

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 89 (1963)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Vues nouvelles sur le calcul de la précontrainte dans les ouvrages hyperstatiques  
**Autor:** Courtot, P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66295>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# VUES NOUVELLES SUR LE CALCUL DE LA PRÉCONTRAINTÉ DANS LES OUVRAGES HYPERSTATIQUES<sup>1</sup>

par P. COURTOT, ingénieur EPUL

## I. Introduction

Le béton précontraint ne cesse de faire preuve de son dynamisme, et son avenir paraît des plus prometteurs. Sur le plan technique, il constitue un des faits majeurs de notre époque.

Ce développement est sans doute trop rapide pour ne pas s'accompagner d'un certain empirisme dans le choix des méthodes de dimensionnement. Il en résulte parfois quelques incorrections dans les projets. Le plus souvent, fort heureusement, le projet est valable, mais c'est au prix d'une dépense de travail excessive.

La présente note est un essai de systématisation du calcul des ouvrages précontraints ; elle s'efforce d'atteindre un double but, à savoir de favoriser l'emploi de données constructives les plus logiques, tout en s'appuyant sur des notions aussi simples que possible.

Nous serions heureux si cette note pouvait constituer un réel encouragement à l'étude des cadres et portiques en béton précontraint, particulièrement dans le domaine du bâtiment, où ce matériau est en mesure de conquérir un très vaste marché.

## II. Généralités sur le calcul en continuité

La notion fondamentale de la statique plane est celle de *Membrure*, qui se définit, relativement à ses extrémités, au moyen de quatre conditions d'élasticité, soit un raccourcissement, une distorsion et deux rotations en bout.

Dès le moment où nous devons relier rigidement ou élastiquement des membrures entre elles, nous avons affaire à deux catégories de méthodes opposées : celles qui utilisent, comme matériau brut, la travée sur deux appuis libres, et celles qui se servent de la travée encastrée.

La seconde catégorie présente l'avantage d'être plus systématique et de déboucher, suivant les besoins, sur des méthodes exactes ou bien approchées (Cross).

De plus, ces méthodes s'utilisent naturellement par résolution du système hyperstatique sous des efforts unitaires, les charges réelles étant appliquées ultérieurement à un système déjà résolu ; c'est un immense avantage.

Toutes ces raisons font que nous avons adopté la membrure encastrée aux deux extrémités comme donnée de base de la méthode proposée dans cet article.

Il s'ensuit, bien entendu, que la résolution de notre système hyperstatique comportera toujours une opération de déblocage des nœuds, que ce soit par relaxation ou par la méthode directe.

## III. Effets hyperstatiques de la Précontrainte

Le but de ce paragraphe est d'attirer l'attention sur une particularité du déblocage des nœuds en cas d'efforts provenant de la précontrainte. L'importance de cette question est telle que nous devons nous y arrêter un instant.

Comme on sait, la précontrainte est un système de forces qui résulte dans une somme de deux effets : la

force d'impact  $H$ , appliquée en bout de travée, et les forces de funiculaire, appliquées le long du câble plus ou moins normalement à celui-ci (fig. 1).

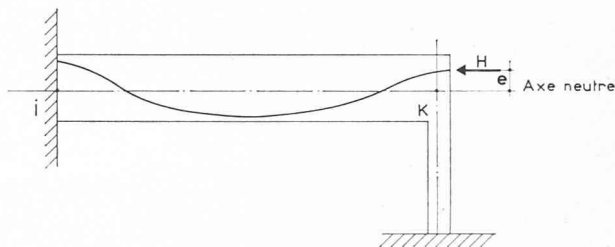


Fig. 1. — La force d'impact et son moment rapporté à l'axe neutre.

Il est évident que les nœuds doivent être déblocés relativement à l'ensemble de ces forces, c'est-à-dire :

- premièrement, les forces de funiculaire que l'on a trouvées en étudiant la membrure encastrée ;
- deuxièmement, les forces d'impact, aux nœuds où elles se produisent.

Pour avoir cela bien clair à l'esprit, il est nécessaire de revenir sur la définition du moment de précontrainte. Nous conviendrons d'utiliser les termes de Moment isostatique, Moment hyperstatique et Moment résultant conformément aux indications de la figure 2, avec les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} M \text{ isostatique} &= H \times e_i \\ M \text{ hyperstatique} &= H \times e_h \\ M \text{ résultant} &= H \times e_r \end{aligned}$$

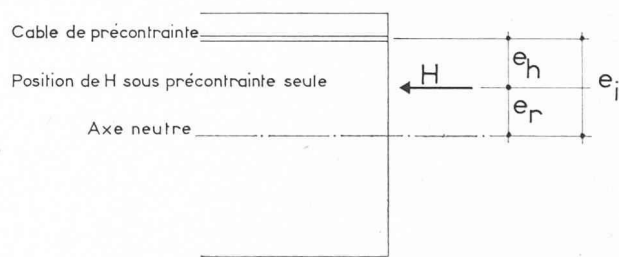


Fig. 2. — Effet de la précontrainte seule dans une section de poutre d'un système hyperstatique.

Etant donné ces définitions, il est clair que l'on peut écrire la somme des moments appliqués au nœud, de deux manières différentes :

- a) On peut dire que le nœud supporte la somme du moment résultant provenant de la travée bloquée et du moment isostatique  $M = H \times e_i$  (voir fig. 1).
- b) On peut dire que le nœud supporte uniquement le moment hyperstatique de la travée bloquée  $M = H \times e_h$ .

<sup>1</sup> Cette étude est tirée du Recueil de travaux offert au professeur A. Stucky, en hommage de reconnaissance, sur l'initiative de l'Association amicale des anciens élèves de l'École polytechnique de Lausanne, le 27 octobre 1962, l'année de son 70<sup>e</sup> anniversaire.

En écrivant la relation

$$H \times e_i - H \times e_r = H \times e_h$$

on constate à l'évidence que ce sont deux façons de dire la même chose.

Si nous insistons sur ce point, c'est parce que la première façon de présenter les efforts au nœud est bien moins répandue que la deuxième, mais que cependant elle nous paraît plus logique.

Aussi, dans les formules qui suivent, nous introduirons de préférence le moment résultant de précontrainte, quitte à ne pas omettre de débloquent le moment isostatique de précontrainte en bout de travée.

Les personnes qui craindraient de faire des confusions en utilisant notre moment résultant n'auraient qu'à en soustraire le moment isostatique pour retomber sur la notion bien connue de moment hyperstatique. L'ennui, c'est qu'en procédant ainsi on soustrait une quantité qu'il faut ensuite réintroduire à nouveau dans le calcul des contraintes, opération qui heurte le bon sens.

#### IV. Considérations sur la forme du câblage<sup>1</sup>

Le tracé des câbles doit être habituellement curviligne, et la courbe dont les ordonnées se calculent le plus aisément est évidemment la parabole. Le tracé doit donc être constitué d'une suite d'arcs de parabole, à moins que l'on ait des raisons impérieuses de procéder autrement.

Mais bien au contraire, d'autres raisons encore militent en faveur de la parabole : en travée, elle produit un effet funiculaire pratiquement uniforme qui correspond à la charge extérieure habituellement uniforme elle aussi. Sur appui, le problème est d'obtenir sur une distance donnée une déviation maximum pour une courbure minimum : la parabole satisfait à cette condition.

Ce tracé donnera satisfaction aux constructeurs, qui savent que dans bien des cas le câble doit redescendre le plus vite possible de part et d'autre de l'appui, faute de quoi on crée dans certaines sections voisines de l'appui de fortes tractions en fibre inférieure à vide.

En ce qui concerne le choix des paramètres, il nous a paru nécessaire et suffisant d'en avoir trois, à savoir : les excentricités sur appui et en travée (dont les différences constituent les paramètres  $\delta_i$  et  $\delta_k$ ) et le paramètre que nous avons appelé  $R_{ik}$  (voir fig. 3).

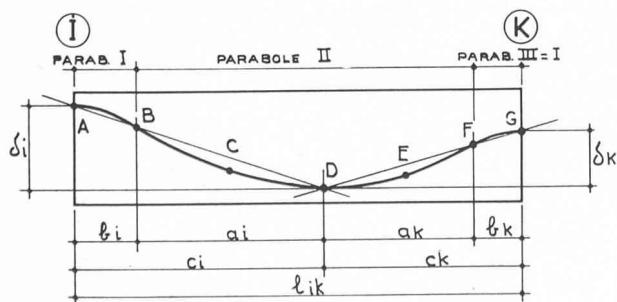


Fig. 3. — Tracé-type : paramètres et points principaux.

<sup>1</sup> A ce sujet, il nous paraît indispensable de préciser que les ordonnées de notre courbe sont à mesurer à partir de la droite idéale joignant les nœuds en bout de membrure, et non pas à partir de l'axe neutre, qui peut ne pas être rectiligne.

$$R_{ik} = \frac{b_i + b_k}{l_{ik}}$$

Cet intéressant paramètre est égal à la longueur totale de la zone à courbure vers le bas, rapportée à la longueur de la membrure. Ce rapport peut varier habituellement entre 0,05 et 0,20.

C'est ce paramètre qui joue le rôle essentiel vis-à-vis du moment hyperstatique de précontrainte.

#### V. Propriétés particulières du tracé proposé

Outre le choix des arcs de paraboles, notre tracé présente encore les caractères suivants :

- Les tangentes à la courbe, sur les appuis, sont parallèles à la membrure.
- Les paramètres agissent de telle sorte que l'arc de parabole  $BDF$  est unique et que les arcs  $AB$  et  $FG$  ont même courbure.

#### VI. Pratique du dessin du câblage

A partir des trois paramètres  $\delta_i$ ,  $\delta_k$  et  $R$ , on procède ainsi :

##### a) Calcul des $\lambda$

On utilise dans la suite du calcul ces coefficients  $\lambda$ , qui valent :

$$\lambda_i = \frac{\sqrt{\delta_i}}{\sqrt{\delta_i} + \sqrt{\delta_k}} \quad \lambda_k = \frac{\sqrt{\delta_k}}{\sqrt{\delta_i} + \sqrt{\delta_k}}$$

(d'ailleurs  $\lambda_i = 1 - \lambda_k$ ).

##### b) Repérage des points B, D et F

Leurs abscisses s'obtiennent aisément par :

$$c_i = l\lambda_i \quad c_k = l\lambda_k$$

$$b_i = Rc_i \quad b_k = Rc_k$$

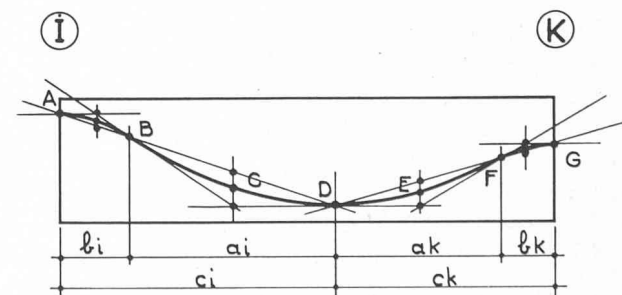


Fig. 4. — Tracé-type : mode de construction.

##### c) Construction de la courbe (voir fig. 4)

Celle-ci est grandement facilitée par le fait que :

- les points A, B et D sont en ligne droite, de même que D, F et G ;
- les pentes en B et F sont doubles de celles des droites AD et DG.

A noter les formules donnant les rayons de courbure :

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{2\delta_i}{Rc_i^2} = \frac{1}{\rho_k} = \frac{2\delta_k}{Rc_k^2}$$

$$\frac{1}{\rho_{ik}} = \frac{2\delta_i}{(1-R)c_i^2} = \frac{2\delta_k}{(1-R)c_k^2}$$

### VII. Moments dus à la précontrainte

Dans ce chapitre, on considère uniquement les poutres dans lesquelles l'effort de précontrainte  $H$  est pratiquement uniforme le long de l'abscisse.

#### 1. Poutre à section constante

Dans ce cas, le moment résultant (voir définition fig. 2) est donné par l'expression suivante (au point I) :

$$\frac{M_i}{H\delta_i} = 1 - (1+R) \left(1 - \frac{1}{6\lambda_i^2}\right) - R^2 \frac{\lambda_k^4 - \lambda_i^4}{2\lambda_i^2}$$

Mais si l'on observe que dans les cas habituels de la pratique on a

$$R < 0,15 \quad \text{et} \quad \lambda < 0,60$$

alors le troisième terme du polynôme est plus petit que 0,7 %, et la valeur approchée à 0,7 % vaut :

$$\frac{M_i}{H\delta_i} = 1 - (1+R) \left(1 - \frac{1}{6\lambda_i^2}\right)$$

En particulier si le câblage est symétrique ( $\lambda_i = 0,5$ ) on a :

$$\frac{M_i}{H\delta_i} = \frac{1}{3} (2 - R)$$

#### 2. Cas d'une poutre à section variable

Dans ce cas, on ne peut évidemment donner une formule qui convienne pour tous les cas imaginables de lois de variation. Par contre, on peut se servir de l'une ou l'autre des tables de valeurs déjà publiées<sup>1</sup>, en introduisant des charges fictives équivalentes aux effets du câblage. On utilisera avec profit le fait que notre câblage est équivalent à une charge fictive particulièrement simple, caractérisée par deux valeurs seulement (voir fig. 5).

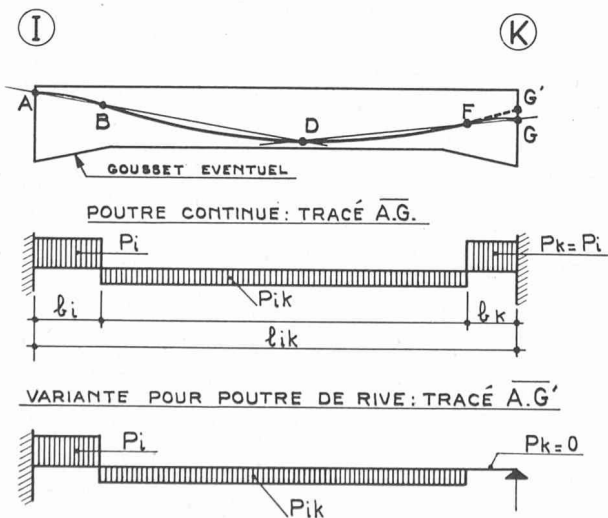


Fig. 5. — Tracé-type : charges fictives équivalentes.

<sup>1</sup> Par exemple, "Le calcul pratique des constructions à inertie variable" de Pierre Charon.

Cette charge fictive vaut :

$$P_i = \frac{2H\delta_i}{RC_i^2}$$

$$P_{ik} = \frac{2H\delta_i}{(1-R)C_i^2}$$

Pour l'utilisation rationnelle des tables, on a même intérêt à charger toute la poutre avec  $P_{ik}$  uniforme, et à déduire ensuite dans les zones d'extrémité les charges uniformes :

$$(P_i - P_{ik}) = \frac{2H\delta_i}{R(1-R)C_i^2}$$

### VIII. Câblage concordant

On sait qu'un tracé peut être étudié de façon que le moment hyperstatique soit égal à zéro ; c'est ce que M. Guyon a appelé le « Câblage concordant ». On peut tirer des équations qui précèdent la condition donnant la valeur du paramètre  $R$  pour un câblage concordant :

$$R = \frac{1}{1 - \frac{e_i}{6\lambda_i^2} - \frac{\delta_i}{6\lambda_i^2}}$$

Dans cette formule,  $e_i$  est l'excentricité du câble par rapport à l'axe neutre dans la section I.

En particulier si la poutre est symétrique :

$$R = 2 - 3 \frac{e}{\delta}$$

### IX. Cas d'une travée de rive

En pratique, on pourra souvent utiliser dans ce cas le tracé proposé ci-dessus ; le fait que les câbles ont un tracé final horizontal produit une légère majoration des pertes par frottement, ce qui est un inconvénient, mais ceci est compensé par l'avantage d'une plus grande simplicité d'exécution (pose des ancrages).

Toutefois on peut désirer sortir de la poutre suivant une position oblique. Dans ce cas, nous proposons la variante indiquée sur la figure 6.

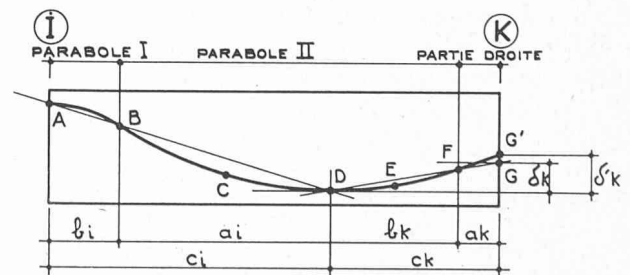


Fig. 6. — Tracé-type : variante pour travée de rive.

Pratiquement on part de la valeur de  $\delta'_k$  qui est supposée donnée.

On calcule alors le  $\delta_k$  :

$$\delta_k = \frac{\delta'_k}{(1+R)}$$

Toute la construction se fait au moyen des trois paramètres habituels  $\delta_i$ ,  $\delta_k$  et  $R$ .

Les moments résultants de la poutre encastrée aux deux extrémités sont donnés ci-après (formules approchées à 1 %) :

$$\frac{M_i}{H\delta_i} = 1 - (1 + R) \left( 1 - \frac{1}{6\lambda_i^2} \right) \quad (\text{inchangé})$$

$$\frac{M_k}{H\delta_k} = (1 + R) \frac{1}{6\lambda_k^2} \quad \text{ou} \quad \frac{M_k}{H\delta'_k} = \frac{1}{6\lambda_k^2}$$

Si ce nœud  $K$  est élastiquement encastré, on le déblocquera en fonction des données du système hyperstatique. S'il est libre en rotation, on le déblocque aisément en envoyant au point  $I$  la moitié de  $M_k$ .

Dans le cas d'une poutre à moment d'inertie variable, on utilisera la charge fictive selon figure 5.

### X. Câblage avec partie droite.

Nous donnons encore, pour terminer, les caractéristiques d'un câblage comportant une partie rectiligne en travée (fig. 7).

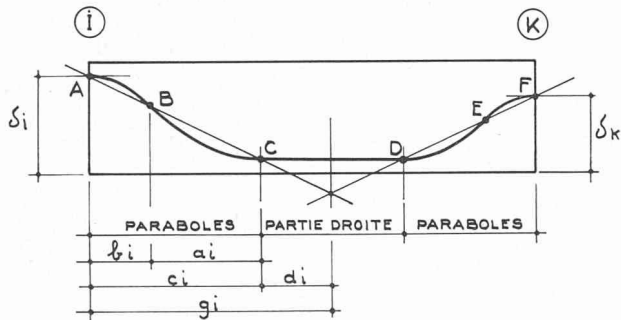


Fig. 7. — Tracé-type avec partie droite.

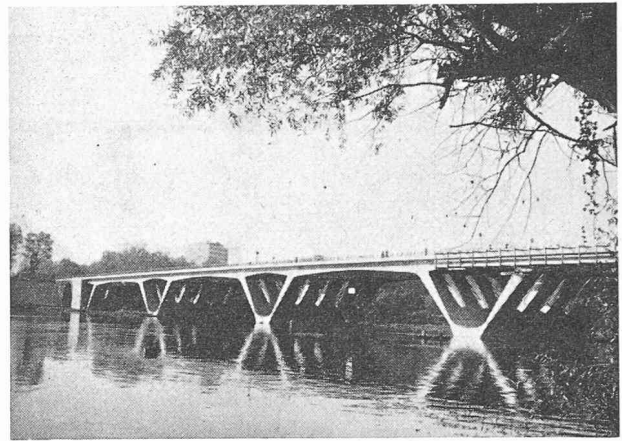
Tout en étant en principe moins rationnel que les précédents dans le cas d'une charge uniforme, il peut être indiqué en divers cas de charges concentrées ; il permet également de descendre très rapidement de part et d'autre des appuis, ce qui peut être désiré dans certains cas.

Il comporte un paramètre supplémentaire, désigné par  $Q$ , qui vaut :

$$Q = \frac{C_i + C_k}{e} = \frac{\text{partie parabolique}}{\text{portée}}$$

De façon analogue au cas précédent, les abscisses des points caractéristiques s'obtiennent aisément par :

$$\begin{aligned} g_i &= e d_i & g_k &= e d_k \\ c_i &= Q g_i & c_k &= Q g_k \\ b_i &= R c_i & b_k &= R c_k \end{aligned}$$



Exemple d'un ouvrage précontraint hyperstatique : Le pont St-Michel à Toulouse. (Etude S.T.U.P.)

On notera que, grâce au choix des paramètres, les expressions des courbures et des charges fictives sont les mêmes que celles données précédemment (paragraphe VI et IX).

Compte tenu de l'introduction du paramètre  $Q$ , et en négligeant comme précédemment les termes en  $R$  de degré supérieur à un (approximation à 1 %), on peut écrire les formules des moments résultants comme suit :

1. Courbure en  $AB$  :

$$\frac{M_i}{H\delta_i} = 1 - Q(1 + R) \left[ 1 - \frac{1}{6\lambda_i^2} - (1 - Q) \frac{\lambda_k^4 - \lambda_i^4}{2\lambda_i^2} \right]$$

2. Partie droite en  $AB$  :

$$\frac{M_i}{H\delta_i} = (1 + R) - Q(1 + R) \left[ 1 - \frac{1}{6\lambda_i^2} - (1 - Q) \frac{\lambda_k^4 - \lambda_i^4}{2\lambda_i^2} \right]$$

### XI. Conclusions

On peut constater que la méthode proposée est d'une utilisation aisée, et nous espérons qu'elle pourra être utilisée avec profit dans divers bureaux d'étude.

La question des pertes de précontrainte par frottement le long de la gaine n'a pas été abordée, car son importance ne sera pas habituellement déterminante : il suffira d'adopter une valeur moyenne. Au besoin, on peut en tenir compte de façon assez précise en superposant à nos charges fictives une charge fictive secondaire qui se réduira pratiquement à une charge triangulaire.

On dit dans notre profession que « la meilleure méthode est celle que l'on connaît bien » ; à ce point de vue, celle que nous proposons ne saurait être que mauvaise au premier abord. Néanmoins, il suffira sans doute de quelques applications... pour la faire paraître moins mauvaise, du moins nous l'espérons.

(suite de la page 61)

indications relatives à la fabrication et à l'emploi, dans l'industrie du bâtiment, des éléments de construction en béton et en béton armé soumis à un traitement en autoclave.

Ce livre s'adresse à tous les ingénieurs et techniciens qui ont à réaliser des ouvrages en béton et en béton armé ou à effectuer des recherches dans des organismes et laboratoires chargés de l'étude des problèmes de la construction.

### Sommaire :

1. Historique succinct de l'évolution du procédé de traitement en autoclave des matériaux et des éléments de construction. — 2. Phénomènes physico-chimiques accompagnant, au cours du traitement en autoclave, le durcissement du ciment Portland contenant des additions siliceuses. — 3. Propriétés physico-mécaniques d'un béton soumis à un durcissement en autoclave. — 4. Fabrication et emploi en construction d'éléments en béton et en béton armé soumis à un durcissement en autoclave. — Bibliographie.