

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 95 (1969)
Heft: 17

Artikel: Aperçu sur la contribution des méthodes analogiques à l'étude des écoulements de filtration
Autor: Renard, G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-70246>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (SVIA)
de la Section genevoise de la SIA
de l'Association des anciens élèves de l'EPFL (Ecole polytechnique
fédérale de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'EPFZ (Ecole poly-
technique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE

Président: E. Martin, arch. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève

Membres:

Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; M. Mozer, arch.; J.-C. Ott, ing.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; M. Chevalier, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.;
M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »

Président: D. Bonnard, ing.

Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; M. Cosan-
dey, ing.; A. Métraux, ing.; A. Rivoire, arch.; J.-P. Stucky,
ing.

Adresse: Avenue de la Gare 10, 1000 Lausanne

RÉDACTION

F. Vermeille, rédacteur en chef; E. Schnitzler, ingénieur, et
M. Bevilacqua, architecte, rédacteurs
Rédaction et Editions de la S.A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, 1000 Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 46.—	Etranger	Fr. 50.—
Sociétaires	»	» 38.—	»	» 46.—
Prix du numéro	»	» 2.30	»	» 2.50

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande »
N° 10-5775, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au
numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie
La Concorde, Terreaux 29, 1000 Lausanne

ANNONCES

Tarif des annonces:

1/1 page	Fr. 495.—
1/2 »	» 260.—
1/4 »	» 132.—
1/8 »	» 68.—

Adresse: Annonces Suisses S.A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26, 1000 Lausanne et succursales



SOMMAIRE

Aperçu sur la contribution des méthodes analogiques à l'étude des écoulements de filtration, par G. Renard, Dr ing.
Bibliographie. — Divers. — Les congrès.
Documentation générale. — Documentation du bâtiment. — Informations diverses.

APERÇU SUR LA CONTRIBUTION DES MÉTHODES ANALOGIQUES À L'ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS DE FILTRATION ¹

par G. RENARD, Dr ing.

A l'heure où l'ordinateur et sa puissance de traite-
ment semblent avoir relégué au magasin des antiquités
tout autre moyen de calcul, il peut paraître anachro-
nique de discuter encore sur les mérites des méthodes
analogiques.

Je reste cependant convaincu qu'elles font partie de
ces outils dont on apprécie toujours l'existence, bien
qu'on proclame hautement qu'ils sont largement péri-
més.

Aussi vais-je m'employer à vous faire découvrir ou
redécouvrir cet outil, avec l'espoir de vous le faire
apprécier à sa juste valeur.

1. Qu'est-ce que l'analogique ?

Pour bien clarifier les idées, j'aimerais m'arrêter quel-
ques instants sur les caractéristiques qui font du *calcul
analogique* un moyen particulièrement bien adapté aux

¹ Exposé présenté à la réunion d'automne 1968 de la *Société suisse
de mécanique des sols et de travaux de fondation* (Bienne, 8 novem-
bre 1968).

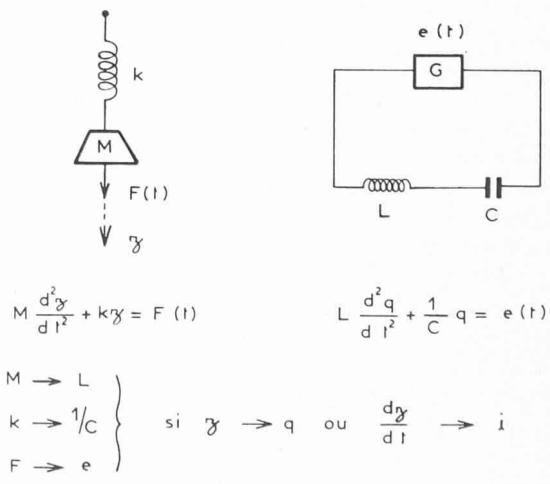


Fig. 1. — Exemple de modèle analogique.

besoins de l'ingénieur, à ses méthodes de travail, à ses démarches intellectuelles.

Par opposition au *calcul numérique* qui, lui, est vraiment un calcul, puisqu'il consiste à effectuer le plus rapidement possible une suite d'opérations arithmétiques, le calcul analogique a pour objet de remplacer le calcul proprement dit par l'observation et l'étude d'un phénomène physique obéissant aux équations que l'on désire résoudre.

Pour illustrer ceci, considérons (fig. 1) l'exemple du mouvement d'une masse M attachée à un ressort de raideur K , sous l'impulsion d'une force instationnaire $F(t)$. Ce mouvement est défini par les variations de la cote z suivant l'équation :

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + K z = F(t).$$

Pour réaliser un calcul numérique de cette équation, il est tout d'abord nécessaire de la transformer en une suite d'opérations arithmétiques, en discrétisant et le temps t et la cote z , et en écrivant pour chaque ensemble (z, t) la relation arithmétique correspondante. Le calcul lui-même consistera à résoudre l'ensemble de ces relations arithmétiques. C'est la vitesse de calcul et la capacité de mémoire des ordinateurs qui permettront qu'un tel calcul soit rentable.

Par contre, un modèle analogique aura pour objet de représenter d'un seul coup l'ensemble de l'équation, en faisant évoluer des grandeurs analogues aux grandeurs étudiées. C'est le cas du montage électrique constitué par un générateur G délivrant une tension variable $e(t)$ analogue à la force $F(t)$, dans un circuit série comprenant une self L analogue à la masse M , et une capacité C analogue à l'inverse de la raideur K . Dans ce cas, la cote z est représentée par la charge électrique q , ou la vitesse $\frac{dz}{dt}$ par l'intensité i .

Le parti que l'on peut tirer d'une telle analogie est évident : non seulement les mesures électriques seront beaucoup plus aisées et plus précises que les mesures mécaniques, mais encore la possibilité d'étudier un échantillonnage considérable de cas différents par simples variations des caractéristiques e , L , C donne une souplesse remarquable au procédé.

Cette notion de modèle analogique est capitale, et il n'est pas inutile de la mieux préciser en l'opposant une fois de plus à celle de modèle numérique. Ce dernier est un modèle logique qui nécessite la discrétisation des grandeurs physiques, manipule des opérateurs abstraits au moyen d'un programme traduisant une méthode d'analyse numérique, et impose un déroulement séquentiel des calculs. Le modèle analogique met par contre en œuvre des opérateurs concrets qui agissent par les propriétés physiques de leurs composants, il conserve autant que faire se peut la continuité des grandeurs et des supports, et il assure un déroulement parallèle du calcul par la simultanéité des opérations élémentaires.

En réalité, ce qui fait la réussite du calcul numérique, c'est qu'il peut, grâce à son unicité technologique, théoriquement tout faire avec précision. Mais les qualités de l'analogique en font un moyen d'approche privilégié pour les ingénieurs dans l'étude des problèmes concrets auxquels ils sont confrontés : la continuité de représentation, la vitesse, l'aspect concret du support physi-

que, la souplesse du dialogue, la possibilité de simuler, tout cela peut bien leur permettre de se satisfaire d'une précision moyenne, du moins dans une première étape, surtout si l'on observe que les données physiques sont bien souvent fournies avec une précision peu reluisante (cas des perméabilités de terrains, par exemple).

2. Les méthodes décrites et les bases théoriques de l'analogie

Dans cet exposé, nous nous limiterons essentiellement aux méthodes basées sur l'*analogie rhéoelectrique* et sur l'*analogie par réseaux de résistances*, cette dernière découlant très simplement de la première.

Les méthodes rhéoelectriques utilisent l'analogie de conduction électrique en milieu continu et en régime permanent. Quand cette analogie est possible, la grandeur étudiée est représentée par le potentiel électrique apparaissant en tout point d'un conducteur électrique à deux ou trois dimensions de même forme que le domaine dans lequel évolue la grandeur étudiée et qui constitue le modèle analogique. L'analogie est possible lorsqu'il y a identité de forme entre les équations qui régissent d'une part la grandeur étudiée, d'autre part le potentiel électrique.

L'analogie, on le voit, s'appuie essentiellement sur une identité de formulation avec tout ce qui en découle du point de vue géométrique. Ainsi aux surfaces ou aux lignes de niveau du phénomène étudié correspondent les surfaces et les lignes équipotentielles du phénomène analogique. Aux lignes de force du champ étudié correspondent les lignes de courant du champ électrique.

Pour les phénomènes bidimensionnels, l'analogie est même encore plus poussée : il existe alors, pour le phénomène de conduction, une fonction de courant électrique, fonction associée du potentiel électrique, régie par le même type d'équation, et dont les lignes d'égalité de valeurs constituent le faisceau des lignes de courant, orthogonal au faisceau des équipotentielles. Si la grandeur étudiée peut être représentée par le potentiel électrique, c'est donc qu'elle possède elle-même une fonction associée qui s'identifie à la fonction de courant électrique. Mais, dès lors, cette fonction associée peut tout aussi bien devenir elle-même *grandeur étudiée* et être représentée par le potentiel électrique, l'analogie ainsi définie étant dite *inverse*, par opposition à la précédente qui est appelée *directe*. Cette analogie inverse est souvent intéressante dans la mesure où le relevé du champ équipotentiel fournit le champ des lignes de force du phénomène étudié.

Plusieurs techniques existent, suivant la nature du conducteur choisi pour la représentation analogique. Les deux conducteurs les plus couramment utilisés sont d'une part le papier conducteur *Teledeltos*, qui permet la représentation de grandeurs régies par l'équation de Laplace à deux dimensions, d'autre part l'eau de ville contenue dans des *bassins*, ou *cuves* dites *rhéoelectriques*, pour l'étude de problèmes laplaciens à deux ou trois dimensions. Diverses extensions sont possibles : elles sont décrites, ainsi que la technologie de ces méthodes, dans la référence bibliographique [1]¹.

¹ Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

<p>Loi de DARCY</p> $\vec{V} = -\frac{k}{\mu} \text{grad} (p + \omega z)$ <p>EQUATION DE CONTINUITÉ</p> $\text{div } \vec{V} = 0$ <p>ou $\Delta \varphi = 0$</p> <p>avec $\varphi = \frac{p}{\omega} + z$</p> <p>GRANDEURS ANALOGUES</p> <table border="0"> <tr> <td>φ</td> <td>U</td> </tr> <tr> <td>$K = \frac{k\omega}{\mu}$</td> <td>$1/\rho$</td> </tr> <tr> <td>\vec{V}</td> <td>\vec{i}</td> </tr> <tr> <td>Q</td> <td>$\frac{\rho I}{U_1 - U_2}$</td> </tr> </table>	φ	U	$K = \frac{k\omega}{\mu}$	$1/\rho$	\vec{V}	\vec{i}	Q	$\frac{\rho I}{U_1 - U_2}$	<p>Loi d'OHM</p> $\vec{i} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } U$ <p>EQUATION DE CONTINUITÉ</p> $\text{div } \vec{i} = 0$ <p>ou $\Delta U = 0$</p> <p>GRANDEURS ANALOGUES</p> <table border="0"> <tr> <td>φ</td> <td>U</td> </tr> <tr> <td>$K = \frac{k\omega}{\mu}$</td> <td>$1/\rho$</td> </tr> <tr> <td>\vec{V}</td> <td>\vec{i}</td> </tr> <tr> <td>Q</td> <td>$\frac{\rho I}{U_1 - U_2}$</td> </tr> </table>	φ	U	$K = \frac{k\omega}{\mu}$	$1/\rho$	\vec{V}	\vec{i}	Q	$\frac{\rho I}{U_1 - U_2}$
φ	U																
$K = \frac{k\omega}{\mu}$	$1/\rho$																
\vec{V}	\vec{i}																
Q	$\frac{\rho I}{U_1 - U_2}$																
φ	U																
$K = \frac{k\omega}{\mu}$	$1/\rho$																
\vec{V}	\vec{i}																
Q	$\frac{\rho I}{U_1 - U_2}$																

Fig. 2. — Bases de l'analogie entre infiltrations et conduction électrique.

L'analogie par réseaux d'impédances, quant à elle, fait aussi appel à la conduction électrique en milieu conducteur. Mais cette fois le conducteur est discrétisé sous la forme d'un réseau de nœuds reliés entre eux par des impédances et pouvant recevoir des injections d'intensités. Les caractéristiques du maillage, ainsi que la nature et la valeur des impédances définissent des types très divers de conducteurs et autorisent par là-même une gamme de représentations analogiques beaucoup plus importante : les équations simulées sont d'un type plus général. Ainsi un réseau purement résistif pourra représenter des équations de type elliptique ; un réseau à résistances et capacités, des équations de type parabolique ; un réseau à selfs et capacités, des équations de type hyperbolique. Tout ceci à deux ou trois dimensions et, le cas échéant, en fonction du temps.

Ici nous nous intéresserons seulement aux réseaux de résistances, les problèmes étudiés étant de type elliptique et ne faisant intervenir le temps que sous forme discrétisée.

Regardons maintenant sur quelles bases théoriques repose l'analogie entre les écoulements de filtration et la conduction électrique. Ces bases sont mises en lumière dans le tableau de la figure 2, pour les cas d'écoulements en milieu isotrope et homogène, la représentation se faisant soit par la méthode du papier conducteur (domaines plans) soit par celle de la cuve rhéologique (domaines plans ou tridimensionnels).

Les deux lois analogues sont d'une part la loi de Darcy, qui définit le vecteur vitesse \vec{V} de l'écoulement de filtration en fonction de la cote z , de la perméabilité k du milieu poreux, de la viscosité μ du liquide, de son poids spécifique ω et de sa pression p ; d'autre part la loi d'Ohm, qui indique les variations du vecteur courant électrique \vec{i} du modèle analogique en fonction du potentiel électrique U et de la résistivité ρ du conducteur.

En y associant l'équation de continuité pour chacun des phénomènes, on obtient les équations de base qui sont des équations de Laplace pour U et $\varphi = p/\omega + z$.

Il est aisé d'en déduire le tableau des grandeurs analogues :

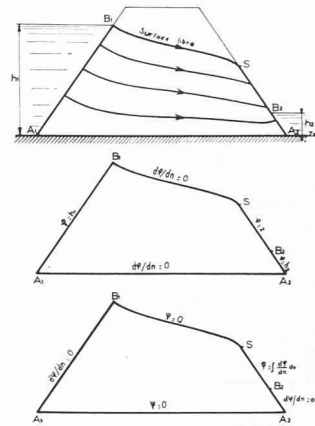


Fig. 3. — Papier conducteur. Définition des conditions aux limites.

- au potentiel électrique U correspond la fonction piézométrique φ ;
- à la conductivité électrique $1/\rho$ correspond le coefficient lié à la perméabilité : $K = k\omega/\mu$;
- au vecteur courant électrique \vec{i} correspond la vitesse d'infiltration \vec{V} ;
- au coefficient d'intensité électrique entre les potentiels extrêmes U_1 et U_2 correspond le coefficient de débit pour la charge hydraulique $H_1 - H_2$.

3. La méthode du papier conducteur

L'utilisation du papier conducteur pour la résolution de problèmes d'infiltrations est largement décrite dans la thèse qu'a soutenue P. Huard de la Marre en 1956 [2].

Le papier conducteur le plus couramment utilisé est une feuille graphitée, appelée *Télédelto*, de résistivité comprise entre 1500 et 2500 $\Omega \cdot \text{cm}$. S'il ne permet que la représentation des milieux plans homogènes avec une précision moyenne de quelques pour-cents due à son anisotropie, sa facilité d'emploi en fait cependant un moyen très efficace pour la détermination rapide et peu onéreuse des écoulements à surface libre.

L'alimentation du modèle est liée au problème des conditions aux limites. Celles-ci sont définies comme l'indique, par exemple, la figure 3 pour un massif poreux :

1° Les parements amont A_1B_1 et aval A_2B_2 sont aux potentiels hydrostatiques $\varphi_1 = h_1$ et $\varphi_2 = h_2$. Les frontières correspondantes du modèle analogique seront équipotentielles.

2° Le fond imperméable A_1A_2 n'est traversé par aucun flux : $\frac{d\varphi}{dn} = 0$. La frontière correspondante sera isolante.

3° La surface de suintement SB_2 , en contact avec la pression atmosphérique prise comme origine des pressions, est à un potentiel égal à la cote : $\varphi = z$. Chaque point de la frontière correspondante sera porté à un potentiel proportionnel à sa cote.

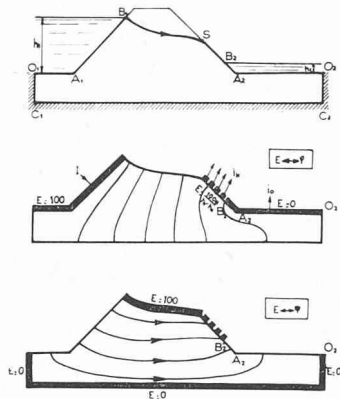


Fig. 4. — Papier conducteur. Imposition des conditions aux limites.

4° La surface libre B_1S , en contact avec la pression atmosphérique, est aussi ligne de courant. Elle supporte donc deux conditions : $\varphi = z$ et $d\varphi/dn = 0$. Cette double condition est nécessaire pour déterminer complètement la surface libre dont la forme est inconnue a priori. La frontière correspondante sera isolante, chacun de ses points ayant un potentiel proportionnel à sa cote.

Une telle analogie pourra fournir le champ des équipotentielles, mais ce n'est pas ce champ qui est généralement le plus intéressant, mais plutôt celui, orthogonal, des lignes de courant, qui peut être obtenu par l'analogie inverse. La figure 3 montre également les conditions aux limites relatives à la fonction de courant ψ , fonction associée du potentiel φ . Les frontières équipotentielles deviennent frontières isolantes et vice versa. Chaque point de la surface de suintement est porté à un potentiel déduit de l'analogie directe. Quant à la surface libre, sa forme est connue également grâce à l'analogie directe, par un procédé décrit plus loin.

La concrétisation de ces diverses conditions aux limites apparaît sur la figure 4, où sont schématisés les modèles des deux analogies. Les équipotentielles sont réalisées à l'aide de peinture conductrice appliquée directement sur le papier conducteur. Les frontières où le potentiel varie continûment sont parsemées de petits créneaux formant électrodes par application de peinture conductrice. Les frontières isolantes sont simplement laissées telles que après découpe.

L'alimentation électrique peut se faire sous deux formes : par courant continu à partir du secteur redressé ou d'une pile, par courant alternatif à partir du secteur. Dans l'un et l'autre cas, les potentiels sont mesurés par opposition entre une sonde et le point milieu d'un pont de mesure, l'appareil de zéro étant un galvanomètre

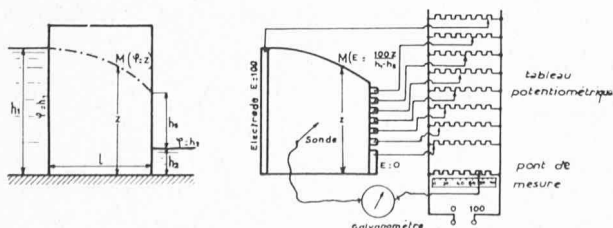


Fig. 5. — Papier conducteur. Schéma de l'alimentation électrique.

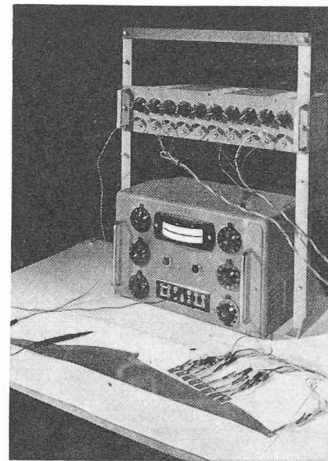


Fig. 6. — Papier conducteur. Vue d'un montage expérimental.

dans le premier cas, un oscillographe cathodique monté en figure de Lissajous dans le second cas. Un schéma d'alimentation électrique par courant continu est donné dans la figure 5 pour le cas d'un barrage rectangulaire, et la figure 6 donne une vue d'un tel montage : la sonde est une simple tige conductrice qui recueille le potentiel à mesurer en un point donné du papier par légère pression sur ce point.

La détermination de la surface libre se fait par approximations successives en analogie directe : cette frontière à flux nul doit être isolante. Si l'on considère, par exemple, le cas du barrage de la figure 7, on voit que le modèle initial comporte la totalité du barrage, la crête de celui-ci figurant la première approximation de la surface libre. La surface de suintement comporte des électrodes sur lesquelles sont imposés des potentiels proportionnels à la cote moyenne de chacune d'elles. On recherche à l'intérieur du domaine les points dont le potentiel est proportionnel à la cote et l'on coupe le modèle suivant la ligne joignant ces points : on a ainsi une deuxième approximation de la surface libre. Cinq ou six itérations suffisent pour obtenir la ligne laquelle coïncident les deux conditions de flux nul et de potentiel proportionnel à la cote. La surface de suintement se trouve en général assez réduite par ces découpes successives. Ce qu'il en reste est toujours alimenté aux potentiels de cote. Il arrive assez souvent qu'il ne reste rien de cette surface de suintement : c'est ce qui se produit notamment lorsqu'un drain horizontal placé à l'aval pénètre suffisamment à l'intérieur du barrage (fig. 8).

Le relevé du champ équipotentiel complète l'expé-

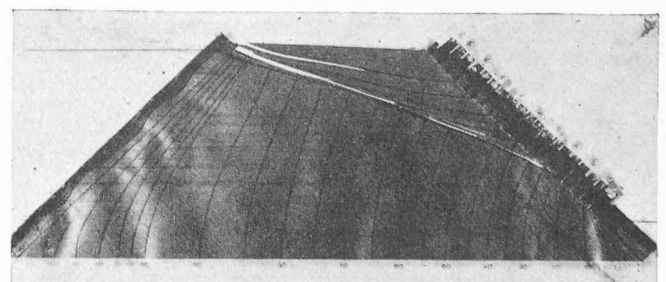


Fig. 7. — Papier conducteur. Détermination de la surface libre d'un massif poreux sans drain.

rience, mais l'on préfère bien souvent rechercher le champ des lignes de courant en expérimentant le modèle de l'analogie inverse, dans lequel la surface libre, maintenant connue, devient une équipotentielle et où les divers points de la surface de suintement sont portés à des potentiels déduits aisément des intensités débitées par les électrodes correspondantes du modèle direct.

Il est bien évident que la méthode du papier conducteur ne peut fournir de résultats extrêmement précis. Mais quelques pour-cents d'erreurs sont-ils intolérables quand il s'agit de déterminer des écoulements dans des terrains dont la perméabilité et la porosité sont plus souvent estimées que véritablement connues ? L'essentiel est de posséder un premier résultat représentatif, même entaché d'erreur, pourvu qu'il s'obtienne rapidement et à peu de frais. C'est bien là qu'est le rôle de la méthode décrite, pour laquelle un petit appareillage fonctionnant sur pile peut être utilisé partout et notamment sur le chantier même où se pose le problème à résoudre.

Voici, à titre d'exemple, une application qui entre tout à fait dans le domaine d'emploi du papier conducteur. Il s'agit de l'étude des sous-pressions s'exerçant sur le radier d'un barrage mobile en rivière. Comme l'indique la figure 9, le radier est encadré de deux parafouilles dont le rôle est d'éloigner du radier l'écoulement de filtration en lui faisant perdre ainsi la plus grande partie de sa charge. Les deux champs orthogonaux ont été obtenus au moyen de modèles en papier, en supposant bien sûr en première approximation que le problème est bidimensionnel et que la perméabilité du sol est isotrope. Le débit Q/kh est obtenu en mesurant l'intensité qui traverse le modèle entre les équipotentielles 0 et 100.

Un second essai est réalisé (fig. 10) pour étudier l'influence d'un puits filtrant sur la répartition des sous-pressions et des débits de fuite. Divers essais peuvent ainsi être menés très rapidement au moyen de modèles successifs en papier conducteur. Le montage électrique est toujours très simple (fig. 11).

4. La méthode de la cuve rhéométrique

Le principe de cette méthode est identique à celui de la méthode du papier conducteur [1]. La seule différence, mais essentielle, tient au fait que la troisième dimension d'espace peut être représentée, toujours pour des problèmes laplaciens ou s'y ramenant. La cuve est également utilisée pour des problèmes plans lorsque la précision recherchée l'exige, ou encore lorsque certaines conditions géométriques ne peuvent être reproduites valablement au papier conducteur.

Ici c'est l'eau de ville qui fait office de conducteur. La résistivité moyenne pour une ville comme Paris est comprise entre 2000 et 3000 $\Omega \cdot \text{cm}$ suivant le lieu, la température et l'hygrométrie. Ce conducteur est contenu dans des bassins ou cuves dont les modèles classiques sont réalisés en plaques d'ardoise et montés sur vis calantes pour le nivelage.

Pour les problèmes plans la cuve est à fond plan horizontal, de surface en plan rectangulaire de $2 \times 1,5$ m maximum, et d'une dizaine de centimètres de profondeur. Le nivelage doit être soigné, pour que le modèle ait partout la même épaisseur.

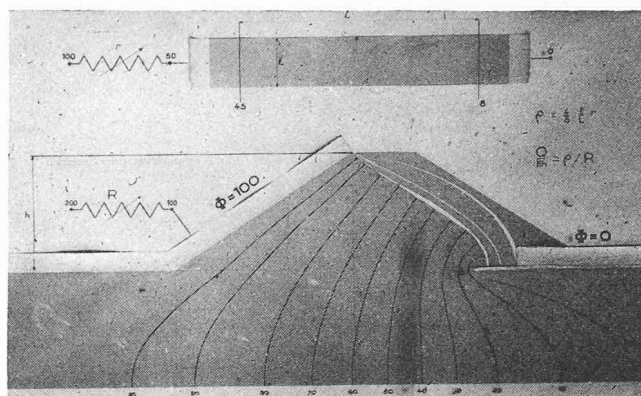


Fig. 8. — Papier conducteur. Détermination de la surface libre d'un massif poreux avec drain.

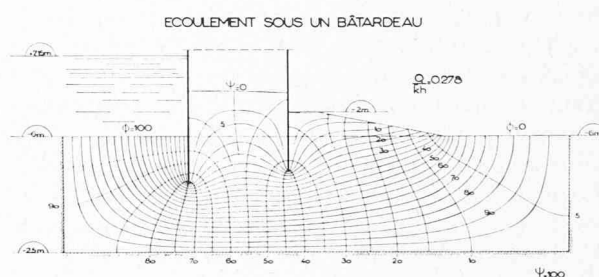


Fig. 9. — Barrage mobile. Champ sans puits filtrant.

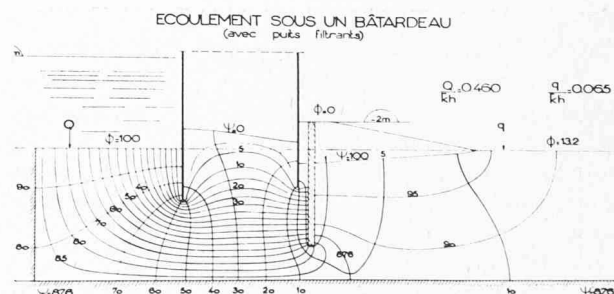


Fig. 10. — Barrage mobile. Champ avec puits filtrant.

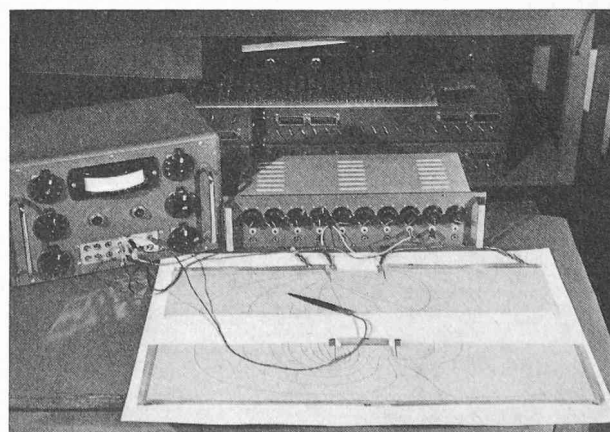


Fig. 11. — Barrage mobile. Vue du montage expérimental.

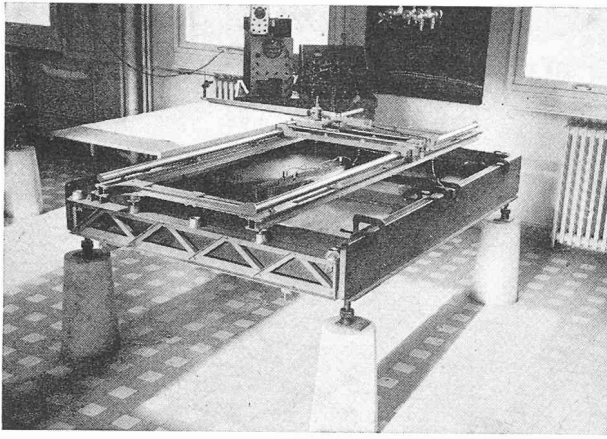


Fig. 12. — Cuve rhéoelectrique. Principe.

Les problèmes laplaciens de révolution, qui sont en réalité des problèmes bidimensionnels, sont représentés à l'aide de cuves à fond plan incliné, le conducteur figurant alors le domaine compris entre deux demi-plans méridiens. Pour les problèmes tridimensionnels, on utilise la cuve profonde, toujours en dalles d'ardoise, dont les dimensions maximum sont $2\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m}$.

Lorsque les contours des domaines à représenter ne sont pas simples et ne comportent en particulier aucune ligne droite ou aucun plan, le bassin correspondant est réalisé spécialement pour le problème à résoudre, généralement au moyen de matières plastiques.

La mesure électrique est, comme pour le papier conducteur, une mesure de zéro entre une sonde et le point milieu d'un pont de mesure. Mais l'emploi du courant alternatif est ici impératif pour éviter les phénomènes d'électrolyse et de polarisation. Ainsi la source de courant est-elle fournie par un générateur BF muni d'un amplificateur de tension, et l'appareil de zéro est un oscillographe cathodique monté en figure de Lissajous, ou encore un voltmètre digital (muni de convertisseurs de tensions) faisant office de pont de mesure automatique.

La sonde est en général un fil mince de platine dont le mouvement est assuré et repéré grâce à un ensemble de deux chariots, dont l'un se déplace longitudinalement sur un cadre rigide posé sur la cuve, et dont l'autre se meut transversalement sur le premier et porte un bras de report permettant de repérer la position de la sonde sur une planche à dessin (fig. 12).

Décrivons quelques applications de la méthode de la cuve rhéoelectrique. La première concerne un problème plan dont l'un des champs peut être obtenu au papier conducteur, mais dont l'obtention de l'autre nécessite l'emploi d'une cuve. Il s'agit de l'étude du drainage de terrains homogènes et isotropes, étude réalisée par E. d'Oliveira e Sousa [3].

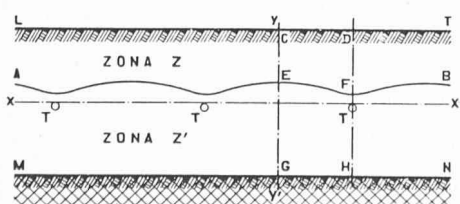


Fig. 13. — Drainage d'un terrain. Schéma du domaine.

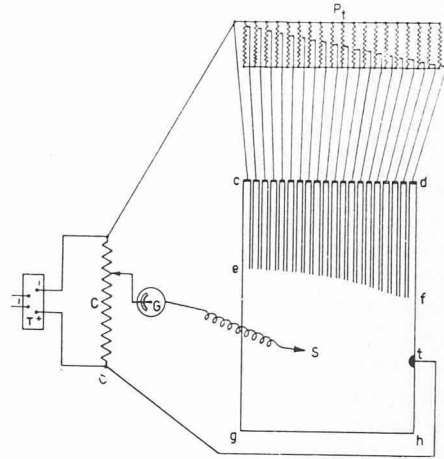


Fig. 14. — Drainage d'un terrain. Représentation au papier conducteur.

On considère (fig. 13) une couche perméable horizontale et d'épaisseur constante comprise entre la surface du sol LYT et une couche imperméable MGN . Les chutes de pluie provoquent des variations de la nappe phréatique et l'on désire contrôler la forme et la position de la limite AEB de cette nappe au moyen d'un réseau de drains parallèles et équidistants T .

Les symétries nous permettent de limiter le domaine d'étude au rectangle $CDHG$, constitué de deux régions séparées par la ligne inconnue EF , limite de la nappe phréatique. On suppose que par suite d'une distribution uniforme des pluies sur le sol les lignes de courant sont pratiquement verticales et uniformément réparties dans la région supérieure $CDFE$. Il s'agit de déterminer la position de la ligne EF et le champ des lignes de courant.

Le papier conducteur est évidemment bien indiqué pour la recherche de la ligne EF par approximations successives, connaissant deux conditions sur cette ligne : c'est tout d'abord une ligne piézométrique où le potentiel φ de chaque point est proportionnel à sa cote z ($\varphi = kz$); c'est d'autre part une ligne à débit constant, du fait de l'uniformité du champ dans la région limitrophe supérieure.

Le modèle est réalisé comme le montre la figure 14. La région supérieure est découpée en fines bandes verticales de mêmes largeurs représentant les tubes de courant. Les extrémités de ces bandes le long de la frontière CD portent de petites électrodes portées aux potentiels $\bar{\varphi}$ par potentiomètres. Une électrode semi-circulaire portée au potentiel 0 figure le demi-drain T . Les autres frontières sont lignes de courant et restent donc isolantes.

Par suite de l'identité des courants que doivent débiter les bandes, il y a une relation linéaire entre les potentiels $\bar{\varphi}$ et φ :

$$\bar{\varphi} = \varphi + \lambda (Z - z)$$

où Z est la cote de la frontière CD .

Les approximations successives pour la recherche de la ligne EF sont conduites de la manière suivante : on suppose EF ligne droite horizontale, on impose le même potentiel $\bar{\varphi} = 100$ aux extrémités des bandes, on mesure les φ d'où l'on déduit les nouveaux z et les nouveaux $\bar{\varphi}$; on coupe les bandes aux longueurs $Z - z$ et on impose

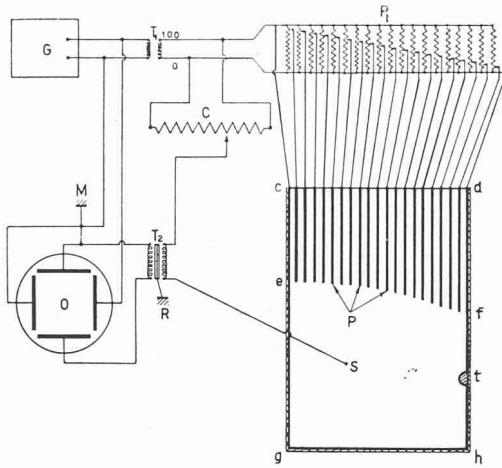


Fig. 15. — Drainage d'un terrain. Représentation à la cuve rhéoelectrique.

les $\bar{\phi}$; et ainsi de suite jusqu'à ce que les z et les $\bar{\phi}$ ne varient plus. L'essai est complété par le tracé des équipotentielles.

Dans l'analogie inverse, les bandes doivent être séparées par des intervalles conducteurs aussi minces que possible : c'est la raison pour laquelle il est préférable d'utiliser la méthode de la cuve. La figure 15 montre l'alimentation de la cuve et la représentation des conditions aux limites : le drain T devient un demi-cercle isolant, les intervalles conducteurs des bandes sont portés à des potentiels variant uniformément depuis le 0 de la frontière DT jusqu'au 100 de la frontière $CGHT$. La figure 16 représente l'ensemble du montage, y compris la sonde et son chariotage qui permettent le relevé des lignes de courant.

La seconde application décrite a trait à l'écoulement tridimensionnel dans une tranchée indéfinie de section rectangulaire, dans laquelle a été creusé un trou cylindrique muni d'une crépine. La géométrie (fig. 17) est symétrique par rapport à la section $B'BCC'$ passant par l'axe AED de la crépine, et également par rapport au demi-plan indéfini $XADX$. Le trou est imperméable, la crépine et les parois de la tranchée sont perméables. Il s'agit d'étudier la répartition des potentiels autour de la crépine ainsi que son débit pour un sol $XBB'X$ perméable ou non, en supposant la tranchée homogène mais anisotrope : les perméabilités horizontales et verticales sont différentes et dans le rapport k .

L'équation qui régit l'écoulement dans un milieu homogène anisotrope a pour expression :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

Par affinité de rapport \sqrt{k} , elle se transforme en équation de Laplace. Les méthodes rhéoelectriques sont donc utilisables pour de tels écoulements, à condition bien entendu que le rapport d'anisotropie ne soit pas trop élevé.

La tranchée peut ainsi être représentée à l'aide d'une cuve classique, et ceci de la manière suivante : le fond perméable semi-infini est figuré par l'une des parois longitudinales de la cuve, rendue conductrice à l'aide de clinquant d'étain (cette paroi est suffisamment longue pour qu'on puisse la considérer comme semi-infinie par

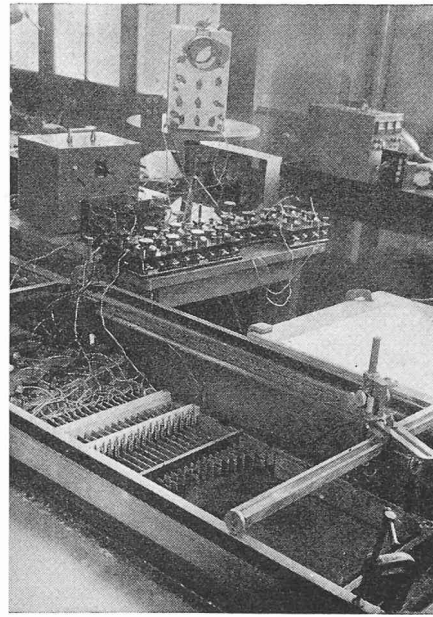


Fig. 16. — Drainage d'un terrain. Vue du montage expérimental en cuve.

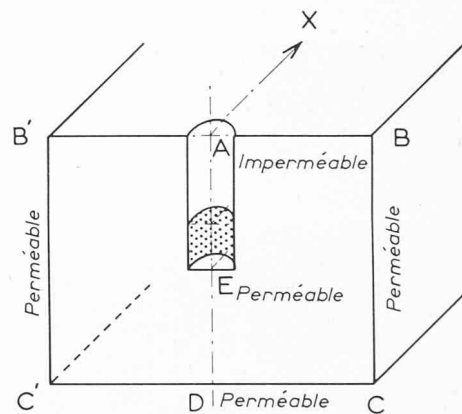


Fig. 17. — Tranchée avec crépine. Schéma du domaine.

rapport aux dimensions de la section et de la crépine) ; le côté perméable $XBCX$ est figuré par le fond de la cuve recouvert d'étain ; la section de symétrie $ABCD$ est figurée par une autre paroi de la cuve, laissée isolante ; la section de symétrie $XADX$ est figurée par le niveau supérieur de l'eau (frontière isolante) ; le sol $XABX$ est figuré par une paroi mobile en plexiglas, laissée isolante ou rendue conductrice par clinquant d'étain : sa position fixe le rapport d'anisotropie ; enfin l'ensemble trou-crèpine est représenté au moyen d'un quart de cylindre en plexiglas dont une partie est rendue conductrice pour figurer la crépine. La figure 18 montre l'ensemble du montage et notamment la sonde isolée pour recueillir les potentiels au sein même du conducteur.

La troisième application utilise une possibilité intéressante de la méthode pour l'étude des champs indéfinis. Il n'est pas toujours possible en effet d'étudier finement l'évolution d'un phénomène en champ indéfini quand la relative proximité des parois de la cuve oblige

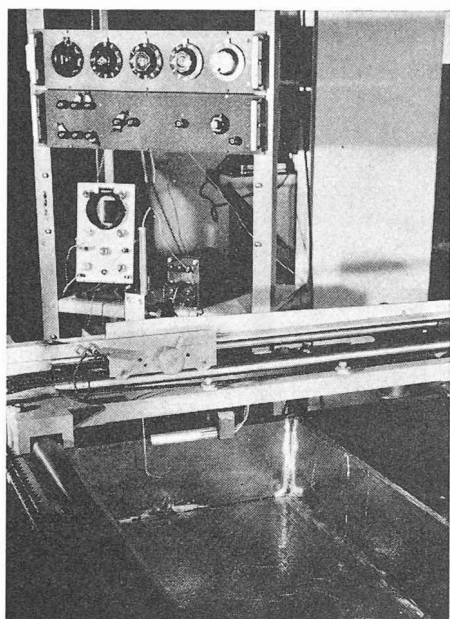


Fig. 18. — Tranchée avec crépine. Vue du montage expérimental.

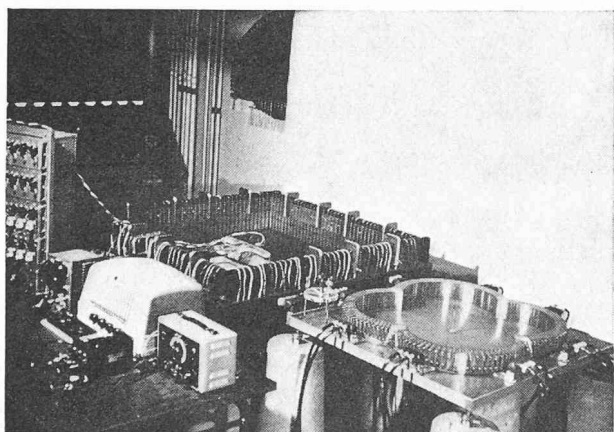


Fig. 19. — Ensemble rhéoelectrique indéfini.

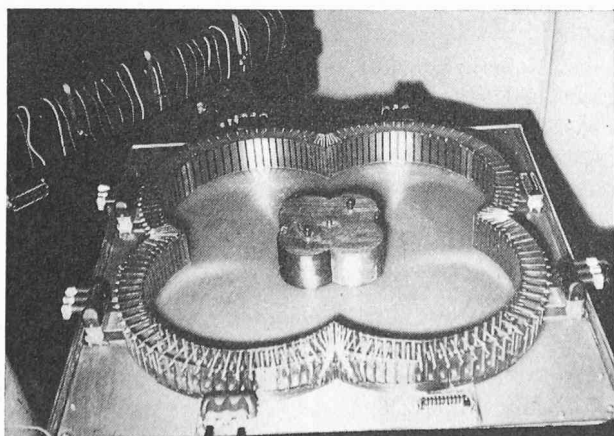


Fig. 20. — Cuve d'inversion.

à réduire certains contours dans des proportions importantes. On utilise alors le procédé d'inversion, que concrétise l'ensemble des deux cuves de la figure 19, appelé *ensemble rhéoelectrique indéfini*. Le domaine d'étude est limité à une cuve carrée, le reste du champ étant transformé par inversion en l'intérieur d'une cuve de forme inverse (trèfle à quatre feuilles). La valeur d'un potentiel harmonique n'étant pas affectée par une inversion, il suffit de réunir les deux cuves au moyen de petites électrodes homologues reliées deux à deux : le centre de la cuve inverse figure le cercle de l'infini du domaine direct. On peut alors à loisir grossir tout contour particulier dans la cuve carrée. La figure 20 montre un aspect de la cuve inverse, où le centre est occupé par un doublet constitué de deux demi-cercles conducteurs et deux demi-cercles isolants, et figurant les limites infinies d'un champ uniforme.

C'est cet ensemble qui a été utilisé pour la troisième application décrite. Elle concerne l'étude d'un collecteur à drains rayonnants, destiné à l'alimentation en eau de la centrale de Marcoule. Comme l'ont montré différents sondages, le niveau de la nappe à l'emplacement du collecteur suit le niveau du Rhône : il y a donc communication entre les deux, et l'on peut admettre que l'on a affaire à un puits (le collecteur) alimenté par une source linéaire (le Rhône). On suppose également que les variations d'épaisseur de la nappe n'influent pas sur le débit du collecteur : on choisit donc une épaisseur moyenne, ce sera celle de l'eau dans les cuves de l'ensemble rhéoelectrique indéfini.

Le collecteur est cylindrique et comporte 12 drains rayonnants uniformément répartis. Mais comme le milieu est anisotrope, on fait intervenir une affinité qui rend le collecteur elliptique ainsi que la ligne qui relie les extrémités des drains. La représentation à la cuve est très simple (fig. 21) : le collecteur, en plexiglas, est placé au centre de la cuve directe ; les drains, en cuivre, sont alimentés grâce à des fils passant par l'intérieur du collecteur ; le Rhône est figuré par un cercle conducteur placé dans la cuve inverse à la position qui correspond à la distance séparant le fleuve du collecteur. Une sonde isolée a été utilisée pour relever le champ au niveau des drains (fig. 22). Les débits individuels des drains ont été mesurés.

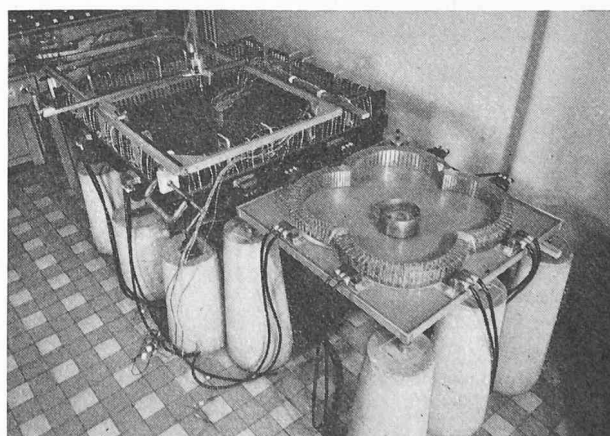


Fig. 21. — Drains rayonnants. Vue de l'ensemble du montage.

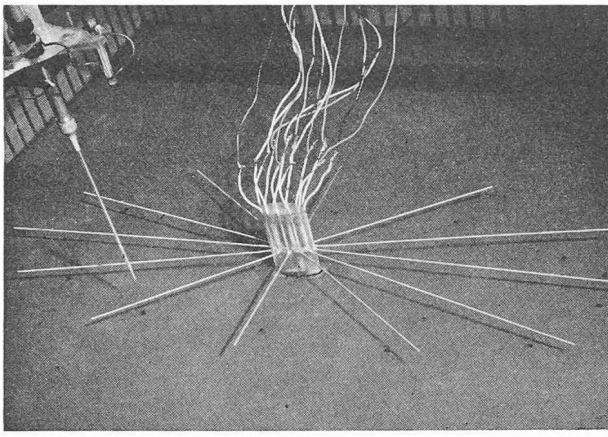


Fig. 22. — Drains rayonnants. Vue du modèle et de la sonde.

A ce sujet, il est intéressant de remarquer que la répartition uniforme de drains de longueurs égales autour du collecteur n'a pas de raison d'être optimum, c'est-à-dire de correspondre au débit maximum du collecteur, compte tenu notamment de l'anisotropie. Une étude peut être aisément entreprise pour la recherche de cet optimum, en testant plusieurs modèles de collecteur : on trouve ainsi un accroissement de l'ordre de 45 % du débit entre le schéma uniforme et un schéma où les longueurs des drains ont été augmentées dans la direction du Rhône.

5. La technique du plâtre

Indépendamment des possibilités de représentation de problèmes tridimensionnels, l'avantage que possède la cuve rhéoelectrique sur le papier conducteur est la précision obtenue dans les résultats, compte tenu de la finesse et de la minutie de la mise en œuvre. Par contre, le papier conducteur présente le grand intérêt de pouvoir être découpé à la demande pour la recherche des frontières inconnues.

Mais quand il s'agit de problèmes tridimensionnels, ni l'une ni l'autre de ces méthodes ne convient et il faut faire appel soit à la méthode des réseaux, que nous



Fig. 23. — Modèle en plâtre. Recherche d'une surface libre à trois dimensions.

décrivons plus loin, soit à un conducteur solide aisément façonnable. Huard de la Marre a ainsi proposé le plâtre gâché à l'eau qui, encore frais, est bon conducteur [2] : à cette qualité il faut ajouter la facilité de moulage, la rigidité après prise, le façonnage aisé par grattage, la bonne homogénéité, et le bas prix de revient.

Il est préférable de couler le modèle dans un moule imperméable pour retarder au maximum l'évaporation. La prise des potentiels à l'intérieur du modèle est évidemment plus délicate que pour la cuve : elle se fait à l'aide de sondes ponctuelles constituées de perles de laiton soudées aux extrémités de fils fins isolés.

La recherche d'une surface libre (fig. 23) est réalisée par le même processus que pour le papier conducteur, en interpolant le potentiel entre les valeurs relevées sur la surface du modèle et celles des sondes noyées à l'intérieur.

(A suivre)

BIBLIOGRAPHIE

Investissement et croissance économique. Esquisse d'une dynamique macrosectorielle, par *Claude Charmell*, ingénieur des ponts et chaussées. Paris, Dunod, 1969. — Un volume 14 × 24 cm, XIV-301 pages, 6 figures. Prix : broché, 42 F.

L'investissement engage l'avenir à moyen et à long terme puisqu'il est le principal ressort de la croissance ; à court terme, il influe sur le niveau de la consommation, le niveau des prix, la distribution des revenus, etc. Aussi est-il instructif de connaître par quels mécanismes il commande à la fois le présent et le futur.

Après quelques rappels sur la théorie moderne de la croissance et le concept d'investissement, le livre cité évoque rapidement les modèles représentatifs de l'économie, déduits des travaux de Keynes et de Leontieff.

Il montre ensuite, à l'aide d'un modèle simplifié inspiré des précédents, comment l'investissement participe au processus de croissance.

Ce modèle est alors appliqué à l'économie française dont il permet de comprendre l'expansion. Toutes les grandeurs définies antérieurement sont mesurées ; ainsi, ce livre tente de proposer à la fois une vision théorique du phénomène de croissance et une connaissance chiffrée du développement prévu en France pour les prochaines

années. Enfin, il aborde le choix du niveau global de l'investissement et montre comment il faut répudier toute recherche aveugle d'un optimum théorique et, au contraire, comment il convient d'effectuer la synthèse des aspirations des différents groupes sociaux.

A noter que les développements mathématiques sont très réduits dans cet ouvrage.

Les économistes, les mathématiciens, les responsables de l'économie publique ou privée, les professeurs, les étudiants des facultés de droit et de sciences économiques y trouveront une vue synthétique du problème de la croissance.

Utilisation et programmation des ordinateurs « en temps réel », par *James Martin*. Traduit de l'anglais par un groupe d'ingénieurs. Les Editions d'Organisation, Paris, 1969. — Un volume de 440 pages, 23 photos en hors texte, 87 figures. Prix : relié, 93 F.

L'appellation « temps réel » (real time) signifie que les messages qui arrivent à l'ordinateur de ses terminaux sont traités immédiatement, en général sans être stockés, et la réponse est donnée au terminal dans les secondes qui suivent.

Les utilisateurs potentiels d'une telle méthode sont nombreux :