Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 95 (1969)
Heft: 12

Artikel: Vers une théorie générale en hyperstatique des systèmes articulés

Autor: Ansermet, Auguste

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-70239

95e année Lausanne, 14 juin 1969 No 12

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

SOMMAIRE

Vers une théorie générale en hyperstatique des systèmes articulés, par Auguste Ansermet, ing.-professeur.
Bibliographie. — Société suisse des ingénieurs et des architectes.
Documentation générale. — Informations diverses.

VERS UNE THÉORIE GÉNÉRALE EN HYPERSTATIQUE DES SYSTÈMES ARTICULÉS [1]

par Auguste ANSERMET, ing.-professeur

Rappel de notions usuelles

En 1915 un remarquable mémoire était soumis à l'Académie des sciences par la chaire de statique de Lausanne dont le titulaire était alors le professeur Benjamin Mayor ; la solution présentée avait à bien des égards un caractère nouveau. Elle ne comportait pas la formation de dérivées partielles de l'énergie ni la coupure de barres surabondantes. Or on constate que cette solution répond aux exigences modernes dans le domaine du calcul de systèmes articulés. Les équations établies par l'éminent professeur lausannois sont susceptibles de fournir tous les éléments contenus dans les matrices de rigidité ; ces équations sont celles sur lesquelles est basé le mode de calcul Stress ; ce dernier est en faveur surtout en Amérique. La solution basée sur le calcul des déformations se révèle de beaucoup la meilleure.

Théorie des déformations

De plus à Lausanne on avait remarqué que le choix des inconnues ne permettait guère jusqu'ici de développer une théorie générale des déformations des structures hyperstatiques. Dans le texte présenté à l'Académie le professeur Mayor donnait la préférence aux variations de coordonnées des nœuds résultant de déplacements supposés infiniment petits de ceux-ci. Une discrimination est ici à faire ; à cet effet considérons un cas concret qui peut être qualifié de standard vu son caractère spécial. Pour cette raison il fut traité dans une précédente publication de l'EPUL et les lignes qui suivent constituent un rappel succinct avec quelques développements nouveaux portant sur le choix des poids et des inconnues. Avant de continuer il convient de signaler que B. Mayor ne doit pas avoir publié les résultats de toutes ses recherches ; c'est un des buts poursuivis ici de développer davantage le texte assez condensé paru en 1926. Encore une fois la notion d'ellipsoïde de déformation d'un nœud devait être connue des professeurs Mayor et Maurice Paschoud.

[1] Texte publié à la mémoire du professeur B. Mayor, patronné par la Direction de l'Ecole polytechnique fédérale et subsidié par la *Société académique vaudoise* et le *Fonds national*. Il fait suite à celui publié dans le *Bulletin technique* no 3 du 8 février 1969.

Outre-Rhin les recherches sont très poussées ; K. Friedrich, par exemple, assimile même les déformations à des erreurs et fait aussi varier les coordonnées des nœuds (Koordinatenzuschläge). A cet effet il attribue les mêmes poids aux barres d'un système et aux côtés d'un réseau mesuré.

Quant aux praticiens de l'électrotélémétrie ils sont rompus à ce genre de calculs (« Die Analogie zwischen den Stabfachwerken und Streckennetzen wurde bald erkannt » est un slogan bien connu) ; mais quand les côtés surabondants d'un réseau sont coupés il n'est pas possible de les remplacer par des forces. En électrotélémétrie la notion de matrice de rigidité pourrait être envisagée.

Si l'on considère un nœud unique soit en hyperstatique soit en électrotélémétrie on obtient une équation générale de la forme

$$(1) \qquad v = adx + bdy + cdz + f \quad \text{(poids } p\text{)}$$

où la somme des pvv est à rendre minimum ; les coefficients a, b, c sont pratiquement les mêmes que l'on fasse ou non des coupures tandis que les f sont les termes absolus, arbitraires, toujours nuls quand la solution de Mayor est adoptée ; pour celle-ci la condition du minimum n'intervient pas et les variations inconnues dx, dy, dz deviennent des Dx, Dy, Dz ($f = 0$) ; pour la variation v de longueur de la barre on a :

$$(2) \qquad v = m\,T$$

(m = module de la barre ; T = effort axial)
Notations de B. Mayor

En électrotélémétrie on dit pour v : « amélioration » traduction du terme « Verbesserung ». En télémétrie on posa depuis longtemps : somme pvv = const.

Enfin l'éminent professeur lausannois a ajouté un groupe d'équations de forme générale

$$(3) \qquad F\,(Dx, Dy, Dz) = 0$$

exprimant par exemple que le déplacement de certains nœuds doit s'effectuer sur une surface donnée.

C'est précisément un aspect du problème qui sera traité plus à fond vers la fin de ce texte.

Ces notions usuelles étant rappelées, passons au cas dont il a été fait mention. Il y a 30 barres dont 15 surabondantes et 15 variations inconnues des coordonnées des nœuds ; une telle égalité ne se présente pas fréquemment et causera un peu d'embarras aux praticiens qui choisissent une solution en se basant sur le nombre d'équations à résoudre. Ce critère revêt actuellement moins d'intérêt car d'autres considérations jouent un rôle. Il y aura cinq nœuds fixes pour lesquels l'équation (3) devient :

$$Dx = Dy = Dz = 0 \quad \text{(nœuds 6, 7, 8, 9, 10)}$$

une autre hypothèse sera formulée plus loin ; elle sera moins simple.

La coupole choisie est définie par les éléments ci-après :

Nœuds	x	y	z
1	— 0,62	0	+ 1,3
2	— 0,19	+ 0,59	+ 1,3
3	+ 0,50	+ 0,365	+ 1,3
4	+ 0,50	— 0,365	+ 1,3
5	— 0,19	— 0,59	+ 1,3
6	— 2,00	0	0
7	— 0,62	+ 1,90	0
8	+ 1,62	+ 1,18	0
9	+ 1,62	— 1,18	0
10	— 0,62	— 1,90	0

Unité de mesure arbitraire : par exemple un décamètre.

B. Mayor, après avoir énoncé son théorème fondamental relatif à la représentation plane de la structure et le retour au système spatial, distingue deux groupes d'équations d'équilibre. Ici il y aurait quinze équations d'équilibre pour les nœuds libres et quinze pour les autres. Les premières fourniront pour la suite du calcul des termes absolus qui ne seront pas nécessairement tous différents de zéro.

Faisons ensuite l'hypothèse que les modules des barres, pour adopter la terminologie de Mayor, sont connus ; les poids sont inversement proportionnels à ces modules. Les valeurs de ces poids furent choisies pour rendre nuls ou négligeables certains éléments non diagonaux voisins de la diagonale dans la matrice de rigidité ou son inverse. Cela facilite certains calculs.

Tableau des poids (valeurs relatives)

	Nœuds	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dimension	1		0,7				1,15	1	0,8	0,8	1
donnée par	2			0,7			1	1,15	1	0,8	0,8
ES/1	3				0,7		0,8	1	1,15	1	0,8
inverse du	4					0,7	0,8	0,8	1	1,15	1
module	5	0,7					1	0,8	0,8	1	1,15

1,15 par exemple est le poids des barres 1-6, 2-7, 3-8, 4-9, 5-10.

Les valeurs données ci-dessus permettent de former les équations aux déformations et les matrices de rigidité, éventuellement avant de connaître les termes absolus qui dépendent des charges.

Grâce à l'hypothèse faite sur la petitesse des variations de coordonnées on peut, pratiquement, attribuer les mêmes coefficients pour les Dx, Dy, Dz (sans coupures) et les dx, dy, dz ; un calcul semi-graphique suffit souvent. Quand on opère des coupures le choix des barres est arbitraire mais non indifférent ; on est ramené à un système statiquement déterminé (principal, fondamental, etc.). En électrotélémétrie on obtient des valeurs, arbitraires, dites provisoires ; en les confrontant avec les valeurs mesurées le calcul des termes absolus est aisé.

Le professeur Mayor, s'adressant à l'Académie, trouvait avec raison qu'il était inopportun de pousser plus à fond le mode d'élimination des inconnues. Son texte, aujourd'hui encore, force l'admiration. Constatant qu'il n'avait pas trop d'équations, ce qui rend parfois assez complexe la solution de ce problème il s'exprimait comme suit : « Les équations permettent donc, si leur déterminant ne s'annule pas, de déterminer les tensions dans toutes les barres, les réactions de toutes les liaisons et les déplacements de tous les nœuds. »

Cette solution, si elle avait été mieux connue, aurait évité bien des recherches même de la part de staticiens chevronnés. Ceux-ci il est vrai, jusqu'à ces dernières années, n'étaient pas au bénéfice des méthodes de calcul nouvelles. D'autre part la solution avec coupures présentera toujours de l'intérêt à la condition de choisir comme inconnues les variations de coordonnées des nœuds.

Pour cinq des barres, par exemple, on a les coefficients :

Barres	a	b	c	poids
1- 6	+ 0,73	0	+ 0,684	1,15
1- 7	0	— 0,824	+ 0,564	1
1- 8	— 0,79	— 0,412	+ 0,457	0,8
1- 9	— 0,79	+ 0,412	+ 0,457	0,8
1-10	0	+ 0,824	+ 0,564	1

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Chaque nœud libre, 1, 2, 3, 4, 5, est relié aux nœuds fixes 6, 7, 8, 9, 10, ce qui confère à cet exemple un caractère didactique.

Grâce à la collaboration du centre de calcul électronique de l'EPUL la matrice de rigidité et son inverse furent formées [4] [1]. Ces matrices sont contenues dans la publication nº 95, EPUL. Pour le nœud 1 par exemple, les longueurs des axes principaux de l'ellipsoïde sont proportionnelles à 0,71 : 0,66 : 0,81 ce qui est assez favorable.

Conditions liant les inconnues

Il est probable que B. Mayor a effectué des recherches dans ce domaine sans rien publier. Par l'équation (3) on exprime qu'un nœud doit se déplacer sur une surface ; on peut concevoir d'autres conditions : par exemple la distance de ce nœud à un autre qui est fixe doit être rigoureusement constante.

Pour faciliter les écritures désignons par x, y, z les variations de coordonnées, les poids étant tous égaux à 1. Les termes absolus sont le f_i.

Une solution simple, séduisante, consiste à éliminer autant d'inconnues qu'il y a de conditions ; or ici on veut posséder les coefficients de poids de toutes les inconnues. Une solution est celle dite par fractionnement (voir *Album de jubilé EPUL*, 1953, p. 308). Dans cette publication le poids d'une fonction des inconnues fut aussi calculé et un cas concret traité (groupe d'ellipses d'erreur).

Mais avant de poursuivre il convient de bien faire la discrimination entre les deux solutions entrant ici en ligne de compte en l'absence de conditions :

1º *Les variations* v *de longueur des barres (allongements ou raccourcissements) ne sont pas fractionnées.*

C'est la solution de B. Mayor ; les termes absolus du système d'équations sont fournis par des conditions d'équilibre (voir publication [2] de G. Dupuis).

2º *Ces variations* v *sont fractionnées ensuite de coupures.*

Les termes absolus sont les f de l'équation (1).

Les matrices de rigidité sont indépendantes de tous ces termes absolus pour les deux solutions. Les v deviennent des v' avec des conditions.

Quant aux poids des barres a posteriori P leur calcul est opportun ; pour la coupole à 30 barres et 5 nœuds libres (15 inconnues) on peut dire d'avance que ces poids seront en moyenne doublés car

$$[p : P]_1^{30} = 15$$

Toujours pour cette même coupole on a :

$$0{,}43 \leqq p/P \leqq 0{,}67$$

C'est un contrôle bienvenu.

Revenons à la solution par *fractionnement* (nach Stufen) qui est très en faveur outre-Rhin surtout ; elle permet mieux d'apprécier le rôle des conditions liant les inconnues. En outre ces conditions et les autres éléments du calcul ne sont pas toujours connus simultanément ; en électrotélémétrie c'est le cas et, en hyperstatique, ce n'est pas exclu. On ne veut pas recommencer tous les calculs. Il y a donc deux genres de fractionnement.

Les v seront fractionnés : $v = v' + v''$

$[vv] = [v'v'] + [v''v''] + 2\,[v'v'']$, cette somme $[v'v'']$ sera nulle ; on fait d'abord abstraction des conditions pour déterminer des valeurs v' et x_o, y_o, z_o : $v'_i = a_i x_o + b_i y_o + c_i z_o + f_i$ ($i = 1, 2, 3...$).

La condition du minimum devient : $[av'] = [bv'] = [cv'] = 0$ où les termes absolus sont : $[af]$, $[bf]$, $[cf]$. En fonction des f on a :

$$x_o = [\alpha f],\; y_o = [\beta f],\; z_o = [\gamma f] \tag{4}$$

les α, β, γ étant connus.

Deuxième étape des calculs : Les v', x_o, y_o, z_o ne sont plus des variables.

A ces trois valeurs il faut ajouter des Δx, Δy, Δz.

$$v''_i = a_i\Delta x + b_i\Delta y + c_i\Delta z \tag{5}$$

$$[v'v''] = [av']\,\Delta x + [bv']\,\Delta y + [cv']\,\Delta z = 0 \tag{6}$$

En formant à partir des équations (5) les $[av'']$, $[bv'']$, $[cv'']$:

$$\left\{\begin{aligned} &[aa]\Delta x + [ab]\Delta y + [ac]\Delta z = [av''] \\ &[ab]\Delta x + [bb]\Delta y + [bc]\Delta z = [bv''] \\ &[ac]\Delta x + [bc]\Delta y + [cc]\Delta z = [cv''] \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Au lieu des f dans les termes absolus ci-dessus on a les v'' donc :

$$\Delta x = [\alpha v''],\; \Delta y = [\beta v''],\; \Delta z = [\gamma v''] \tag{8}$$

Conditions : Sous forme linéaire en a :

$$\left\{\begin{aligned} &A_o + A_1(x_o + \Delta x) + A_2(y_o + \Delta y) + A_3 \\ &(z_o + \Delta z) = A_1\,\Delta x + A_2\Delta y + A_3\Delta z + w_1 \\ &= 0 \\ &B_o + B_1(x_o + \Delta x) + B_2(y_o + \Delta y) + B_3 \\ &(z_o + \Delta z) = B_1\,\Delta x + B_2\Delta_y + B_3\Delta z + w_2 \\ &= 0 \end{aligned}\right. \tag{9}$$

et, en tenant compte des équations (8) :

$$\left\{\begin{aligned} &[I_i v''_i] + w_1 = 0 \\ &[II_i v''_i] + w_2 = 0 \qquad i = 1, 2, 3... \end{aligned}\right. \tag{10}$$

$I_i = A_1\alpha_i + A_2\beta_i + A_3\gamma_i$ et $II_i = B_1\alpha_i + B_2\beta_i + B_3\gamma_i$ avec la condition $[v''v''] = \text{minimum}$.

En désignant par k_1, k_2 ce que les uns appellent les corrélatifs (Korrelaten), d'autres les multiplicateurs de Lagrange :

[1] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie donnée en fin d'article.

$$(11) \quad \begin{cases} [I\,I]\,k_1 + [I\,II]\,k_2 + w_1 = 0 \\ [I\,II]\,k_1 + [II\,II]\,k_2 + w_2 = 0 \end{cases}$$

$$(12) \quad v_i'' = I_i k_1 + II_i k_2 \qquad \text{([7] p. 308)}$$

Déformation quadratique moyenne m_o *relative à l'unité de poids*. Ici aussi on peut fractionner

$$m_o^2 \simeq \frac{[v'v'] + [v''v'']}{n - 3 + 2}$$

et en fractionnant : $\frac{[v'v']}{n-3}$ et $\frac{[v''v'']}{2}$

$$i = 1, 2, 3 \ldots n.$$

Il ne faut pas que ces deux dernières valeurs (3 inconnues, 2 conditions) diffèrent trop l'une de l'autre.

Une autre solution, judicieuse, est due à R. Helmert [5].

R. Helmert fractionne aussi le calcul mais le développe de façon un peu différente. ([5] pp. 269-285.)

Théorie de l'équivalence

Les praticiens de l'électrotélémétrie font depuis longtemps application de cette théorie pour le calcul des ellipsoïdes d'erreur. En hyperstatique il peut en être de même ; cette solution fut récemment traitée (publication EPUL nº 80). Une confrontation fut développée entre deux pylônes, l'un à quatre barres, l'autre à trois barres. La matrice de rigidité était la même dans les deux cas ce qui confère de l'intérêt à cette théorie de l'équivalence. Mais, avec trois barres seulement, on se heurte à une indétermination pour le calcul de l'élément m_o, déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids. En électrotélémétrie on possède une documentation susceptible de fournir l'ordre de grandeur de cet élément. En hyperstatique des systèmes articulés il serait aussi désirable d'enregistrer et cataloguer cette valeur m_o pour divers genres de structures.

Quant à la matrice de rigidité il convient de rappeler qu'elle est indépendante du mode de charge pour un système hyperstatique donné, les poids des barres étant aussi connus (ou les modules de ces barres d'après B. Mayor).

Quel que soit le mode de calcul (avec ou sans coupures, avec ou sans formation de dérivées) il faut toujours se préoccuper de la forme des ellipsoïdes de déformation qui peut être très défavorable. C'est ce que font depuis longtemps les praticiens de l'électrotélémétrie pour les ellipsoïdes d'erreur.

Planimétriquement le problème est plus simple ; prenons comme exemples les systèmes de la figure 5 de la publication nº 104 de l'EPUL (Bulletin technique nº 14, 1968).

Dans son exposé, présenté à un groupe d'ingénieurs des ponts et charpentes, M. Dupuis a choisi judicieusement quatre structures. Les ellipses de déformation des nœuds ont une forme assez favorable qui pourrait être améliorée en modifiant les poids de certaines barres. Les recherches faites par M. Dupuis prouvent que la méthode de Mayor, sans fractionnement des variations de longueurs des barres v, est très actuelle. Mais certains avantages sont aussi à attribuer au mode de calcul avec fractionnement des v (celui résultant de coupures).

Conclusions

Par les lignes qui précèdent l'auteur s'est efforcé de montrer qu'en hyperstatique spatiale des systèmes articulés la solution de la chaire de Lausanne (professeur Mayor), basée sur le calcul des déformations et variations de coordonnées des nœuds, est non seulement encore actuelle mais jouera à l'avenir un rôle prépondérant. Ce problème est susceptible encore de bien des développements.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. MAYOR : *Statique graphique des systèmes spatiaux.* (Lausanne, Payot, 1926.)

[2] G. DUPUIS : *Le calcul électronique au service de l'ingénieur.* (Publication Nº 104, EPUL.)

[3] H. WOLF : *Ausgleichungsrechnung.* (Verlag Dümmler, Bonn.)

[4] A. ANSERMET : *Le rôle en hyperstatique de la matrice de rigidité.* (Bull. technique Nº 3, 1969.)

[5] R. HELMERT : *Ausgleichungsrechnung.* (Teubner, Leipzig.)

[6] Académie des sciences (comptes rendus 1915).

[7] A. ANSERMET : Album jubilé EPUL 1953.

Adresse de l'auteur :
Auguste Ansermet, case postale 106, 1814 La Tour-de-Peilz.

BIBLIOGRAPHIE

L'alimentation en eau des agglomérations, par *P. Koch*, ingénieur général des Ponts et Chaussées (en retraite). 2e édition. Paris, Dunod, 1969. — Un volume 16×25 cm, XII + 368 pages, 94 figures. Prix : relié, 95 F.

Le problème de l'alimentation en eau a pris ces dernières années, dans le monde entier, une acuité sans cesse accrue, car l'essor systématique et généralisé des besoins se révèle d'autant plus difficile à satisfaire que s'épuisent les disponibilités les mieux accessibles et qualitativement les plus favorables auxquelles il a été recouru par priorité.

Dans la nouvelle édition de ce livre, l'auteur expose d'abord les problèmes de la production d'une eau consommable d'origine souterraine ou superficielle, selon le cas, ensuite sa distribution, par répartition judicieuse entre la multiplicité des points de consommation, compte tenu de leur intermittence selon les heures, les jours ou les saisons. La notion et la portée du bilan hydrologique d'un bassin fluvial dans son ensemble ou par ses diverses parties sont également étudiées.

L'évolution des techniques et les conceptions nouvelles sur l'économie de l'eau ont donné lieu à des développements importants.

Ainsi, tous ceux, techniciens sanitaires, ingénieurs des ponts et chaussées, des travaux publics, du génie rural, qui, à des titres divers, sont concernés par les problèmes de l'alimentation en eau, pourront trouver dans cet ouvrage un panorama très actuel sur l'ensemble de ces questions.

Sommaire :

1. Estimation des besoins en eau et recherche des eaux d'alimentation. — 2. Appréciation des ressources en eau locales ou régionales. — 3. Données particulières aux eaux souterraines. — 4. Qualités requises des eaux d'alimentation. Contrôle et surveillance de leur potabilité. — 5. Amélioration et correction des eaux naturelles. Les divers procédés de traitement. — 6. Amenée et distribution des eaux d'alimentation.