

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 87 (1961)
Heft: 21

Artikel: Étude comparative des coques de révolution à génératrice rectiligne et à épaisseur de paroi constante
Autor: Tâche, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-65051>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 04.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ÉTUDE COMPARATIVE DES COQUES DE RÉVOLUTION À GÉNÉRATRICE RECTILIGNE ET À ÉPAISSEUR DE PAROI CONSTANTE

par J. TÂCHE, ingénieur EPUL aux Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey S.A.

(suite et fin)¹

EXEMPLE NUMÉRIQUE

L'agrégat choisi est représenté par la figure 6. Il se compose d'une coque conique, élément 2, soudée à deux coques cylindriques, éléments 1 et 3, le tout soumis à une pression intérieure p . On se propose de déterminer les perturbations et les déformations aux endroits A et B . Les unités admises pour le calcul sont le kg et le cm.

Les dimensions de l'agrégat sont les suivantes :

$$\begin{aligned} r_A &= 45 & r_B &= 55 & h_1 &= 1 & k_2 &= k_3 = 1,2 \\ \beta &= 30^\circ & \sin \beta &= 0,5 & \cos \beta &= 0,866025 \end{aligned}$$

On calcule les caractéristiques de la coque conique ; on obtient :

$$z_1 = 29,301 \quad z_2 = 32,393 \quad z_2 - z_1 = 3,092$$

D'après les tableaux de *Coques coniques*, on obtient par interpolation les valeurs des coefficients d'influence mentionnées au tableau suivant :

Indices	11	12	14	15	22
K	1,006	1,002	-0,0873	0,0167	1,0251
Indices	24	25	42	44	55
K	0,0147	0,1036	0,9995	0,9955	0,9859

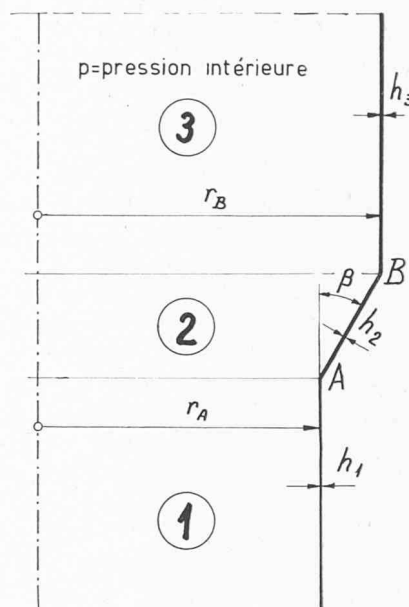


Fig. 6.

Tableau des coefficients de déformation de l'élément 1

	—	—	$M_n = M_A$	$H_n = H_A$	$V_o = V_A$	p
$\Omega_n = \Omega_{A1}$	41 —	42 —	44 -1,266414	45 -3,304542	46 —	4 —
$Y_n = Y_{A1}$	51 —	52 —	54 -3,304542	55 -17,245545	56 -0,3	5 + 2025

Tableau des coefficients de déformation de l'élément 2

	$M_o = M_A$	$H_o = H_A$	$M_n = M_B$	$H_n = H_B$	$V_o = V_A$	p
$\Omega_o = \Omega_{A2}$	11 + 0,867871	12 -2,299411	14 + 0,068123	15 -0,038324	16 -1,361408	1 + 41,969
$Y_o = Y_{A2}$	21 -2,299411	22 + 12,515163	24 + 0,033734	25 + 1,264824	26 + 7,665661	2 + 2 306,529
$\Omega_n = \Omega_{B2}$	41 -0,068123	42 -0,033734	44 -0,779947	45 -2,284494	46 -1,349015	4 -606,865
$Y_n = Y_{B2}$	51 + 0,038324	52 -1,264824	54 -2,284494	55 -13,306945	56 -8,702952	5 -1 084,251
$Z_n = Z_{B2}$	61 -1,361408	62 + 7,665661	64 + 1,349015	65 + 8,702952	66 + 9,836449	6 + 1 872,577

¹ Voir *Bulletin technique* n° 20 du 7 octobre 1961.

Tableau des coefficients de déformation de l'élément 3

	$M_o = M_B$	$H_o = H_B$	—	—	$V_o = V_A + 500p$	p
$\Omega_o = \Omega_{B3}$	$+ 0,726185$ 11	$- 2,294821$ 12	14	15	16	1
$Y_o = Y_{B3}$	$- 2,294821$ 21	$+ 14,503743$ 22	24	25	$- 0,25$ 26	$+ 2\,520,833$ 2

On remarque que le coefficient K_{14} est négatif, ce qui signifie que le moment agissant sur l'une des extrémités de la coque conique produit à l'autre extrémité une rotation de sens inverse au moment ; cela montre le caractère ondulatoire de la déformation de la génératrice (comme pour une coque cylindrique).

On admet que les coques cylindriques sont longues ; donc $K_{11} = K_{12} = K_{22} = 1$ et $K_{14} = K_{15} = K_{25} = 0$.

Connaissant les coefficients d'influence des trois coques, on en dresse les tableaux des coefficients de déformation.

Les perturbations sont munies d'un seul indice (A ou B) indiquant l'endroit où elles se produisent ; par contre les déformations sont désignées par deux indices, le premier (A ou B) indique l'emplacement de la face, le second (1, 2

ou 3) l'élément auquel la face appartient. Au bas de chaque case, à gauche, on a rappelé l'indice des coefficients de déformation. Pour les tableaux des éléments 1 et 3, on a supprimé toutes les lignes qui ne sont pas strictement nécessaires. Remarquons que pour le dernier tableau, on a, d'après l'équation d'équilibre du cône

$$V_o = V_B = V_A + \frac{55^2 - 45^2}{2} p = V_A + 500 p.$$

A partir des trois tableaux des coefficients de déformation, on dresse celui des équations, en exprimant que les déformations en A sont les mêmes pour les éléments 1 et 2, et que les déformations en B sont les mêmes pour les éléments 2 et 3.

Etablissement des équations

Conditions	M_A	H_A	M_B	H_B	V_A	p
$\Omega_{A1} - \Omega_{A2} = 0$	$- 1,266444$ $- 0,867871$	$- 3,304542$ $+ 2,299411$	$- 0,068123$	$+ 0,038324$	$+ 1,361408$	$- 41,969$
$Y_{A1} - Y_{A2} = 0$	$- 3,304542$ $+ 2,299411$	$- 17,245545$ $- 12,515163$	$- 0,033734$	$- 1,264824$	$- 0,3$ $- 7,665661$	$+ 2\,025$ $- 2\,306,529$
$\Omega_{B2} - \Omega_{B3} = 0$	$- 0,068123$ —	$- 0,033734$ —	$- 0,779947$ $- 0,726185$	$- 2,284494$ $+ 2,294821$	$- 1,349015$ —	$- 606,865$ —
$Y_{B2} - Y_{B3} = 0$	$+ 0,038324$ —	$- 1,264824$ —	$- 2,284494$ $+ 2,294821$	$- 13,306945$ $- 14,503743$	$- 8,702952$ $+ 0,25$	$- 1\,084,251$ $+ 0,25 \times 500$ $- 2\,520,833$

Le tableau ci-dessus fournit quatre équations linéaires ; pour les résoudre, on les conserve sous la forme du nouveau tableau ci-après.

Tableau des équations à résoudre

M_A	H_A	M_B	H_B	V_A	$p \times 1000$	Nombre de contrôle
$- 2,134285$	$- 1,005131$	$- 0,068123$	$+ 0,038324$	$+ 1,361408$	$- 0,041969$	$- 1,849776$
$- 1,005131$	$- 29,760708$	$- 0,033734$	$- 1,264824$	$- 7,965661$	$- 0,281529$	$- 40,311587$
$- 0,068123$	$- 0,033734$	$- 1,506132$	$+ 0,010327$	$- 1,349015$	$- 0,606865$	$- 3,553542$
$+ 0,038324$	$- 1,264824$	$+ 0,010327$	$- 27,810688$	$- 8,452952$	$- 3,480084$	$- 40,959897$

On considère V_A et p comme des valeurs connues. La résolution de ces quatre équations linéaires nous donne :

1. $M_A = + 0,794643 V_A - 7,418 p$
2. $H_A = - 0,281101 V_A - 3,434 p$
3. $M_B = - 0,927319 V_A - 403,375 p$
4. $H_B = - 0,290411 V_A - 125,139 p$

Le problème est donc résolu.

Interprétation des résultats

Les cas les plus fréquents qui peuvent se présenter en pratique sont :

1^{er} cas : L'agrégat est essayé à la pression p , en munissant les éléments 1 et 3 de couvercles appropriés (essai à l'usine).

2^e cas : L'agrégat fait partie d'une conduite forcée, l'élément 1 est ancré à un massif de béton, tandis que l'élément 3 est muni d'un joint de dilatation. (On néglige le poids propre de l'élément 3, ainsi que les forces axiales de frottement et particulièrement celle du joint de dilatation.)

1^{er} cas

$$V_A = \frac{45^2}{2} p = 1012,5 p.$$

Les équations 1 à 4 donnent

$$\begin{aligned} M_A &= +797,158 p \\ H_A &= -288,049 p \\ M_B &= -1342,285 p \\ H_B &= -419,180 p \end{aligned}$$

Des tableaux des coefficients de déformation on tire

$$\begin{aligned} \Omega_A &= -57,6 p \\ Y_A &= +4854,6 p \\ \Omega_B &= -12,8 p \\ Y_B &= -856,7 p \\ Z_B &= +3079,8 p \end{aligned}$$

Commentaires

Si l'on calcule les tensions de flexion en A et B , on constate que la tension en A dans l'élément 1 est plus grande que la tension en B .

On a

$$\sigma_A = \pm \frac{6 \times 797,158 p}{45 \times 1^2} = \pm 106,3 p.$$

Pour nous rendre compte de la valeur de cette tension, comparons-la à la tension circonférentielle dans l'élément 1 au large de la perturbation, c'est-à-dire à un endroit où la perturbation ne produit pratiquement plus aucun effet. Cette tension de référence, que nous désignerons par *tension étalon*, a la valeur suivante :

$$\sigma_e = \frac{45}{1} p = 45 p.$$

On voit donc que

$$\sigma_A = 2,36 \sigma_e.$$

A la tension σ_A il faut ajouter la tension axiale, qui est égale à $0,5 \sigma_e$, de sorte que la tension longitudinale maximum en A sera

$$\sigma_{\max} = (2,36 + 0,5) \sigma_e = 2,86 \sigma_e.$$

Elle se produit à l'extérieur de la coque.

La tension à l'intérieur de la coque est négative (compression), sa valeur est

$$\sigma_i = (-2,36 + 0,5) \sigma_e = -1,86 \sigma_e.$$

La tension circonférentielle en A est aussi très élevée :

$$t_A = \frac{4854,6 p}{45} + 0,3 \frac{1012,5 p}{1 \times 45} = 114,6 p = 2,55 \sigma_e.$$

Au sujet de la déformation de la coque conique, on remarque que Y_A est positif, tandis que Y_B est négatif ; par conséquent la conicité de l'élément 2 diminue sous l'effet des tractions axiales. En outre, ces dernières allongent la coque conique (Z_B est positif).

2^e cas

On a

$$V_A = \frac{45^2 - 55^2}{2} p = -500 p.$$

Les équations 1 à 4 donnent

$$\begin{aligned} M_A &= -404,740 p \\ H_A &= +137,117 p \\ M_B &= +60,285 p \\ H_B &= +20,067 p \end{aligned}$$

Des tableaux des coefficients de déformation, on tire :

$$\begin{aligned} \Omega_A &= +59,5 p \\ Y_A &= +1147,8 p \\ \Omega_B &= -2,3 p \\ Y_B &= +2673,5 p \\ Z_B &= -1187,6 p \end{aligned}$$

Commentaires

Les perturbations de ce cas sont de signe contraire à celles du premier cas, bien que la pression p soit restée la même. Elles sont de beaucoup plus faibles.

La tension de flexion dans l'élément 1 en A est

$$\sigma_A = \pm \frac{6 (-) 404,74 p}{45 \times 1^2} = \mp 53,96 p.$$

La compression axiale est

$$r_A = -\frac{500 p}{45 \times 1} = -11,11 p.$$

La traction maximum, en A , se produit à l'intérieur de la coque ; sa valeur est

$$\sigma_{\max} = (+53,96 - 11,11) p = +42,85 p = 0,95 \sigma_e.$$

En ce qui concerne la déformation de la coque conique, on remarque que Y_A est plus petit que Y_B , par conséquent la conicité augmente.

Elle augmenterait encore davantage si l'on faisait intervenir le poids propre de l'élément 3. Si l'on désigne par Q la composante axiale du poids propre de cet élément on aurait

$$V_A = -500 p - \frac{Q}{2 \pi}$$

C'est cette valeur-là qu'il faudrait introduire dans les formules 1 à 4.

Le poids propre de l'élément 3 augmente la valeur absolue de V_A et par conséquent les déformations et tensions qui sont des fonctions linéaires de cette valeur.

Digression : Formules rapides approximatives

Si la coque conique soudée à une coque cylindrique peut toutes deux être considérées comme des coques longues, il est possible d'établir des formules approximatives pour déterminer le moment à la jonction des deux coques, à la condition toutefois que celles-ci soient de même épaisseur et que l'agrégat forme un vase clos.

Supposons que ces conditions soient remplies et considérons la liaison A de la figure 6. (Pour éviter toute confusion, les valeurs se rapportant à la coque cylindrique sont surmontées d'un astérisque.)

On admet en première approximation que

$$K_{11} = K_{12} = 1 \quad \text{et} \quad K_{14} = K_{15} = 0.$$

D'autre part, par définition, on a

$$K_{41}^* = K_{42}^* = 0 \quad \text{et} \quad K_{44}^* = K_{45}^* = 1.$$

Exprimons que la rotation en A est la même pour les deux éléments :

$$5. \quad k_{44}^* M_A + k_{45}^* H_A = k_{11} M_A + k_{12} H_A + k_{16} V_A + \psi_1 p.$$

Si l'on consulte les tableaux I et II, on constate que $k_{45}^* = k_{12}$. Par conséquent les termes en H_A s'annulent et l'équation 5 devient

$$6. \quad (k_{44}^* - k_{11}) M_A = k_{16} V_A + \psi_1 p.$$

Pour calculer ψ_1 , on néglige tous les termes où b_0 n'est qu'à la première puissance.

On aura donc, pour le second membre de l'équation 6 :

$$k_{16} V_A + \left(\frac{\tan \beta}{2 \cos^2 \beta} b_A^2 k_{12} - \frac{r_A^2}{2} k_{16} \right) p.$$

Or $V_A = \frac{r_A^2}{2} p$, en tenant compte de cette valeur et après simplification, le second membre de l'équation 6 se réduit à

$$\frac{\tan \beta}{2 \cos^2 \beta} b_A^2 k_{12} p = \frac{\tan \beta}{2} r_A^2 k_{12} p.$$

L'équation 6 devient

$$7. \quad (k_{44}^* - k_{11}) M_A = \frac{\tan \beta}{2} r_A^2 k_{12} p.$$

En remplaçant les coefficients k par leur valeur, on obtient finalement

$$8. \quad M_A = \frac{1}{4 m} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta + \sqrt{\cos \beta}} \cdot r_A^2 \sqrt{h r_A} \cdot p$$

Par des raisonnements analogues, on peut établir pour la face B la formule suivante :

$$9. \quad M_B = -\frac{1}{4 m} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta + \sqrt{\cos \beta}} \cdot r_B^2 \sqrt{h r_B} \cdot p$$

$$\text{Si } \nu = 0,3, \quad \frac{1}{4 m} = 0,194491.$$

Nous tenons à rappeler que les formules 8 et 9 sont approximatives et applicables à un agrégat remplissant les conditions suivantes :

- 1° La coque conique et la coque cylindrique sont toutes deux longues.
- 2° L'épaisseur des coques est la même.
- 3° L'agrégat forme un vase clos, c'est-à-dire que la traction axiale par radian dans la coque cylindrique est égale à $\frac{r^2}{2} p$.
- 4° Les caractéristiques z_1 et z_2 de la coque conique sont supérieures à 5 (afin que K_{11} et K_{12} soient approximativement égaux à 1 ; voir tableau 16, *Coques coniques*).

Pour se rendre compte de la précision de ces formules, appliquons la formule 9 à l'ensemble numérique qui vient d'être traité, bien que la coque conique en question ne réponde pas tout à fait aux conditions que l'on vient d'énoncer, car elle n'est qu'approximativement une coque longue.

On obtient :

$$M_B = -1330,3 p.$$

En comparant cette valeur avec celle obtenue précédemment ($-1342,3 p$), on constate que la différence est seulement d'environ 0,9 %.

Calcul de la tension longitudinale en A et B

Considérons d'abord la face A.

$$\nu_A = \pm \frac{6M_A}{r_A h^2} = \pm \frac{6}{4m} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta + \sqrt{\cos \beta}} \cdot \frac{r_A^2}{r_A h^2} \sqrt{hr_A} \cdot p.$$

On pose :

$$\theta = \frac{3}{2m} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta + \sqrt{\cos \beta}} \sqrt{\frac{r_A}{h}}$$

$$\sigma_e = \frac{r_A}{h} p.$$

On obtient :

$$\nu_A = \pm \theta \sigma_e.$$

A cette tension de flexion, il faut ajouter la traction

$$r_A = +0,5 \sigma_e.$$

La tension longitudinale maximum de traction est donc

$$10. \quad \sigma_{\max} = (\theta + 0,5) \sigma_e$$

Il est facile de voir que cette formule est aussi valable pour la face B, à condition, bien entendu, de remplacer r_A par r_B et avec cette différence, toutefois, que la tension maximum en A se produit à l'extérieur de la coque, tandis qu'en B elle est à l'intérieur.

La formule 10 est donc commune aux faces A et B. Elle est applicable si les conditions énoncées pour les formules 8 et 9 sont satisfaites. On calcule θ par l'expression

$$11. \quad \theta = \frac{3}{2m} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta + \sqrt{\cos \beta}} \sqrt{\frac{r}{h}}$$

$$12. \quad \sigma_e = \frac{r}{h} p.$$

Dans ces formules, r représente le rayon de la face, et h l'épaisseur des coques.

$$\text{Si } \nu = 0,3, \quad \frac{3}{2m} = 1,166946.$$

Bien que la face A de l'exemple numérique choisi ne remplisse pas les conditions de validité requises pour l'application de la formule 10, car les deux coques sont d'inégale épaisseur, on peut, à titre de curiosité, utiliser cette formule dans le but de se rendre compte de l'erreur commise.

On pose $r = 45$, $h = 1$.

On obtient, par la formule 10

$$\sigma_{\max} = 2,68 \sigma_e.$$

La valeur obtenue précédemment et qui peut être considérée comme exacte est

$$\sigma_{\max} = 2,86 \sigma_e.$$

C'est donc une erreur par défaut de 6,7 % que l'on commet en appliquant à tort la formule 10. Cette erreur est due au fait qu'en utilisant la formule 10, on a admis implicitement que la coque conique était de même épaisseur que la coque cylindrique. Or la coque conique est plus épaisse et par conséquent plus rigide. Cette plus grande rigidité oblige la coque cylindrique à se déformer davantage, ce qui a pour effet d'augmenter la tension longitudinale dans l'élément 1.

Conclusion

Cette digression, qui termine l'exemple numérique, ne doit pas nous faire oublier que le but principal de cet exemple était de montrer les avantages qu'il y a de grouper en tableaux les coefficients de déformation. Non seulement on réduit au minimum le nombre des coefficients à calculer, mais encore l'établissement des équations se trouve simplifié ; il peut s'effectuer d'une façon méthodique et avec le minimum d'écritures, ce qui a pour effet de diminuer les causes d'erreurs.

DIVERS

Eurogypsum

Association européenne des fabricants de plâtre

Le 28 avril 1961 vit la fondation de l'Eurogypsum à Genève, où se trouve aujourd'hui son siège.

46 délégués de l'industrie du plâtre de onze pays de l'Europe occidentale assistèrent à l'assemblée de fondation et à la première séance de travail qui la suivit. Toutes les propositions élaborées par le comité fondateur furent approuvées à l'unanimité, après avoir fait l'objet d'une discussion approfondie. M. H. Blattmann, ingénieur, membre du Conseil d'administration de la Gips-Union S.A., à Zurich, fut élu président de l'Eurogypsum, et M. G. Chuat, président du Syndicat national des fabricants de plâtre, Paris, fut désigné comme vice-président.

Les statuts définissent comme suit le but de l'Eurogypsum :

« Promouvoir le développement de l'industrie du plâtre, du gypse, de l'anhydrite ainsi que des éléments de cons-

truction qui en dérivent. On cherchera à atteindre ce but par l'étude en commun des questions scientifiques, techniques, économiques, juridiques et des moyens de propagande intéressant cette industrie. L'Eurogypsum ne se propose aucun but lucratif. »

Après avoir été introduits en quelques mots par le président, d'éminents spécialistes présentèrent des exposés au cours de la séance de travail consacrée aux questions techniques : M. le Dr Georges Pièce, de Bex, chef du Laboratoire et du service de recherches de la Gips-Union S.A., à Zurich, traita le sujet « Questions scientifiques et problèmes techniques dans l'industrie du plâtre ». M. le Dr ingénieur E. Eipeltaufer, professeur à la Technische Hochschule de Vienne, parla des « Problèmes relatifs à la production du plâtre et de son emploi en Allemagne et en Autriche ». M. le Dr P. Esenwein, chef de section au Laboratoire fédéral d'essais de matériaux, à Zurich, développa le thème « Méthodes rapides pour le contrôle de la qualité du gypse ». M. Gibaru, ingénieur au Laboratoire de la Société Poliet et Chausson, à Paris, parla de « L'application du plâtre dans la région parisienne, enduit de plâtre coupé », et M. Ch. Collomb, ingénieur au Laboratoire