableau tel que celui-ci :

f_{-2}				
	$\Delta'_{-1,5}$			
f_{-1}		Δ''_{-1}		
	$\Delta'_{-0,5}$		$\Delta'''_{-0,5}$	
f_0		Δ''_0		Δ^{IV}_0
	$\Delta'_{0,5}$		$\Delta'''_{0,5}$	
f_1		Δ''_1		
	$\Delta'_{1,5}$			
f_2				

Avec ces notations, la valeur approchée (1) est donnée par

$$f''(0) \;\#\; \frac{1}{h^2}\,\Delta''_0 \,; \tag{3}$$

la relation (2) est par contre remplacée par

$$f''(0) \;\#\; \frac{1}{h^2}\left(\Delta''_0 - \frac{1}{12}\,\Delta^{IV}_0\right); \tag{4}$$

en recourant à sept points et un polynôme de degré six, on aurait de même

$$f''(0) \;\#\; \frac{1}{h^2}\left(\Delta''_0 - \frac{1}{12}\,\Delta^{IV}_0 + \frac{1}{90}\,\Delta^{VI}_0\right). \tag{5}$$

On voit ainsi que la formule (4) ne se distingue de (3) que par l'addition d'un terme provenant de la différence quatrième Δ_0^{IV} ; de même (5) se distingue de (4) par l'addition d'un terme en Δ_0^{VI}.

Pour une fonction assez régulière, tabulée exactement, les différences peuvent être très petites ; ainsi, considérons une table de $f(x) = e^x$ autour de $x = 1$, avec $h = 0{,}05$. On obtient, pour les différences tabulaires, le tableau suivant (tableau 1) :

TABLEAU 1

x	e^x	Δ'	Δ''	Δ'''	Δ^{IV}
0,80	2,2255				
		1141			
85	3396		59		
		1200		2	
90	4596		61		1
		1261		4	
95	5857		65		—1
		1326		3	
1,00	7183		68		0
		1394		3	
05	2,8577		71		1
		1465		4	
10	3,0042		75		0
		1540		4	
15	1582		79		
		1619			
20	3201				

Ici, pour un calcul de la dérivée seconde de e^x pour $x = 1$, il suffit d'utiliser la différence Δ'' ; la différence quatrième Δ^{IV} est en effet négligeable ; on trouve ainsi

$$f''(1) \;\#\; \frac{1}{0{,}05^2}\cdot 0{,}0068 = 2{,}72.$$

Dérivation après approximation par les moindres carrés

Les formules données ci-dessus permettent de tenir compte des différences d'ordre supérieur, si elles ne sont pas négligeables ; toutefois, si la fonction tabulée est entachée d'erreurs (si sa donnée résulte par exemple de mesures), ces erreurs ont sur les différences tabulaires une influence qui va en croissant avec l'ordre des différences. Supposons en effet que l'on commette sur un terme une erreur ε ; cette erreur a alors des différences qui se présentent de la manière suivante (tableau 2) :

Tableau 2

0						
	0					
0		0				
	0		ϵ			
0		ϵ		-4ϵ		
	ϵ		-3ϵ		10ϵ	
ϵ		-2ϵ		6ϵ		-20ϵ
	$-\epsilon$		3ϵ		-10ϵ	
0		ϵ		-4ϵ		
	0		$-\epsilon$			
0		0				
	0					
0						

On risque donc, en utilisant les différences d'ordre supérieur, d'accroître l'influence des erreurs des données. Pour y porter remède, on peut alors utiliser le procédé suivant : au lieu de partir d'un polynôme constituant une interpolation *exacte* de la fonction donnée, on cherche un polynôme approchant cette fonction aussi bien que possible pour un ensemble de valeurs plus grand que celui qui servirait à une interpolation ; c'est ensuite la dérivée de ce polynôme qui sert à la dérivation approchée de la fonction : on cherche ainsi une approximation par moindres carrés [1] ; si on prend par exemple cinq valeurs de $f(x)$ et un polynôme du second degré tel que la somme des carrés des écarts soit minimum, on obtient pour la dérivée seconde l'expression approchée

$$f''(0) \# \frac{1}{h^2}\left(\Delta''_0 + \frac{2}{7}\,\Delta_0^{IV}\right); \tag{6}$$

avec un polynome de degré quatre et sept valeurs, on a

$$f''(0) \# \frac{1}{h^2}\left(\Delta''_0 - \frac{1}{12}\,\Delta_0^{IV} - \frac{13}{132}\,\Delta_0^{VI}\right). \tag{7}$$

A titre d'exemple, reprenons la dérivation de la fonction exponentielle, mais à partir d'une table comportant des imprécisions ; nous ajoutons pour cela, aux valeurs exactes du tableau 1, des quantités tirées au hasard, dispersées autour de zéro [2] ; on obtient ainsi le tableau 3 :

Tableau 3

x	$f(x)$	Δ'	Δ''	Δ'''	Δ^{IV}
0,80	2,2247				
		1156			
85	3403		48		
		1194		29	
90	4597		77		-61
		1271		-32	
95	5868		45		62
		1316		40	
1,00	7184		85		-56
		1401		-16	
05	2,8585		69		14
		1470		-2	
10	3,0055		67		2
		1537		0	
15	1592		67		
		1604			
20	3196				

Les petites imprécisions introduites dans $f(x)$ (qui seraient imperceptibles sur un graphique) suffisent pour modifier entièrement les différences quatrièmes ; utiliser la relation (4) avec ces valeurs serait absolument illusoire, et à plus forte raison la relation (5). Si on veut ici améliorer la relation (3) en tenant compte de différences supérieures, il faut le faire par une approximation avec moindres carrés, donc par exemple avec la relation (6) (c'est le mieux qu'on puisse faire ici) ; on trouve ainsi :

$$f''(1) = \frac{10^{-4}}{0{,}05^2}\left(85 - \frac{2}{7}\cdot 56\right) = 2{,}76,$$

ce qui est une bonne approximation, compte tenu du fait que les données sont approchées (avec une erreur moyenne quadratique égale à 0,001).

Il est néanmoins instructif de voir ce qui se passerait si l'on utilisait, pour calculer la dérivée seconde, la formule (4) qui tient compte de la différence quatrième dans l'hypothèse où la fonction est donnée exactement. On trouverait ainsi (tableau 4) :

Tableau 4

x	$f''(x)$ valeur exacte	valeur approchée	erreur
0,90	2,46	3,28	0,82
95	2,59	1,59	$-1{,}00$
1,00	2,72	3,59	0,87
05	2,86	2,71	$-0{,}15$
10	3,01	2,67	$-0{,}34$

Les erreurs sont considérables ; elles ont une certaine tendance à osciller autour de zéro, ce qui est presque toujours le symptôme du fait que l'on a utilisé une formule qui serait valable avec des données exactes, mais qui conduit à des résultats très inexacts avec des données approchées. On peut dire que si l'on opère sur une table comportant des imprécisions, les résultats seront d'autant plus mauvais que l'on emploie des formules qui seraient meilleures pour une table exacte.

Dérivation effectuée comme opération inverse d'une intégration. Il existe un grand nombre de formules d'intégration numérique ; elles ne présentent pas les fâcheuses propriétés de celles de dérivation approchée, ce qui provient simplement du fait que deux fonctions voisines donnent toujours des intégrales voisines ; les imprécisions sur les données tendent plutôt à se compenser. On peut alors être tenté, plus ou moins consciemment, d'utiliser une formule d'intégration approchée pour obtenir une dérivation approchée, par inversion des opérations. Or, ceci a les mêmes conséquences que les méthodes de dérivation par interpolation, conséquences ici aggravées du fait que les calculs sont plus compliqués et que cette complexité cache la cause d'écarts inadmissibles dans les résultats. On va le montrer sur un exemple très simple, qui peut ainsi clairement mettre en évidence les défauts de la méthode.

Imaginons que l'on désire calculer, à partir de la déformation, les efforts qui s'exercent sur une poutre chargée, de section constante et encastrée aux extrémités. En laissant de côté un coefficient numérique qui ne joue ici aucun rôle, on est ainsi amené à calculer une fonction $F(x)$ à partir d'une fonction $y(x)$ avec

$$F(x) = \frac{d^4y}{dx^4}\,;$$

[1] Ceci consiste en fait à rendre minimum l'écart quadratique moyen des erreurs sur la dérivée, compte tenu des erreurs sur les données.

[2] En fait, nous les avons tirées de la table : H. Wold, *Random normal deviates,* Tracts for computers XXV, Cambridge 1948 ; ce sont celles qui se trouvent à la première ligne de cette table (p. 2), multipliées par 0,001.

il faut donc calculer la dérivée quatrième de la fonction mesurée $y(x)$. Cherchons d'abord comment nous résoudrions numériquement le problème inverse : connaissant $F(x)$, calculer $y(x)$; on aurait à faire l'intégration d'une équation du quatrième ordre, avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} y(-l) &= y(l) = 0, \\ y'(-l) &= y'(l) = 0 \, ; \end{aligned}$$

on peut montrer que la solution serait donnée par

$$y(x) = \int_{-l}^{l} K(x,\xi)\, F(\xi)\, d\xi$$

avec

$$24 l^3 K(x,\xi) = \begin{cases} (l-\xi)^2 (l+x)^2 (l^2 - 2lx + 2l\xi - x\xi) \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad -l \leqq x \leqq \xi \leqq l \\ (l+\xi)^2 (l-x)^2 (l^2 + 2lx - 2l\xi + x\xi) \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad -l \leqq \xi \leqq x \leqq l \end{cases}$$

Or, cette intégrale peut se calculer d'une manière approchée ; on peut, par exemple, concentrer la charge sur un nombre fini de points P_i, ce qui permet de remplacer l'intégrale par une somme ; prenons ainsi $(n-1)$ points P_i, divisant le segment $(-l, l)$ en n parties égales ; soit de plus

$$k_{ij} = K(x_i,\ x_j) \, ;$$

on aura, d'une manière suffisamment approchée si n est grand, pour la déformation y_i en P_i :

$$(8) \qquad y_i = \sum_j k_{ij} F_j ,$$

où F_j est la charge concentrée au point P_j ; or, ceci constitue en fait un système de $(n-1)$ équations du premier degré pour les F_j ; en résolvant ce système, on obtient les F_j en fonction des y_i, donc en principe la solution du problème primitivement posé.

Il suffit d'essayer avec n assez grand ($n = 10$ par exemple) pour constater que le résultat est mauvais ; il l'est même d'autant plus que n est plus grand.

Le tableau 5 donne les valeurs des k_{ij} pour $l = 1$ et $n = 10$; il est dès lors facile de résoudre le système (8), dont la solution est de la forme

$$(9) \qquad F_j = \sum_i \gamma_{ji}\, y_i \, ;$$

les γ_{ji} sont donnés au tableau 6; on remarque que les γ_{ji} présentent des alternances très considérables alors que les k_{ij} sont au contraire très réguliers (ils sont notamment tous de même signe dans cet exemple) ; on voit dès lors qu'une petite différence sur un terme y_i donnera lieu à de gros écarts sur les F_j.

Pour mettre ce fait en évidence, donnons pour commencer aux y_i les valeurs obtenues en posant $F_j = 1$ dans (8) ; on a ainsi :

$$\begin{aligned} y_1 = y_9 &= 0{,}02700 , \\ y_2 = y_8 &= 0{,}08533 , \\ y_3 = y_7 &= 0{,}14700 , \\ y_4 = y_6 &= 0{,}19200 , \\ y_5 &= 0{,}20833 \, ; \end{aligned}$$

les relations (9) donnent alors pour les F_j :

$$\begin{aligned} F_1 = F_9 &= 1{,}012 , \\ F_2 = F_8 &= 1{,}009 , \\ F_3 = F_7 &= 1{,}024 , \\ F_4 = F_6 &= 1{,}021 , \\ F_5 &= 1{,}007 , \end{aligned}$$

valeurs qui sont effectivement peu différentes de la valeur $F_j = 1$ que l'on devrait obtenir (les écarts sont dus aux erreurs inévitables d'arrondi dans les calculs).

Prenons ensuite pour y_i des valeurs voisines des précédentes, obtenues par l'addition d'écarts pris au hasard [1], de moyenne 0,001 et cela sans détruire la symétrie ; ces écarts sont donc en moyenne de 0,5 % de la déformation maximum ; les nouvelles valeurs des y_i sont ainsi :

Tableau 5

Valeurs des k_{ij}, multipliées par 10^6

(Le tableau étant symétrique par rapport à ses deux diagonales, on n'a fait figurer ici que les termes situés en dessus de ces diagonales.)

j	$i = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1 944	3 925	4 835	4 896	4 333	3 371	2 232	1 141	323
2		10 923	15 157	16 128	14 667	11 605	7 776	4 011	
3			24 696	28 512	27 000	21 888	14 904		
4				36 864	37 333	31 403			
5					41 667				

Tableau 6

Valeurs des γ_{ji}

(Le tableau étant symétrique par rapport à ses deux diagonales, on n'a fait figurer ici que les termes situés en dessus de ces diagonales.)

	$i = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2 354	—1 488	600	— 161	43	— 11	3	—1	0
2		1 834	—1 349	562	— 151	40	—11	3	
3			1 797	—1 339	560	—150	40		
4				1 794	—1 338	560			
5					1 794				

$$
\begin{aligned}
y_1 = y_9 &= 0{,}02620\,, \\
y_2 = y_8 &= 0{,}08543\,, \\
y_3 = y_7 &= 0{,}14759\,, \\
y_4 = y_6 &= 0{,}19111\,, \\
y_5 &= 0{,}20764\,;
\end{aligned}
$$

or, en introduisant ces valeurs dans (9), on trouve :

$$
\begin{aligned}
F_1 = F_9 &= -\,0{,}541\,, \\
F_2 = F_8 &= 1{,}150\,, \\
F_3 = F_7 &= 2{,}429\,, \\
F_4 = F_6 &= -\,0{,}831\,, \\
F_5 &= 2{,}713\,;
\end{aligned}
$$

ces résultats montrent une complète irrégularité ; il a donc suffi dans ce cas pourtant très simple, comportant un axe de symétrie, de modifier arbitrairement et d'une manière très faible la déformation pour que les efforts, calculés par inversion de l'intégration, aient des valeurs complètement différentes.

Il serait bien plus simple dans un tel cas de recourir à une formule exprimant la dérivée quatrième par une combinaison de différences tabulaires. Pour une dérivée quatrième, l'expression la plus simple est :

$$f^{IV}(0) \# \frac{1}{h^4}\,\Delta_0^{IV}\,; \tag{10}$$

si on veut compenser (par moindres carrés) des erreurs sur les données, on utilise en plus la différence sixième, par la relation

$$f^{IV}(0) \# \frac{1}{h^4}\left(\Delta_0^{IV} + \frac{3}{11}\,\Delta_0^{VI}\right). \tag{11}$$

Dans l'exemple donné plus haut, les y_i exacts donneraient :

$$F(x_i) = \frac{1}{0{,}2^4}\cdot 0{,}00800 = 5\,,$$

ce qui est bien la densité de charge correspondant à des charges unités placées à des distances 0,2. Dans le cas des y_i avec imprécision, on trouve par (11) :

$$
\begin{aligned}
F(0) &= 4{,}22\,, \\
F(0{,}2) &= 4{,}98\,, \\
F(0{,}4) &= 5{,}60\,, \\
F(0{,}6) &= 4{,}33\,;
\end{aligned}
$$

ces valeurs sont évidemment moins bonnes que celles que donnent les y_i exacts ; elles sont néanmoins encore très utilisables, alors que celles qui résultent de l'inversion de la formule d'intégration sont complètement fausses.

Conclusions. La dérivation approchée se présente d'une manière moins favorable que l'intégration approchée quant à l'influence des imprécisions sur les données ; il faut en tenir compte dès que ces imprécisions deviennent appréciables. Il faut alors renoncer complètement à des méthodes qui reviennent à faire une interpolation avec un polynôme de degré élevé, sur un grand nombre de points (ou l'inversion d'une formule de quadrature, ce qui est encore pire) ; par contre, une dérivation avec compensation par les moindres carrés donne alors en général des résultats acceptables.

Dans le cas du calcul de dérivées secondes ou quatrièmes, on pourra faire usage des formules (6), (7) ou (11) ; il est même possible d'obtenir des formules tenant compte de l'inégalité de l'imprécision sur les diverses données tabulaires. Dans chaque cas, le résultat sera obtenu en cherchant le minimum de variance du résultat, en fonction des variances des données, considérées comme grandeurs aléatoires.

[1] En fait, tirés de la table de H. Wold, page 4, première ligne.

A PROPOS DU MANQUE AIGU D'INGÉNIEURS ET DE TECHNICIENS

par P. SOUTTER, ingénieur E.P.F., Zurich

Le rapport intitulé « Enseignement technique », remis en février 1956 par le Ministre anglais de l'instruction publique au Parlement anglais, a fait grande impression, à ce moment-là déjà, dans les milieux des pays industriels intéressés à la question de la relève du personnel technique. Churchill et Eden ont à cette époque personnellement insisté, dans des déclarations publiques marquantes, sur l'urgence du problème de la relève dans les professions techniques. — Dans un discours à Bradford, le 18 janvier 1956, Eden parla de la révolution scientifique mondiale et déclara :

> Les premiers prix ne reviendront pas aux pays ayant la plus forte population. Les vainqueurs seront ceux qui ont le meilleur système d'instruction. La science et les capacités techniques donnent à une douzaine d'hommes le pouvoir d'en faire autant que des milliers il y a cinquante ans. Mais si nous voulons utiliser pleinement ce que nous apprenons, nous avons besoin de beaucoup plus de savants, d'ingénieurs et de techniciens. Je suis décidé à combler cette lacune.

Avant d'aborder les propositions et décisions anglaises, il est nécessaire de définir quelques notions fondamentales.

Le manque actuel aigu d'ingénieurs et de techniciens n'est-il qu'un phénomène de conjoncture ou bien est-il dû à un changement de structure de notre vie sociale ? Toutes les réflexions et constatations faites à ce sujet conduisent à la conclusion que la technique empiète toujours plus et sans qu'on puisse l'arrêter sur tous les domaines de l'économie. Ce développement s'accentuera sans doute encore ces prochaines décennies dans l'industrie. Il est donc évident que nous assistons à une évolution de la structure de notre économie. La première manifestation de cette tendance à une mainmise de la technicité sur tous les aspects de la vie réside dans l'importance toujours plus grande que prennent les professions techniques. Les problèmes de la relève du personnel technique passent