Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 95 (1969)
Heft: 22

Artikel: Contribution à l'étude théorique du comportement non linéaire des structures massives en béton armé sous charges rapides

Autor: Saugy, Bernard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-70252

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

95e année Lausanne, 1er novembre 1969 No 22

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL
de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (SVIA)
de la Section genevoise de la SIA
de l'Association des anciens élèves de l'EPFL (Ecole polytechnique fédérale de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'EPFZ (Ecole polytechnique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE
Président: E. Martin, arch. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; M. Mozer, arch.; J.-C. Ott, ing.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; M. Chevalier, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.; M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION
de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; M. Cosandey, ing.; A. Métraux, ing.; A. Rivoire, arch.; J.-P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, 1000 Lausanne

RÉDACTION
F. Vermeille, rédacteur en chef; E. Schnitzler, ingénieur, et M. Bevilacqua, architecte, rédacteurs
Rédaction et Editions de la S.A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, 1000 Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 46.—	Etranger	Fr. 50.—
Sociétaires	»	» 38.—	»	» 46.—
Prix du numéro	»	» 2.30	»	» 2.50

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande » N° 10 - 5775, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29, 1000 Lausanne

ANNONCES

Tarif des annonces:

1/1 page	Fr. 495.—
1/2 »	» 260.—
1/4 »	» 132.—
1/8 »	» 68.—

Adresse: Annonces Suisses S.A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26, 1000 Lausanne et succursales

SOMMAIRE

Contribution à l'étude théorique du comportement non linéaire des structures massives en béton armé sous charges rapides, par Bernard Saugy, ingénieur.
Bibliographie. — Les congrès. — Documentation générale.

Communication de la Chaire d'aménagements de production d'énergie, travaux hydrauliques et fondations de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Professeur Dr A. Gardel

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE THÉORIQUE DU COMPORTEMENT NON LINÉAIRE DES STRUCTURES MASSIVES EN BÉTON ARMÉ SOUS CHARGES RAPIDES

par BERNARD SAUGY, ingénieur EPFL

Avant-propos

En automne 1967, nous avons sollicité du Fonds national de la recherche scientifique un crédit destiné à approfondir l'étude du comportement non élastique des structures, étude déjà entreprise antérieurement par la chaire sur une base plus modeste. Accordé au printemps 1968, ce crédit nous a permis de poursuivre activement l'étude de ce problème complexe; sous la conduite de MM. R. Lafitte et M. Hussain, c'est M. Bernard Saugy, assistant, qui a été chargé de ce travail.

Sans attendre que des résultats complets aient été obtenus, il a paru opportun, après une année, de faire le point. La présente publication a ainsi pour objet de faire connaître le sens et les buts de l'étude en cours et d'indiquer le stade atteint au milieu de 1969. Nous comptons poursuivre ce travail dans les mois à venir et il est envisagé, étant donné la part importante qu'il y a prise, que ce travail serve ultérieurement de base à une thèse de doctorat de M. Saugy.

Nous saisissons cette occasion de remercier le Fonds national de la recherche scientifique de l'appui qu'il a bien voulu donner à ces recherches.

Prof. Dr A. Gardel.

1. Introduction

La statique des structures est essentiellement basée sur les hypothèses de l'élasticité de Hooke ; elle permet de déterminer de façon rapide et efficace les efforts dans une structure. Or, dans certains cas, ces hypothèses ne sont valables que sous réserve ; ainsi, pour le béton armé, on doit imposer un taux d'armature minimum pour assurer un comportement voisin du comportement élastique. Le calcul classique conduit généralement à garantir un comportement élastique des matériaux

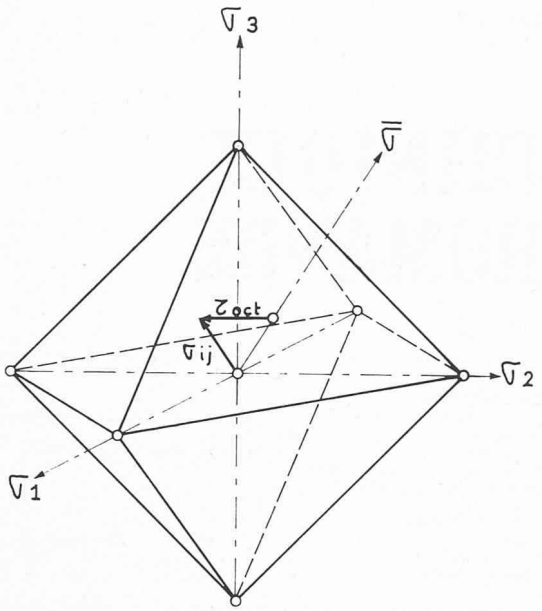

Fig. 1. — Octaèdre des contraintes principales.

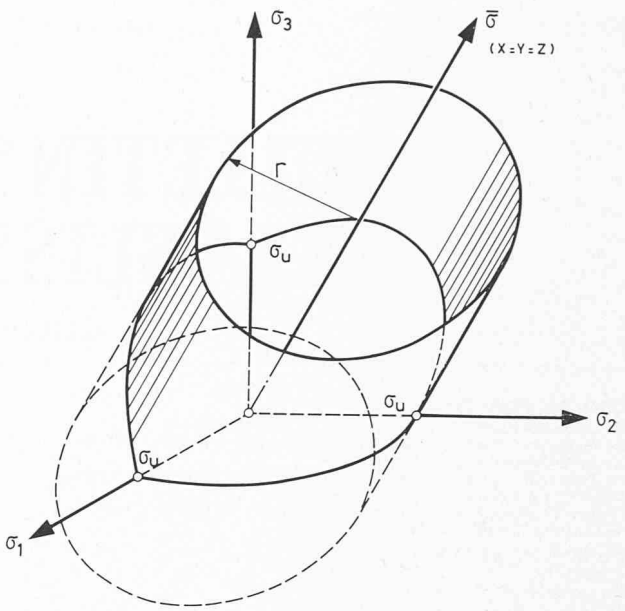

Fig. 2. — Représentation géométrique du critère de plasticité de von Misès.

(fissuration exceptée). En revanche, le *calcul à la rupture*, auquel on a de plus en plus recours, définit principalement la charge admissible par rapport à la ruine. Enfin, l'usage du modèle élastique sous-estime la résistance et la capacité d'adaptation de nombreuses structures pour lesquelles des déformations irréversibles sont sans conséquence grave.

Ces trois remarques nous conduisent à développer l'analyse des structures au-delà du domaine élastique. Cette constatation ne date pas d'aujourd'hui. Voici quelques applications principales des théories qui ont été établies :

- Calcul plastique des cadres et des treillis métalliques (rotules plastiques).
- Calcul à la rupture des poutres en béton armé.
- Théorie des lignes de rupture de Johansen pour le calcul des plaques en béton armé.

Ces théories sont actuellement fréquemment utilisées ; elles sont en bonne partie basées sur le fait que l'on connaît le schéma de résistance ultime de ces éléments. Pour un corps de forme compliquée, le nombre des schémas de ruine possibles est très important, sinon infini ; il sera par conséquent difficile de déterminer le schéma le plus défavorable correspondant à la charge de ruine minimale.

1.1 *Objet de notre étude*

L'objet de notre étude est de préciser quelques lois de comportement du béton, dans l'optique de l'analyse non linéaire des structures massives lorsque celles-ci ont des limites complexes ; cette étude doit déboucher sur un programme permettant de calculer des structures en béton armé. Aussi cette orientation concrète nous conduira-t-elle parfois à délaisser la rigueur mathématique au profit de l'efficacité à court terme.

Notons que le Centre de calcul de l'EPFL a déjà mis au point le calcul élastique des treillis, des plaques, des structures bidimensionnelles et de leurs combinaisons ; d'autres universités, ainsi que des institutions privées, possèdent des programmes de calcul de coques, de corps à symétrie de révolution ou de structures tridimensionnelles. Au-delà du domaine élastique, la société Gulf General Atomic a mis au point un programme permettant de tenir compte des aciers et de la fissuration [8] [1]. L'Université de Swansea, en Grande-Bretagne, travaille à l'élaboration d'une méthode non linéaire en utilisant actuellement un modèle élastique parfaitement plastique [14]. En outre, l'analyse non linéaire fait, en ce moment, l'objet de plusieurs travaux de recherche, mais, à notre connaissance, ou ils sont basés sur un modèle élaboré pour les métaux ductiles, ou ils n'ont pas encore abouti.

1.2 *Plan de l'exposé*

Nous rappellerons tout d'abord certains aspects des critères mathématiques d'états limites adaptés au comportement de certains métaux et de l'acier notamment.

Cette base méthodologique nous permettra d'aborder le cas différent des matériaux fragiles et de donner une expression simple du critère de rupture qui les régit. Nous aurons recours pour ce faire à des théories partielles et des essais réalisés dans d'autres universités.

Ensuite, nous analyserons quelques caractéristiques de la déformation du béton sous charge rapide et nous tenterons d'en tirer un modèle de déformation non linéaire.

Enfin, nous présenterons les grandes lignes d'un programme de calcul bidimensionnel par éléments finis, basé sur les hypothèses que nous aurons énoncées, ainsi qu'une application pratique au calcul d'une poutre sur trois appuis.

2. Critères d'état limite pour les corps ductiles

Les *corps ductiles* sont des corps susceptibles de subir de grandes déformations, par glissement, sans modification notable de leur structure interne et ceci tant en traction qu'en compression. L'allongement et la striction

[1] Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

précédant la rupture d'une barre d'acier tendue sont typiques de la ductilité. Par opposition, nous appellerons *corps fragiles* des corps qui peuvent se rompre par perte de cohésion lors de faibles déformations résultant de tractions macroscopiques ou microscopiques. La fissuration du béton tendu illustre cette propriété. Notons toutefois que la distinction porte sur le comportement du matériau et non sur sa structure interne. On observe en effet des ruptures fragiles dans certains métaux ductiles, lors d'essais à basse température par exemple.

Pour faciliter le choix du critère de rupture des corps fragiles, nous rappellerons brièvement quelques critères d'états limites couramment utilisés pour les corps ductiles ; ce rappel nous permettra également de mieux saisir la différence de comportement entre les corps ductiles et fragiles.

Par un certain nombre d'essais uniaxiaux, dont la traction d'une barre d'acier, on peut définir une contrainte à partir de laquelle le matériau cède. Dès cette limite, on observe de grandes déformations irréversibles correspondant à des glissements préférentiels dans des plans obliques par rapport à la contrainte de sollicitation. Il est par conséquent évident que les contraintes que l'on pourrait appliquer dans les autres directions ont un effet sur le *seuil de plasticité*, c'est-à-dire sur la limite à partir de laquelle les nouvelles déformations sont irréversibles et ne sont plus proportionnelles aux contraintes. De nombreuses théories ont tenté de restituer ce phénomène.

2.1 *Critères de Hencky et von Misès* [4]

Le seuil de plasticité est défini dans l'espace des contraintes principales par une surface du type $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ qui a, selon von Misès, l'expression suivante :

$$2\,\sigma_0^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

σ_o est une constante scalaire de comparaison caractéristique du matériau.

Si nous augmentons la pression moyenne de $\Delta\overline{\sigma}$ [1] nous obtenons :

$$2\,\sigma_0^2 = [(\sigma_1 + \Delta\overline{\sigma}) - (\sigma_2 + \Delta\overline{\sigma})]^2 + \ldots$$

Nous constatons que les $\Delta\overline{\sigma}$ s'annulent deux à deux ; par conséquent la limite de plastification est indépendante de la pression moyenne $\overline{\sigma}$; en effet, ce critère traduit le fait qu'il existe un seuil de l'énergie de distorsion au-delà duquel les déformations ne sont plus élastiques.

2.2 *Critère de l'effort tranchant sur la face de l'octaèdre* [4]

Soit un octaèdre centré à l'origine des contraintes principales et dont les sommets sont sur les directions principales (fig. 1). L'état de contrainte en un point quelconque d'un solide est représenté par un vecteur σ_i. On peut admettre que dès que la composante de ce vecteur parallèle à une des faces de l'octaèdre, c'est-à-dire la distorsion, dépasse une limite fixée τ_{oct}, il se produit un glissement non élastique.

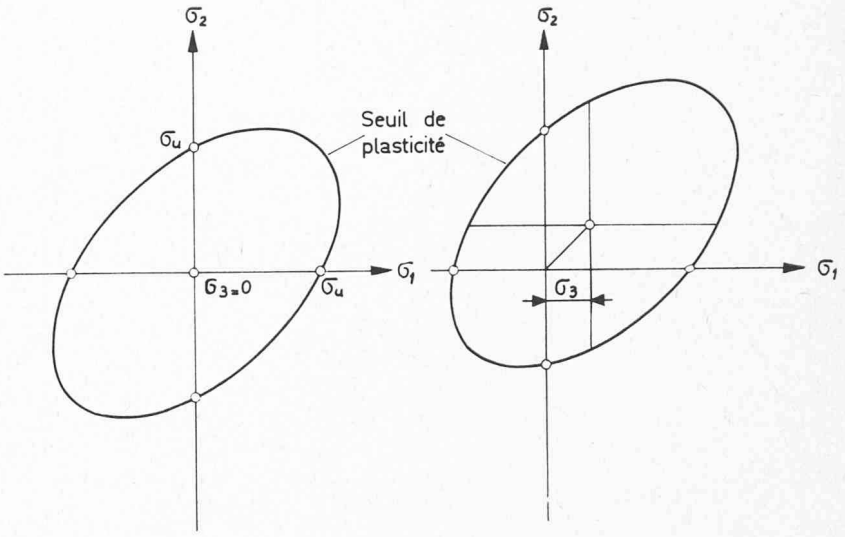

Fig. 3. — Sections parallèles au plan $\sigma_1\sigma_2$ du critère de plasticité de von Misès.

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

L'expression de ce critère est tout à fait semblable à celui de Hencky.

Nous résumons ces deux critères sous la forme :

$$\psi = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

ou en développant :

$$\psi/_2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_1$$

$$\psi/_2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 3\,(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$$

En utilisant les notations de l'annexe, nous obtenons : $\psi/_2 = I_2$ où I_2 est l'invariant d'ordre 2 du tenseur des contraintes σ_{ij} et mesure l'intensité de la distorsion.

Nous avons vu que ψ est indépendant de la pression moyenne ; nous pouvons par conséquent l'exprimer en fonction du déviateur des contraintes S_i, c'est-à-dire :

$$\psi/_2 = (S_1 + S_2 + S_3)^2 - 3\,(S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1)$$

où par définition : $S_1 + S_2 + S_3 = 0$

d'où nous tirons :

$$\psi/_2 = -3\,(S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1) = I_2$$

ou

$$\psi/_2 = \frac{3}{2}\,(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) = I_2$$

2.3 *Représentation géométrique de ces critères*

La fonction ψ est symétrique en σ_1, σ_2, σ_3 ; elle exprime à un scalaire près le carré de la distance r d'un point limite quelconque à la droite $x = y = z$: axe de symétrie du repère. La surface ainsi définie est un cylindre dont l'axe est la droite $\overline{\sigma}$, lieu des points représentatifs d'un état de contrainte dont la distorsion est nulle (fig. 2).

Dans un plan parallèle au plan $\sigma_1\sigma_2$, la section du cylindre est une ellipse (fig. 3). Les valeurs σ_u sont les limites de plasticité pour des états de contrainte uniaxiaux.

[1] La définition des notations relatives aux contraintes et aux déformations se trouve en annexe (p. 301).

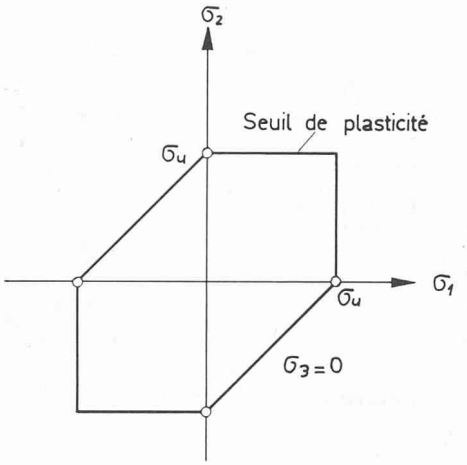

Fig. 4. — Critère de Tresca dans le plan $\sigma_1\sigma_2$.

En faisant varier ψ, on décrit un ensemble de cylindres coaxiaux. La limite de plasticité d'un matériau ductile est ainsi définie par le seul paramètre ψ.

2.4 *Critère de Tresca*

La surface limite de plastification est dans ce cas un prisme de même axe que le cylindre de von Misès. Sa section pour $\sigma_3 = 0$ a l'allure indiquée par la figure 4.

L'expression mathématique de ce critère est peu aisée. On obtient dans le plan σ_1 σ_2

$$|\sigma_1| < \sigma_u$$
$$|\sigma_2| < \sigma_u$$
$$|\sigma_1 + \sigma_2| < \sigma_u$$

A titre de comparaison, nous décrivons dans la figure 5 les sections droites du cylindre et du prisme.

2.5 *Limite de validité des critères de von Misès et de Tresca*

Ces deux critères sont indépendants des signes des contraintes et s'appliquent à des matériaux ductiles. Ils définissent la limite entre le domaine élastique et le domaine plastique.

De très nombreux essais sur des métaux ont confirmé que si le seuil de plasticité est nettement marqué, il est défini par une surface à génératrices parallèles dont la section droite est variable selon les métaux, mais, en général, comprise entre celle de Tresca et celle de von Misès.

L'existence de ce seuil de plasticité résulte physiquement du glissement de plans cristallins. Notons que les

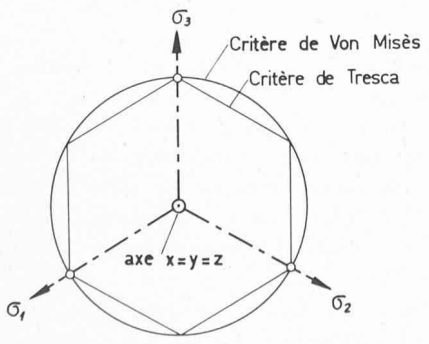

Fig. 5. — Sections droites des critères de von Misès et de Tresca.

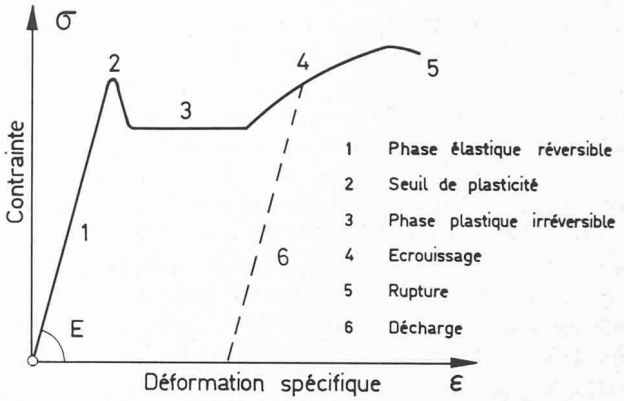

Fig. 6. — Courbe « contrainte-déformation » caractéristique de certains matériaux ductiles [13].

résistances élastiques relativement faibles des métaux vis-à-vis de celles qu'on observe dans les cristaux purs s'expliquent par la migration des dislocations.

2.6 *Comparaison métaux-béton*

La courbe « contrainte-déformation » typique pour le fer, l'acier doux, les métaux à structure cristalline cubique centrée contenant des impuretés intersticielles (C, N, H, O), de même que pour de nombreux alliages (Al-Mg), a l'allure indiquée par la figure 6 [13].

On constate que la figure 6 met en évidence deux comportements principaux : d'une part, la phase élastique où les déformations sont réversibles, d'autre part la phase *parfaitement plastique* où la variation de la déformation, irréversible, est indépendante de la variation de contrainte. Les deux phases sont séparées par le seuil de plasticité. Prager et Hill, notamment, ont établi sur la base de telles observations un modèle *élastique parfaitement plastique* symbolisé par la figure 28. Remarquons que les déformations plastiques ne modifient pas notablement la structure du matériau ; il est admis, par conséquent, que ce dernier reste isotrope au-delà du domaine élastique.

Si nous analysons maintenant la déformation du béton soumis à une compression simple (fig. 7), nous constatons que même dans les zones comprimées il a un comportement très différent de celui des métaux. De ce

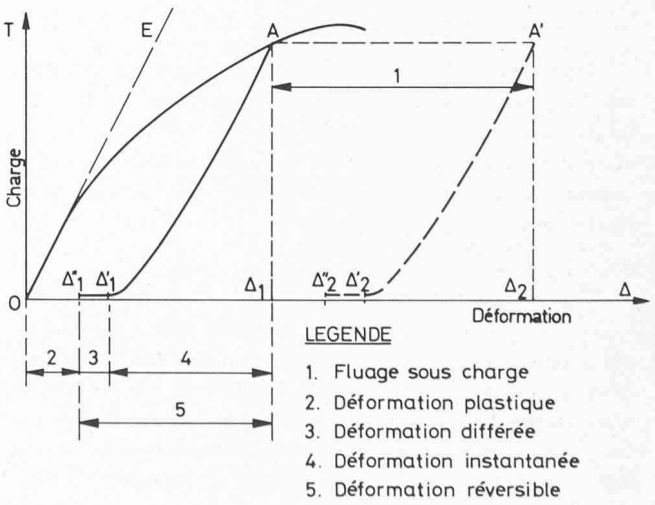

Fig. 7. — Diagramme « charge-déformation » typique du béton [12].

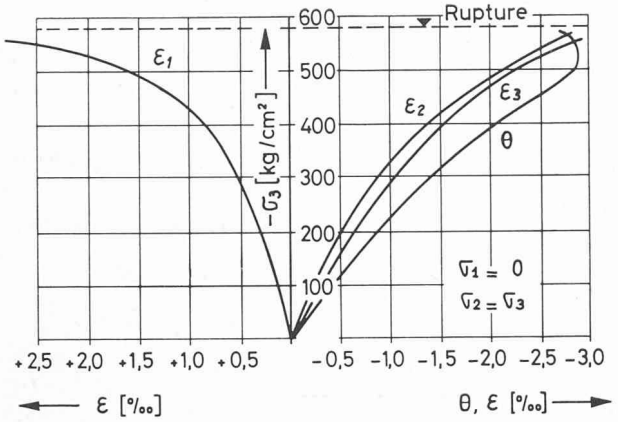

Fig. 8. — Déformations d'une éprouvette soumise à une charge biaxiale croissante ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3$) [9].

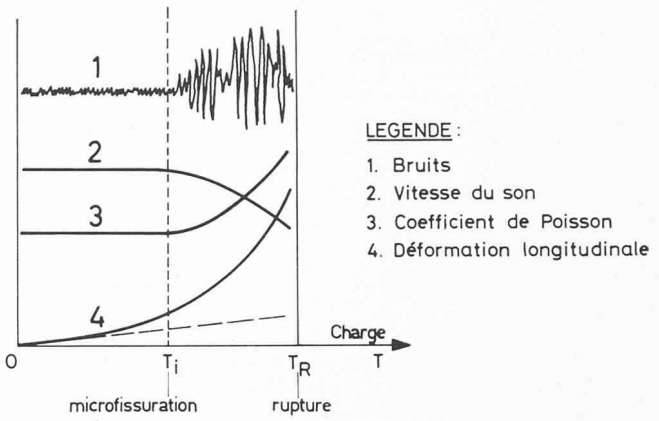

Fig. 10. — Mise en évidence de la charge de microfissuration (T_i) [12].

fait, le modèle « élastique — parfaitement plastique » n'est pas représentatif du comportement réel du béton. C'est pourquoi nous allons tenter de dégager quelques caractéristiques principales du béton et d'établir un modèle qui lui soit propre.

3. Etats limites du béton

Nous nous limiterons dans cette étude aux phénomènes rapides dans lesquels n'interviennent pas explicitement les divers modes de retrait ou de fluage.

3.1 *Caractéristiques du béton*

Les figures 8 et 9 décrivent le comportement d'une éprouvette de béton sous une *charge rapide.*

Nous constatons qu'il n'existe pas de discontinuité marquée dans les courbes de déformation et que l'on a dès le début de la sollicitation des déformations irréversibles. D'autre part, la courbe des variations de volume (fig. 8, θ) met en évidence, à son extrémité, un foisonnement qui correspond à une microfissuration du béton. Ce phénomène est confirmé par la discontinuité dans les mesures de plusieurs caractéristiques physiques enregistrées sur une éprouvette soumise à une charge croiscroissant jusqu'à la rupture (fig. 10).

3.2 *Critères de rupture*

Nous avons vu sous 2 qu'il suffisait pour connaître le comportement de certains métaux ductiles de définir la caractéristique élastique et le seuil de plasticité. Dans le cas du béton ce seuil n'existe pas : c'est pourquoi nous rechercherons tout d'abord une limite de rupture, puis une loi reliant, dans la zone délimitée par cette surface, les contraintes aux déformations.

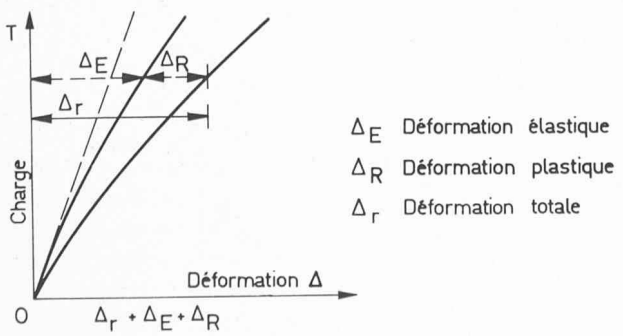

Fig. 9. — Analyse de la déformation d'une éprouvette de béton soumise à une charge uniaxiale croissante [12].

3.2.1 *Critère de Mohr-Coulomb généralisé* [4]

Ce critère postule qu'il existe une *courbe intrinsèque*, enveloppe des cercles de Mohr correspondant à un état limite de rupture (fig. 11).

Un élément, soumis à un état de contrainte triaxial ($\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$), se rompt si l'un des trois cercles d Mohre coupe la courbe intrinsèque et nous constatons que les termes $\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$ et $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ sont déterminants.

Le critère de Mohr implique que la contrainte intermédiaire σ_2 ne joue aucun rôle. Cette hypothèse est fondée si la surface physique de glissement est perpendiculaire au plan des contraintes extrêmes et parfaitement plane ; mais si la surface de glissement est grenue ou irrégulière, la contrainte intermédiaire aura un effet non négligeable.

3.2.2 *Rupture fragile : théorie de Griffith* [3]

La fissuration est un phénomène fondamentalement discontinu : l'apparition d'une fissure nécessite un seuil fini d'énergie qui sera fortement influencé par la présence de défauts de structure. Par la suite, le développement de la fissure sera dicté par les fissures préexistantes. Des essais ont en effet montré que la résistance des matériaux à l'échelle moléculaire est considérablement plus grande que celle d'un élément de dimensions finies. De ce fait, seules les concentrations de contrainte aux bords d'une fissure existante expliquent le développe-

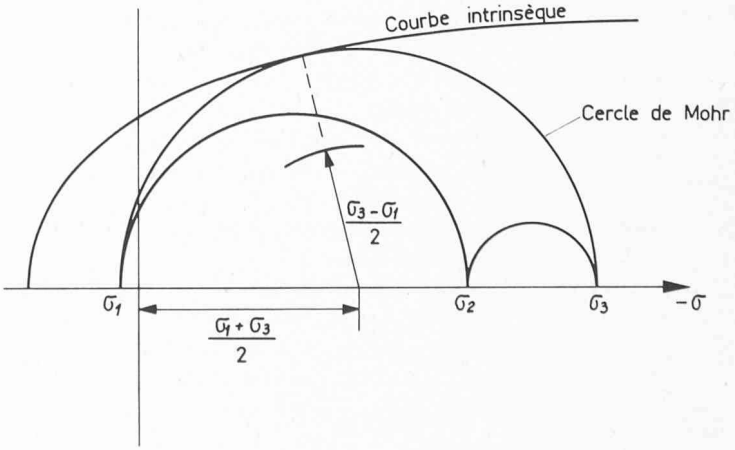

Fig. 11. — Courbe intrinsèque de Mohr-Coulomb.

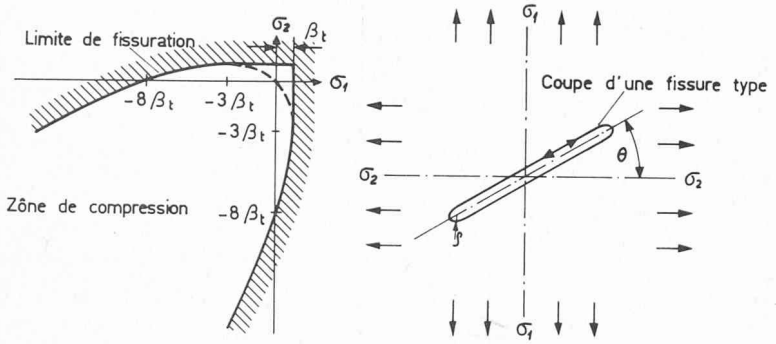

Fig. 12. — Limite au-delà de laquelle les fissures se développent [3]. (Théorie de Griffith.)

ment des fissures pour les valeurs usuelles de la résistance à la traction.

En supposant d'une part que la répartition des fissures initiales est homogène et, d'autre part, que les longueurs et les rayons extrêmes ρ de toutes les fissures sont égaux, Griffith obtient par le calcul la limite des états de contraintes biaxiaux au-delà de laquelle les fissures se développent (fig. 12).

$|\sigma_1| > |\sigma_2|$ $\qquad$ β_t = résistance à la traction
$\sigma_1 = \beta_t$ si $3\sigma_1 + \sigma_2 > 0$ $\qquad$ uniaxiale uniforme

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 8\,\beta_t\,(\sigma_1 + \sigma_2) = 0 \quad \text{si } 3\sigma_1 + \sigma_2 < 0$$

Selon Yokobori [3] ces hypothèses sur la fissuration initiale sont insuffisantes et il convient d'estimer statistiquement le taux et le type d'amorces de rupture par unité de volume, puis d'en déduire une nouvelle loi. En outre, Griffith s'est basé sur des essais réalisés avec des corps relativement homogènes tels que le verre ou la fonte grise, mais, à notre connaissance, aucune étude statistique complète n'a été conduite dans cette optique pour le béton. Notons enfin que la généralisation de cette théorie à un état de contrainte triaxial est malaisée. C'est pourquoi nous ne pouvons utiliser ces résultats qu'à titre comparatif.

3.2.3 *Indications sur la surface de rupture fournies par des essais biaxiaux*

A notre connaissance, il n'existe pas encore de résultats d'essais systématiques de triple contrainte à trois composantes, positives ou négatives, indépendantes[1]. Nous nous contenterons par conséquent de rappeler les résultats de deux séries d'essais biaxiaux présentés dans la littérature. H. Weigler et G. Becker [9] ont obtenu les limites de rupture, décrites dans la figure 13, par une série d'essais biaxiaux ($\sigma_1 = 0$) pour des rapports σ_2/σ_3 constants et pour plusieurs bétons de composition différente. Si nous appelons n le rapport entre σ_3 de rupture pour un essai uniaxial et σ_3 de rupture pour un essai où $\sigma_2 = \sigma_3$, nous constatons qu'il est compris, pour les bétons étudiés, entre 1,2 et 1,4.

Les résultats d'essais de rupture du béton en traction, présentés à la figure 14, ont été obtenus sur des éprouvettes cylindriques creuses de 20 à 30 cm de diamètre environ. Bresler et Pister ont soumis les cylindres à une force axiale et un couple à chaque extrémité alors que

[1] De nombreuses tentatives sont actuellement faites pour créer un appareillage d'essai adéquat.

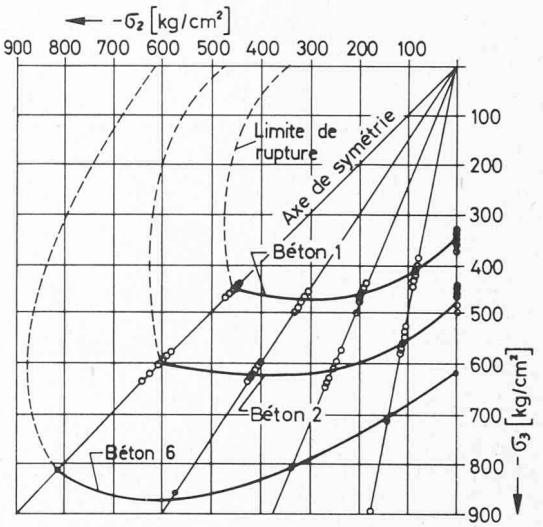

Fig. 13. — Essais de rupture en compression biaxiale [9].

Mc Henry et Karni ont remplacé le couple par une pression intérieure. Cette dernière technique sous-estime vraisemblablement la résistance à la traction, car le rapport des diamètres intérieur et extérieur (0,71) est trop faible pour garantir une répartition homogène des tractions dans les parois du cylindre. Notons que la dispersion des résultats est de l'ordre de 6 à 20 % pour 10 à 20 éprouvettes.

3.2.4 *Critère global de rupture*

La recherche d'une surface intrinsèque de rupture a fait et fait l'objet de nombreux travaux qui donnent encore des résultats contradictoires. C'est pourquoi nous avons recherché une expression mathématique simple qui permette de définir avec une précision pratiquement suffisante la limite de rupture. Cette surface sera symétrique d'ordre 3 par rapport à l'axe $\overline{\sigma}$ (droite $x = y = z$) car nous pouvons permuter les indices des trois contrain-

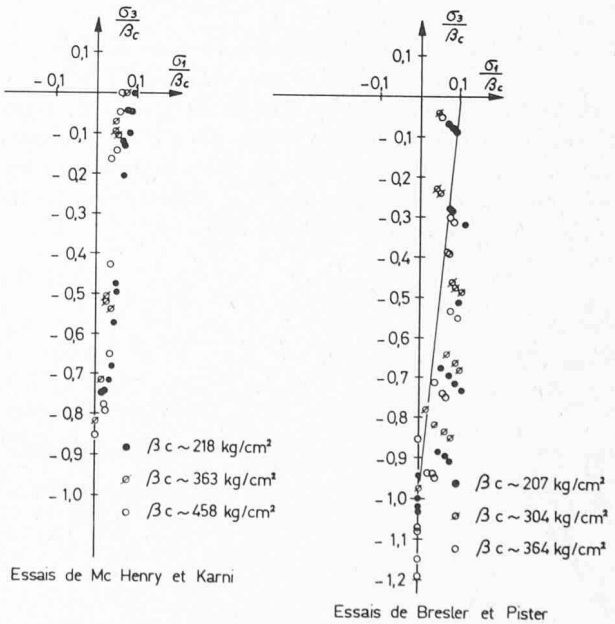

Fig. 14. — Essais de rupture en traction composée de compression perpendiculaire [11].

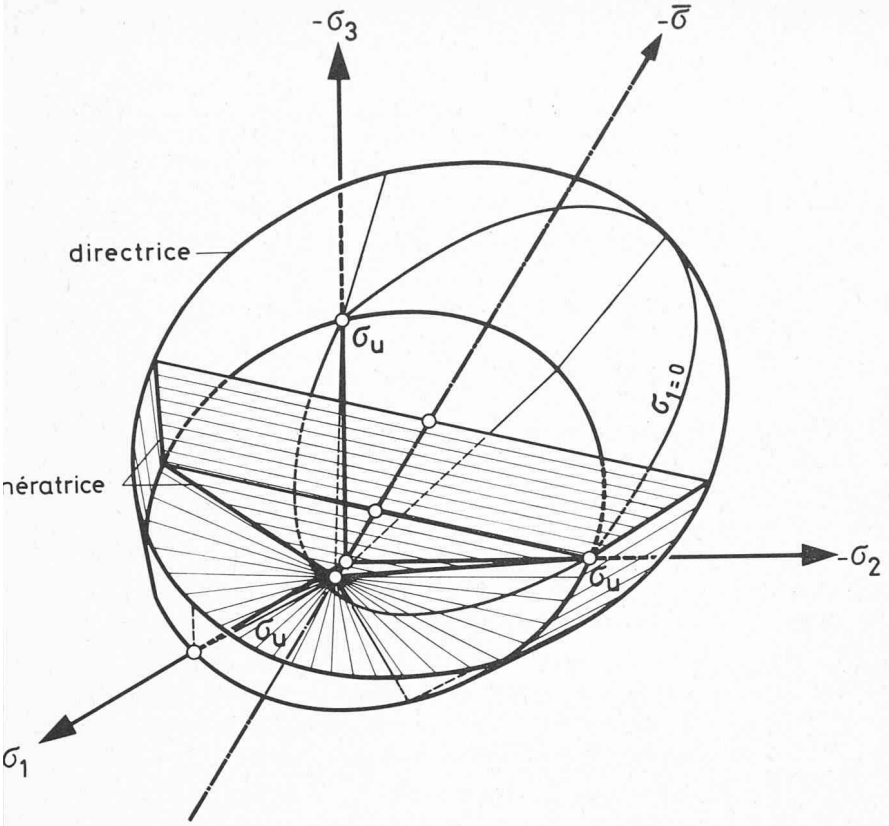

Fig. 15. — Surface tronconique de rupture du béton.

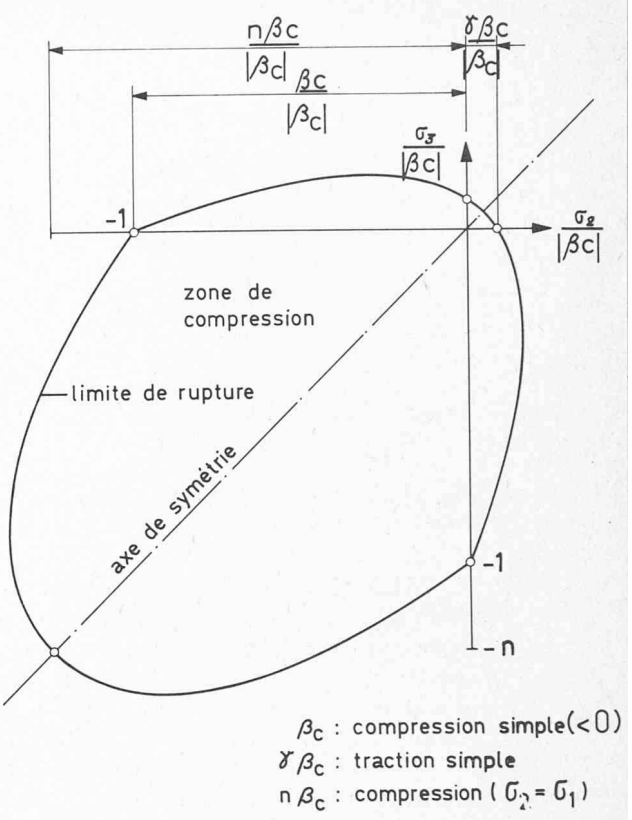

Fig. 16. — Section de la surface tronconique dans le plan $\sigma_2\sigma_3$.

tes principales. Nous la définirons par conséquent par deux réseaux de courbes orthogonales : les directrices situées dans un plan perpendiculaire à $\bar{\sigma}$ d'une part, et les génératrices d'autre part.

Mohr a mis en évidence les relations entre les termes $\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$ et $\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$. Si nous introduisons l'effet de la contrainte intermédiaire σ_2, nous pouvons admettre par analogie une relation entre $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ et $I_2^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}$: relation entre la pression moyenne et l'invariant du tenseur des contraintes correspondant à la distorsion. Cela revient à admettre pour directrices des cercles dont le rayon est fonction de I_1. Les génératrices sont des courbes caractérisées par une variation de courbure à la limite entre la rupture par glissement et la rupture fragile. Nous avons admis comme génératrices des paires de droites. La surface ainsi définie est composée d'un tronc de cône et d'un cône se coupant dans le plan des trois points de rupture correspondant à des essais uniaxiaux. Cette surface, représentée à la figure 15, s'exprime simplement sous la forme :

$$I_2^{1/2} + \alpha_1 I_1 + \beta_1 = 0 \quad \text{pour} \quad I_1 < \beta c$$
$$I_2^{1/2} + \alpha_2 I_1 + \beta_2 = 0 \quad \text{pour} \quad I_1 > \beta c$$

$\beta c < 0$ = contrainte de rupture, en compression simple, sur prisme.

Nous indiquerons sous 3.2.5 une méthode susceptible de déterminer les valeurs numériques de α_i (α_1, α_2) et β_i pour un béton donné.

Physiquement, le choix d'une directrice circulaire se justifie pour autant que la rupture découle d'un phénomène parfaitement isotrope tel que le glissement. Par contre si la cause de la rupture est de nature anisotrope, la directrice tendra vers le triangle inscrit de la directrice dont les sommets sont sur les axes σ_1, σ_2, σ_3.

Or, la fissuration et, dans une moindre mesure, la microfissuration sont de nature anisotrope et empêchent, dans une proportion variable en fonction de la composition du béton, la formation de plans de glissements.

De nombreuses études sont actuellement conduites pour définir de façon précise l'évolution des directrices et des génératrices mais n'ont pas encore donné de résultats concordants. De plus, le choix d'une surface très élaborée nécessite de nombreux paramètres d'ajustement qu'il est encore très malaisé de déterminer pour un béton donné. C'est pourquoi nous avons admis pour toutes les valeurs de I_1 une directrice circulaire de rayon $I_2^{1/2}$; l'erreur qui en découle est partiellement compensée par le choix de génératrices dégénérées en paires de droites.

La figure 16 qui représente une section de la surface de rupture ($n = 1{,}25$, $\gamma = -0{,}075$) pour $\sigma_1 = 0$ se compose de deux ellipses. La première (σ_2 et σ_3 sont des compressions) est proche des courbes obtenues par

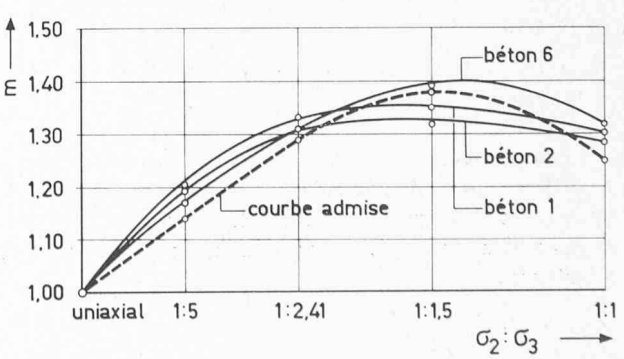

Fig. 17. — Courbes comparant la surface tronconique aux résultats d'essais en compression biaxiale.

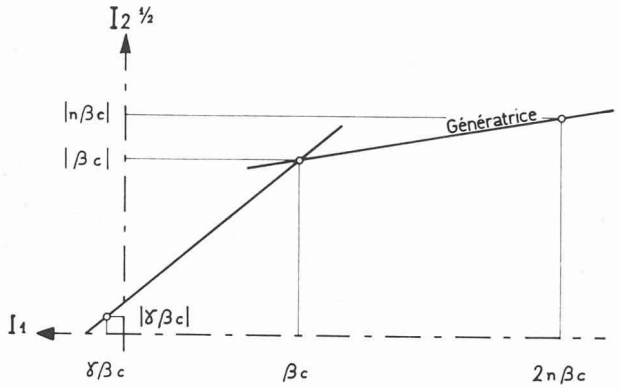

Fig. 18. — Génératrice de la surface tronconique de rupture.

K. Weigler dans ses essais. Pour juger de notre hypothèse, nous appelons m le rapport entre σ_3 de rupture (pour σ_2/σ_3 variable) et σ_3 de rupture (en compression simple). La figure 17 compare les valeurs théoriques de m aux valeurs d'essais pour divers bétons. L'approximation faite nous semble donc satisfaisante.

La deuxième ellipse définit la rupture dans une zone essentiellement fragile et le manque d'essais systématiques complets rend plus difficile la comparaison. Toutefois, en admettant une valeur relativement faible de la résistance à la traction uniaxiale, la courbe théorique confrontée à la figure 15 montre que l'approximation est convenable, compte tenu du fait que la résistance du béton à la traction a un caractère aléatoire.

En conclusion, la comparaison des résultats d'essais biaxiaux aux sections de la surface, par les trois plans pour lesquels une des contraintes est nulle, est dans l'ensemble satisfaisante et nous confirme que la surface tronconique est une approximation suffisante pour les besoins actuels de notre étude.

3.2.5 *Expression analytique du critère de rupture pour un béton déterminé*

Les hypothèses faites sur la surface de rupture nous permettent de la déterminer en connaissant les valeurs des trois états de rupture suivants :

résistance à la compression simple =
$= \beta c : I_1 = \beta c,\ I_2^{1/2} = |\beta c|$

résistance à la traction simple =
$= \gamma\beta c : I_1 = \gamma\beta c,\ I_2^{1/2} = |\gamma\beta c|$

résistance à la compression biaxiale =
$= n\beta c : I_1 = 2n\beta c,\ I_2^{1/2} = |n\beta c|$

Nous avons vu que la surface s'exprime analytiquement par

$$I_2^{1/2} + \alpha_1 I_1 + \beta_1 = 0 \text{ si } I_1 < \beta c$$
$$I_2^{1/2} + \alpha_2 I_1 + \beta_2 = 0 \text{ si } I_1 > \beta c$$

Ces équations sont dans le plan $(I_2^{1/2}, I_1)$, les équations des droites passant par les trois points connus (fig. 18), ce qui nous permet de déterminer les paramètres α_i et β_i en fonction de β_c, n et γ et nous donne les équations suivantes :

$$S_i\ I_1 < \beta c : \quad I_2^{1/2} + \frac{n-1}{2n-1} I_1 + \frac{n}{2n-1} \beta c = 0$$

$$S_i\ I_1 > \beta c : \quad I_2^{1/2} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} I_1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \beta c = 0$$

Remarque : En admettant β_1 et β_2 variables, nous décrivons un ensemble de surfaces homothétiques coaxiales. Ainsi, si $\beta_i' = I_2^{1/2} + \alpha_i I_1$ pour un état de contrainte quelconque, le rapport $\frac{\beta'_i}{\beta_i}$ définit numériquement le taux de contrainte d'un point soumis à l'état de contrainte considéré.

Si $\frac{\beta'_i}{\beta_i} = 0$, l'état de contrainte est nul ;

si $\frac{\beta'_i}{\beta_i} = 1$, l'état de contrainte est un état de rupture.

L'usage de ce rapport nous permet une représentation graphique aisée du mode de travail d'une structure.

Notons enfin, qu'à défaut de caractéristiques précises, nous admettrons, pour un béton courant, n et γ respectivement égaux à 1,25 et $-0{,}075$.

4. Loi contrainte-déformation du béton

Ayant défini la limite à partir de laquelle le béton se rompt, nous tenterons d'élaborer maintenant un modèle de déformation conforme aux caractéristiques du comportement du béton sous charge rapide.

4.1 *Déformation du béton*

Si nous analysons les réactions du béton sous des sollicitations diverses, nous relevons un nombre considérable de comportements de natures différentes :

- sous une sollicitation très faible, l'éprouvette analysée se comporte dans son ensemble comme un solide d'Euclide (infiniment rigide), l'énergie étant absorbée par une déformation locale ;
- sous une charge relativement faible appliquée rapidement, on observe une réaction élastique linéaire ;
- sous une charge plus importante, la réaction sera élasto-plastique non linéaire ;
- l'évolution dans le temps met en relief des phénomènes visqueux (fluage) ;
- dans certaines zones fissurées, la résistance est de la nature d'un frottement sec ;
- on observe enfin des déformations d'origine physico-chimique (par exemple : modification de la forme sous laquelle l'eau est intégrée à la structure).

La diversité des réactions du béton s'explique aisément par la complexité du matériau lui-même : les agrégats sont d'origine et de structures diverses, le ciment est déjà une matière composite, qui évolue dans le temps [13].

4.2 *Choix d'un modèle*

De toute évidence, il est exclu de trouver, pour l'instant du moins, un modèle mathématique permettant de symboliser toutes les réactions du béton. Toutefois nous avons vu, dans l'introduction, l'insuffisance du modèle élastique dans de nombreux cas particuliers ; nous nous proposons donc d'améliorer ce modèle en utilisant un *modèle non linéaire*. Pour être plus précis, en chaque instant nous considérons un modèle élastique et ferons évoluer les caractéristiques élastiques en fonction des états de contrainte intermédiaires.

On peut s'étonner du choix d'un modèle qui n'introduit pas le temps comme paramètre principal. La *rhéologie*, qui généralise la résistance des matériaux et

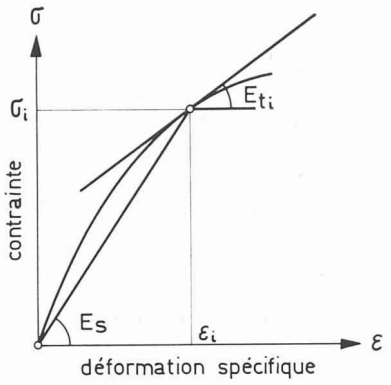

Fig. 19. — Diagramme contrainte-déformation pour une charge uniaxiale.

étudie l'écoulement des liquides et des pâtes, propose de nombreux modèles complexes qui ne définissent pas seulement les contraintes en fonction des déformations, mais encore en fonction du temps. Il est dès lors possible de tenir compte des réactions visqueuses du matériau et de la succession des états de contrainte ou de déformation qu'a subis le matériau jusqu'au moment considéré. Comme nous le verrons sous 5, pour déterminer la déformée d'une structure, nous devrons intégrer sur son volume l'énergie spécifique de déformation. Il va sans dire que l'introduction du temps comme paramètre principal complique de manière considérable l'intégration. D'autre part la complexité des modèles rend déjà très ardue, sinon impossible pour l'instant, la détermination des caractéristiques spécifiques d'un béton donné.

C'est pourquoi nous avons estimé qu'au stade actuel de notre étude il n'était pas nécessaire, étant donné le but recherché, de mettre au point un modèle aussi élaboré faisant intervenir le temps comme paramètre principal.

Le modèle non linéaire que nous avons choisi permet en effet d'analyser avec rigueur et simplement une structure chargée progressivement jusqu'à la ruine pour autant que les phénomènes de décharge (c'est-à-dire d'inversion locale du signe des variations de contrainte) soient de faible importance. L'usage de ce modèle peut s'étendre aisément à l'analyse de structure où les phénomènes de décharge sont importants ou même à l'analyse de certains aspects de l'évolution de structures dans le temps et ceci par une définition adéquate des caractéristiques élastiques instantanées. Cette définition pourra d'ailleurs faire appel à des lois rhéologiques pour autant que les caractéristiques technologiques du béton soient clairement définies.

Dans ce qui suit, nous étudierons le comportement du béton sous un système de charge fixe ou croissant homothétiquement dans les cas où les phénomènes de fluage sont négligeables.

4.3 *Modèle non linéaire*

Le diagramme contrainte-déformation d'un essai sous charge uniaxiale nous permet de définir deux modules d'élasticité variables en fonction de σ (fig. 19).

Le module sécant est rapporté à un état de contrainte nul : $\sigma = E_s \varepsilon$ avec $E_s = f(\sigma)$ et le module tangent est

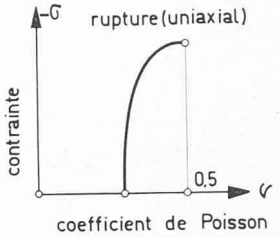

Fig. 20. — Variation de ν lors d'un essai uniaxial sous charge croissante.

défini à chaque instant : $\sigma = \sigma_i + E_{ti} \Delta\varepsilon$ ou $\sigma_i = \int_0^{\varepsilon i} Et(\sigma)\, d\varepsilon$.

Les déformations dans les deux autres directions seront déterminées par le module de Poisson ν, dont l'évolution en fonction de σ est représentée à la figure 20. Notons que ce module est relativement mal connu et que souvent dans la littérature les avis divergent quant à sa valeur et son évolution précise.

Dans le domaine *triaxial*, ces courbes E et ν se transforment en faisceaux de courbes dépendant des contraintes dans les autres directions ; nous devrions donc exprimer les valeurs du module de Young et du coefficient de Poisson en fonction d'un paramètre scalaire qui fixe le taux de contrainte. Nous préférons néanmoins établir les modules sécants de glissement μ et de compressibilité k en fonction d'invariants du tenseur des contraintes (cf. annexe), en admettant que le matériau reste isotrope jusqu'à la rupture.

En toute rigueur, il faudrait définir μ et k pour chaque suite possible d'états de contrainte, mais on conçoit facilement, et nous l'admettrons, que le module de compressibilité est uniquement fonction de la pression moyenne ($k = f(\overline{\sigma})$) et que le module de glissement dépend de la distorsion ($\mu = f(I_2)$).

Notons que pour un état de contrainte voisin de la rupture, le foisonnement accompagnant la microfissuration est une variation de volume résultant de la distorsion. Le choix des paramètres μ et k indépendants ne permet pas de tenir compte directement de ce phénomène. Dans les cas où le foisonnement a un effet non négligeable sur la résistance de la structure, il est possible d'introduire, par un artifice de calcul, une dilatation du matériau fonction de la variation de distorsion.

Ces hypothèses étant posées, analysons plus en détail les paramètres μ et k à l'aide de quelques essais.

4.3.1 *Module de compressibilité*

Examinons les courbes de la figure 21a, résultant d'essais biaxiaux ($\sigma_1 = 0$) réalisés par K. Weigler [9] et les mêmes courbes (fig. 21b) représentées en fonction de $\overline{\sigma}$. Les courbes expriment la variation de volume de cinq éprouvettes confectionnées avec le même béton, chargées jusqu'à la ruine.

Nous constatons dans la figure 21a que pour une valeur de σ_3 déterminée, les variations de volume croissent de l'essai 5 à l'essai 1. D'autre part, pour la même valeur de σ_3, les valeurs de $\overline{\sigma}$ qui en découlent croissent aussi de l'essai 5 à l'essai 1.

Ces mêmes variations de volume exprimées pour chaque essai en fonction de $\overline{\sigma}$ donnent un faisceau de

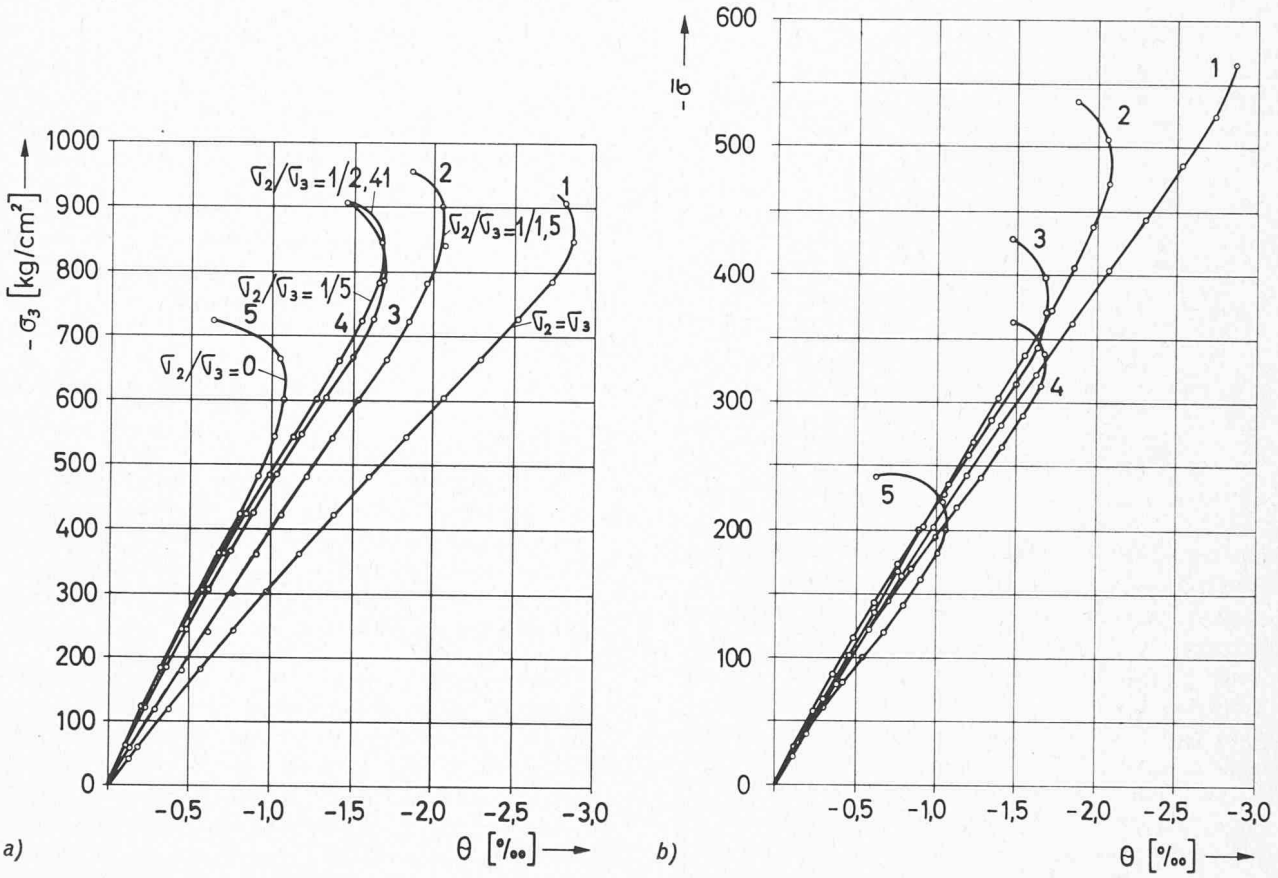

Fig. 21. — Variations de volume (θ) lors d'essais biaxiaux sous charge croissante pour plusieurs rapports de σ_2/σ_3.
a) θ exprimé en fonction de σ_3 [9] ; *b*) θ exprimé en fonction de $\bar{\sigma}$.

courbes plus compact. Si, pour une valeur choisie de $\bar{\sigma}$, nous exprimons la valeur de la distorsion caractérisée par I_2, nous remarquons que les variations de volume lors de chaque essai ne sont pas ordonnées en fonction de I_2. Ces faits tendent à prouver l'existence du coefficient de compressibilité k et le fait que la variation de volume est indépendante de la distorsion au-delà du domaine élastique. Ces constatations sont, en effet, évidentes pour un corps parfaitement élastique. Enfin, l'extrémité des courbes de variation de volume indique clairement que le foisonnement de rupture est indépendant de la pression moyenne, et qu'il dépend par conséquent de la distorsion.

Les essais de Weigler ont porté sur des éprouvettes de béton de composition différente, ce qui lui a permis de représenter les courbes $d\,\theta/_{\sigma_3}$ en fonction de σ_3 (définissant à un facteur près la variation de k) pour les cinq rapports σ_2/σ_3 étudiés. La figure 22 représente ces diagrammes pour un cas de charge où $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Nous constatons que k est variable pour le béton 1 ($\beta_{w28} = 214$ kg/cm²) alors qu'il est pratiquement constant pour le béton 3 ($\beta_{w28} = 616$ kg/cm²).

4.3.2 *Module de glissement*

L'analyse des essais précités et plus particulièrement les diagrammes du type de la figure 8 nous ont permis de représenter la valeur μ sécant en fonction de $I_2 = \psi/_2$ (fig. 23).

Nous avons constaté que pour un même béton, les diagrammes $\bar{\mu} = f(I_2)$ pour deux essais différents ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) sont pratiquement les mêmes. En revanche, pour chacun des essais les courbes μ_i (fig. 23) sont distinctes de $\bar{\mu}$, ce qui peut provenir soit d'une imprécision de l'essai, soit du fait que le matériau n'est pas isotrope.[1] Or, nous constatons que les courbes extérieures sont précisément celles qui correspondent à des faces chargées identiquement et que, de plus, la dispersion est plus grande lorsque σ_3 est

[1] En effet, dans un corps isotrope les μi sont égaux et par conséquent $\mu i = \bar{\mu}$.

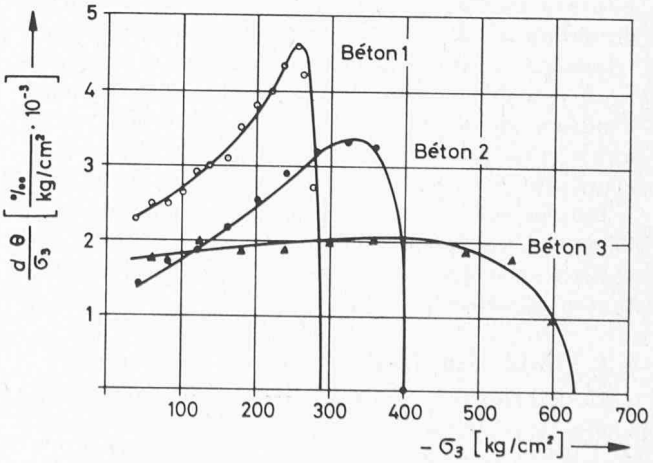

Fig. 22. — Variation de la dilatation cubique pour un essai uniaxial [9].

faible, c'est-à-dire dans la zone où la détermination de ε_i est la moins précise et où le matériau est réputé élastique. Cela nous permet de penser que l'écart observé provient de l'essai et que l'isotropie du matériau est effectivement conservée au-delà des déformations linéaires.

4.3.3 *Définition de* μ *et* k *pour un béton quelconque*

Nous avons montré que le modèle choisi est cohérent avec les résultats des essais, effectués par K. Weigler, sous charge rapide et que les modules μ et k permettent de représenter le comportement du béton. Toutefois, le manque d'essais multiaxiaux systématiques et la diversité des bétons rendent très malaisé l'établissement des lois reliant l'évolution des paramètres μ et k aux caractéristiques physiques d'un béton de composition déterminée.

Par conséquent la détermination numérique rigoureuse du modèle pour un béton donné devra se faire par ajustement avec le comportement d'une éprouvette du même béton sous une charge de même nature. Notons que cette manière de procéder peut nous permettre, dans certains cas, de tenir compte implicitement de phénomènes complexes que l'analyse mathématique ne peut encore restituer de manière explicite (vitesse de charge, par exemple).

Nous avons vu sous 4.3.1 et 4.3.2 qu'il est aisé, à partir d'essais multiaxiaux, de déterminer des courbes moyennes de μ et k dont la définition numérique par un nombre fini de points suffit au traitement à l'ordinateur.

Si nous ne disposons pas de tels essais, l'interprétation des données courantes sera souvent suffisante. Le module de compressibilité k peut être admis constant et déduit des caractéristiques E et ν valables pour le domaine élastique $\left(k = \frac{E}{3\,(1\text{-}2\,\nu)}\right)$. D'autre part, k semble lié de façon étroite à la compacité et à la résistance à la compression, ce qui permet d'obtenir des renseignements complémentaires par comparaison avec des bétons connus[1]. Si nous connaissons k, le module de glissement μ peut alors se calculer à partir du diagramme de déformation sous charge uniaxiale $\left(\mu = \frac{\sigma_1}{3\,(\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon})}, \overline{\varepsilon} = \frac{\sigma_1}{9k}\right)$ avec une précision pratiquement suffisante.

Notons que le calcul de structures importantes et complexes justifierait le fait que soient entrepris des essais systématiques sur les matériaux afin d'obtenir des bases plus rigoureuses pour la méthode de calcul définie sous 5.

4.4 *Confrontation du modèle à un exemple de fluage*

Nous nous sommes limité dans cet article à l'étude des déformations du béton sous charge rapide et à la définition d'un modèle qui permette de décrire ces déformations, mais sans référence directe au comportement physique du béton. Toutefois, nous trouvons une justification de ce modèle dans l'analyse de deux essais de fluage décrits par l'Hermite [5].

Le premier a montré qu'un cylindre creux chargé axialement par un couple de torsion constant pendant une longue durée s'est déformé sans variation de volume, ce qui correspond à un coefficient de Poisson de 0,5. Le deuxième essai portait sur un cylindre plein soumis à une charge axiale. Il s'est raccourci mais son diamètre n'a pas changé au cours du fluage : ce qui implique un coefficient de Poisson nul.

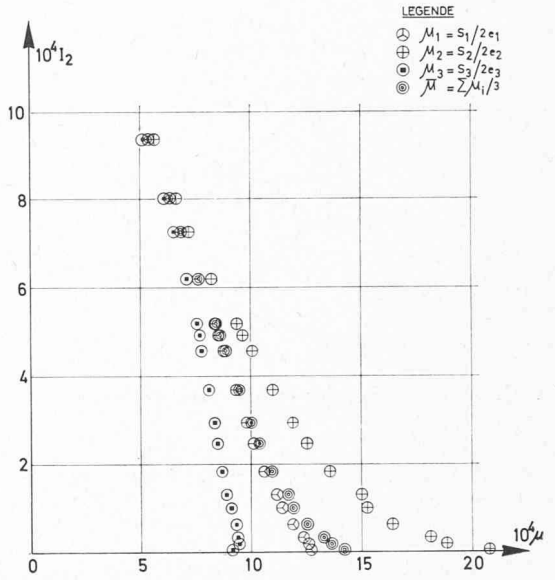

Fig. 23. — Valeur de μ sécant en fonction de I_2 pour un essai biaxial $(\sigma_2/\sigma_3 = 1)$.

Si nous exprimons ces deux états de contrainte en termes de pression moyenne et de déviateur des contraintes, nous constatons que, dans le premier cas, la pression moyenne est nulle alors que dans le second on trouve les deux termes.

Or, nous savons, d'une part, qu'une éprouvette de béton soumise à une pression uniforme pendant une longue durée a tendance à diminuer de volume (par perte d'eau notamment [5]); d'autre part, qu'une éprouvette soumise à un cisaillement se décharge par glissement plastique, ce glissement étant partiellement expliqué par la structure microscopique fibreuse du ciment.

A partir de ces deux phénomènes, il semble possible d'assimiler l'évolution dans le temps, d'une éprouvette chargée, à l'action d'une charge instantanée de même nature agissant avec des caractéristiques μ et k adéquates.

Ainsi, dans le premier des essais décrits plus haut, $\overline{\sigma}$ étant nul la variation de volume $\left(\theta = \frac{\overline{\sigma}}{k}\right)$ serait nulle. Dans le deuxième essai la variation de diamètre comprendrait un terme découlant de la pression moyenne $\left(\overline{\varepsilon} = \frac{\sigma_1}{9k}\right)$ et un terme relatif au déviateur des contraintes $\left(e = -\frac{\sigma_1}{6\,\mu}\right)$. Ces deux termes étant de signes contraires, il est concevable qu'ils s'annulent dans ce cas particulier ou que leur somme soit proche de zéro.

En conclusion, l'analyse de ces deux essais met en défaut le modèle parfaitement plastique[1] et laisse espérer un développement fructueux du modèle décrit ici. De plus elle donne un sens plus concret aux para-

[1] Le choix de k constant n'implique pas que ν soit constant, car ν est fonction de μ. $\left(\nu = \frac{3k - 2\mu}{2(3k + \mu)}\right)$

[1] Les déformations plastiques de ce modèle ont lieu sans variation de volume.

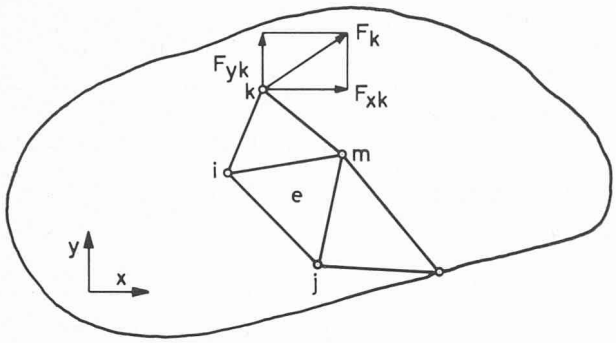

Fig. 24. — Définition des éléments et des nœuds.

mètres μ et k qui se révèlent plus généraux que les coefficients E et ν.

5. Modèle mathématique pour l'étude du comportement non linéaire des structures

Sur les bases décrites dans les chapitres précédents, nous avons élaboré un premier programme de calcul permettant d'analyser des structures bidimensionnelles en béton armé (déformations ou contraintes planes). Nous en décrirons sommairement les principaux aspects.

Rappelons tout d'abord que la déformée réelle d'une structure correspond à une dépense minimale d'énergie. Dans le cas d'une structure élastique à fibre moyenne, l'expression de l'énergie de déformation d'un élément perpendiculaire à la fibre moyenne peut s'exprimer aisément en fonction de la déformée de celle-ci, ce qui nous permet d'obtenir l'énergie de déformation totale par une simple intégration sur la ligne moyenne. Par contre, dans le cas d'une structure sans fibre moyenne ou non élastique, l'expression de l'énergie totale de déformation ne pourra s'obtenir qu'à l'aide d'une intégration complète de l'énergie spécifique sur le volume ou la surface de la structure.

Le but de notre étude est d'analyser des structures de formes complexes ; de plus, les lois de comportement du béton nous ont conduit à définir des caractéristiques élastiques instantanées différentes pour chaque zone de la structure. Nous devons, par conséquent, choisir une méthode d'intégration suffisamment souple pour tenir compte de toutes les particularités locales. Nous avons opté pour la méthode des *éléments finis* basée sur le modèle des déformations. Cette dernière, très générale, se distingue par la possibilité qu'elle a de s'exprimer dans un langage simple et intuitif pour de nombreux cas particuliers.

Nous ne décrirons pas la méthode dans son ensemble, mais nous nous limiterons à rappeler quelques relations principales dans le cas d'une structure bidimensionnelle.

5.1 *Rappel de quelques relations de la méthode des éléments finis* [1]

5.1.1 *Définitions* [1]

Soit une structure plane ou à section plane, formée d'un matériau élastique.

Nous appelons :

[1] Utilisant les notations de O. C. Zienkiewicz.

— *nœuds* un nombre fini de points (i, j, m) de la structure, définissant des *éléments* (e) triangulaires plans (fig. 24) ;

— *force* agissant aux nœuds d'un élément (e) :

$$\{F\}_e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{mx} \\ F_{my} \end{Bmatrix}$$

— *déplacement* des nœuds d'un élément (e) :

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{ix} \\ \delta_{iy} \\ \delta_{jx} \\ \delta_{jy} \\ \delta_{mx} \\ \delta_{my} \end{Bmatrix}$$

Le déplacement $\{f\}$ d'un point quelconque est lié au déplacement des nœuds de l'élément qui le contient par la *fonction de déplacement* $[N]$.

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\}_e$$

Une fonction de déplacement linéaire impose que la déformation spécifique d'un élément (dérivée du déplacement), et partant la contrainte, soient constantes en tous les points de cet élément.[1]

La déformation spécifique de l'élément se déduit du déplacement des nœuds de ce dernier par :

$$\{\varepsilon\}_e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_e = [B]_e \{\delta\}_e$$

et les contraintes sont proportionnelles aux déformations, d'où :

$$\{\sigma\}_e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]_e \{\varepsilon\}_e$$

$[D]$ est appelée *matrice d'élasticité*, et s'explicite sous de nombreuses formes.

$[D]$ est constante pour un modèle élastique :

Des deux relations précédentes, nous tirons :

$$\{\sigma\}_e = [S]_e \{\delta\}_e \quad \text{avec } [S] = [D]\,[B]$$

dite *matrice des contraintes*.

Matrice de rigidité $[K]$

Intuitivement, elle représente le tableau des coefficients d'influence entre les forces et les déplacements aux nœuds de l'élément considéré.

Exemple : $\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ (fig. 25).

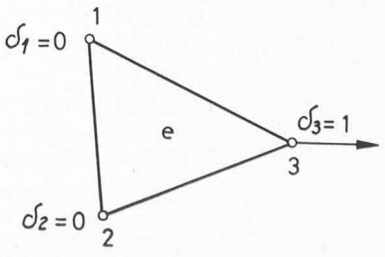

Fig. 25. — Elément dont un nœud est soumis à un déplacement unitaire.

[1] Le choix d'une fonction linéaire par rapport à une fonction plus élaborée implique pour le même résultat un nombre supérieur d'éléments. L'attribution de caractéristiques variables à des éléments voisins exige de petits éléments et justifie dans notre cas le choix d'une fonction linéaire.

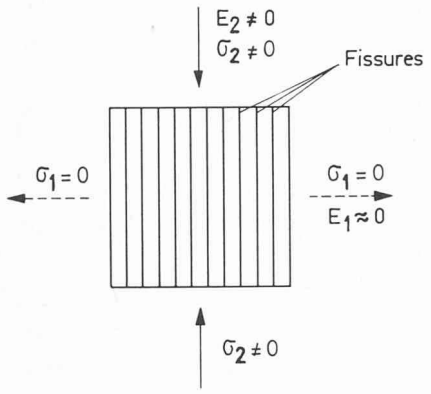

Fig. 26. — Comportement d'un élément fissuré.

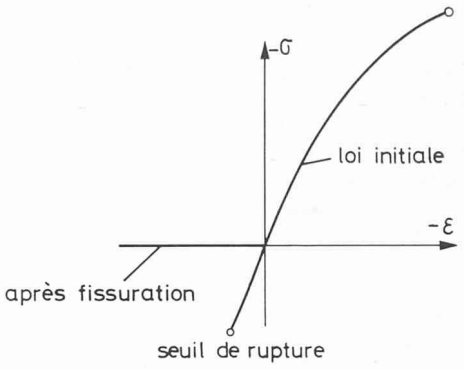

Fig. 27. — Schéma « contrainte-déformation » du béton.

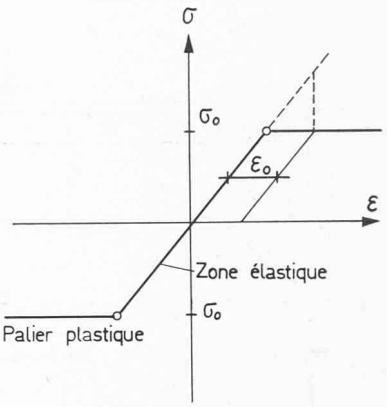

Fig. 28. — Schéma « contrainte-déformation » des armatures.

$\{F\}_e$ due à $\{\delta\}_e = [K]_e \{\delta\}_e$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 = 0 \\ \delta_2 = 0 \\ \delta_3 = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} F_1 = K_{13} \\ F_2 = K_{23} \\ F_3 = K_{33} \end{matrix}$$

5.1.2 *Equation d'équilibre généralisée à l'ensemble des nœuds*

L'une des façons de concevoir la résolution d'un système par éléments finis consiste à exprimer que chacun des nœuds est en équilibre sous les charges suivantes :

$[K]\{\delta\}$: force provoquée par le déplacement des nœuds voisins

$\{F\}_p$: force gravitaire généralisée

$\{F\}_{\varepsilon 0}$: force généralisée correspondant à un état initial de déformation (effet de la température par exemple)

$\{R\}$: charge extérieure généralisée

avec

$[K]$: matrice de rigidité totale qui est la somme ordonnée des matrices de rigidité des éléments

$\{\delta\}$: déplacement de l'ensemble des nœuds

Nous écrirons donc :

$$\{R\} = [K]\{\delta\} + \{F\}_p + \{F\}_{\varepsilon 0}$$

Dans ce système, $\{\delta\}$ est la seule inconnue, aussi pouvons-nous la déterminer en procédant de la manière suivante :

$[K]$ est définie par la géométrie et le matériau de la structure

$\{F\}_p$ et $\{F\}_{\varepsilon 0}$ découlent de l'état initial

$\{R\}$ représente les charges extérieures appliquées à la structure.

Si $\{U\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\varepsilon 0}$

nous avons $\{U\} = [K]\{\delta\}$

Par conséquent $\{\delta\} = [K]^{-1}\{U\}$[1]

Dès que nous connaîtrons la valeur $\{\delta\}$ des déplacements de chaque nœud, nous obtiendrons pour chaque élément la valeur des contraintes, $\{\sigma\}_e = [S]_e \{\delta\}_e$; le problème sera ainsi résolu.

5.2 *Analyse non linéaire et description du programme*

Pratiquement, la différence essentielle entre l'analyse linéaire et non linéaire provient du fait que, dans celle-ci, les caractéristiques élastiques dépendent de l'état de contrainte final (μ, $k = f(\sigma_{ij})$).

L'équation d'équilibre $\{U\} = [K]\{\delta\}$ est conservée avec $[K] = f([D])$ mais la matrice d'élasticité $[D] = f(\mu, k)$ est variable.

Pour résoudre ce nouveau système, relevons deux processus distincts :

a) Calcul par approximations successives en modifiant $[K]$ entre chaque analyse linéaire pour tenir compte de l'évolution du matériau (variation de μ ou fissuration).

b) Calcul par itération sur la structure initiale en introduisant par approximations successives des efforts fictifs, c'est-à-dire en redistribuant les efforts que l'élément considéré ne peut « supporter ».

Au premier stade de notre étude, nous avons utilisé la première méthode. Très proche du phénomène physique, elle permet de mieux comprendre le mode de résistance d'une structure, et converge très rapidement dans de nombreux cas où la structure n'est pas trop bouleversée.[1]

Le programme actuel calcule donc par une série d'itérations une structure soumise à une charge fixe ou qui peut croître par une deuxième série d'itérations. Cette structure comprend un matériau de base tel que le béton, auquel se superpose un réseau d'armatures filiformes. La liaison entre les deux réseaux est réalisée par des nœuds communs. La déformation étant constante sur tout un élément, cela implique qu'il n'y a pas de glissement possible entre les matériaux.

5.2.1 *Comportement du matériau de base*

Nous avons défini le matériau par une surface de rupture et par les coefficients μ et k (cf. 3 et 4). Chaque élément est supposé homogène ; ainsi, un élément fissuré est, dans son ensemble, transformé en un élément

[1] La dimension de la matrice $[K]$ est le produit du nombre de nœuds par leur degré de liberté ; le nombre d'équations du système sera par conséquent fréquemment de quelques centaines, voire quelques milliers.

[1] La deuxième méthode que nous étudions actuellement est plus « abstraite ». Sa convergence, plus sûre, est cependant lente. Toutefois, il sera possible, par une technique de calcul plus élaborée, de rendre cette méthode plus rapide, dans son ensemble, que la première.

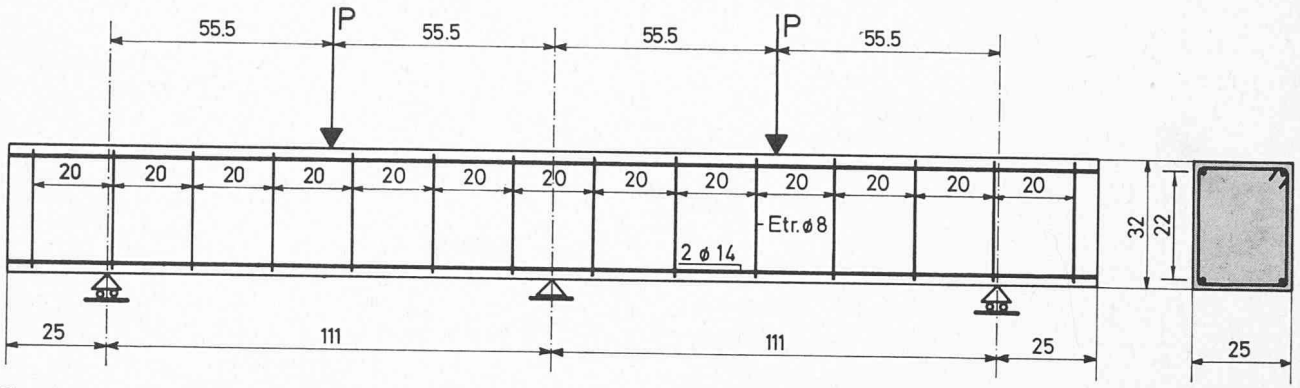

Fig. 29. — Description de la poutre testée.

très fortement orthotrope orienté dans la direction des tractions principales (fig. 26).

Le schéma « contrainte-déformation » pour chaque élément a par conséquent l'allure de la figure 27.

5.2.2 *Eléments filiformes*

Le modèle de déformation des éléments filiformes est défini par une zone élastique et un seuil de plasticité au-delà duquel la contrainte ne peut augmenter. La contrainte est limitée à σ_0 en introduisant, entre deux itérations, une déformation initiale ε_0 indépendante de σ. Des correctifs successifs permettent de fixer la contrainte à σ_0 (fig. 28).

5.2.3 *Conditions aux limites*

La forme de la structure à déformation ou contrainte plane est quelconque. Chaque nœud peut avoir un déplacement imposé (nul par exemple) dans une direction quelconque.

Les charges comportent :

— des charges gravitaires (définies par la densité du matériau de base)
— des charges ponctuelles sur les nœuds
— des déformations initiales de chaque élément (découlant par exemple d'un gradient de température).

5.2.4 *Structure du programme*

L'organigramme général est le suivant :

→ Cycle des itérations successives
  → Cycle sur les éléments du matériau de base
    calcul des matrices des éléments du matériau de base
    $[B]$, $[D]$, $[K]$
  Construction de la matrice de rigidité
  → Cycle sur les éléments filiformes
    calcul des matrices des éléments filiformes
    $[B]$, $[D]$, $[K]$
  Construction de la matrice de rigidité
  Introduction des conditions aux limites et résolution du système linéaire
  → Cycle sur les éléments de base
    calcul des contraintes, des contraintes principales, définition des nouvelles caractéristiques
  → Cycle sur les éléments filiformes
    calcul des contraintes dans les éléments d'acier
Définition de la nouvelle itération.

Les résultats principaux sortent sur cartes perforées et permettent le dessin automatique de la structure et des contraintes principales sur un coordinatographe.[1]

5.2.5 *Application de ce programme*

Ce programme est conçu dans une optique de recherche : il doit nous permettre de contrôler et de faire évoluer les hypothèses précitées, il rend possible l'analyse du comportement de structures complexes à contraintes ou déformations planes en béton armé, mais ne permet pas le calcul de la charge de ruine d'une structure dans laquelle les bouleversements internes sont trop importants dans les phases ultimes de résistance.

Nous travaillons actuellement à étendre ce programme au calcul tridimensionnel, c'est pourquoi nous avons préféré apporter les correctifs nécessaires (capacité, méthode d'itération) au nouveau programme plutôt que d'améliorer le programme bidimensionnel de portée relativement restreinte.

Afin de concrétiser les possibilités pratiques d'application d'une telle méthode de calcul, nous présenterons quelques résultats de l'analyse d'une poutre en béton armé sur trois appuis simples. Soulignons toutefois que le but de cette analyse n'est nullement de calculer une poutre à la rupture dans un but constructif car les méthodes récentes du calcul à la rupture permettent de le faire avec précision et à beaucoup moins de frais. En revanche, cette analyse nous a permis de tester les possibilités et les faiblesses des hypothèses et de la méthode de calcul utilisée.

Comme base de comparaison, nous avons choisi une poutre sur trois appuis, qui a été l'objet d'un essai de F. Leonhardt [10] lors d'une étude sur l'effort tranchant dans les poutres continues. La poutre est définie par la figure 29 ; elle a été soumise à deux charges en travées croissant jusqu'à la ruine. Nous avons estimé, à partir des définitions courantes données par Leonhardt, les paramètres définissant notre modèle.

L'augmentation du nombre de nœuds utilisés pour définir le schéma de calcul a une importance considérable sur le temps nécessaire à l'analyse, par contre il est évident que la précision des calculs est nettement améliorée par le choix d'un réseau aussi dense que possible. En tenant compte de cette contradiction et de la capacité du programme actuel, nous avons choisi le schéma de calcul de la figure 30, qui représente une demi-poutre. Le déplacement horizontal des nœuds sur l'appui central est admis nul, pour tenir compte de la symétrie.

Le coefficient de compressibilité k est admis constant et choisi égal à 130 000 kg/cm² par comparaison avec les résultats obtenus par K. Weigler. Le module de glissement est choisi pour ce cas particulier de la forme $\mu = \mu_i - \beta \ln I_2$ où μ_i et β sont déterminés par ajustement avec la courbe

[1] Pour l'instant, la capacité du programme est limitée à 80 nœuds environ.

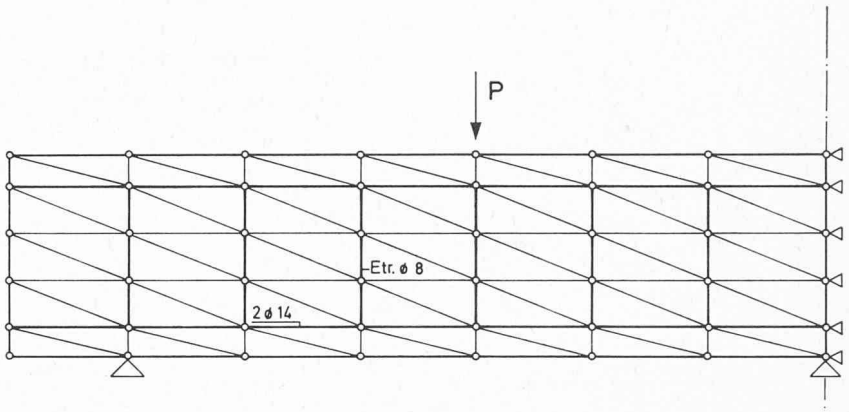

Fig. 30. — Schéma de calcul.

uniaxiale indiquée par Leonhardt, en tenant compte des essais plus complets de Weigler (fig. 31). A partir de la résistance du béton ($\beta_{w_{28}} = -351$ kg/cm²), nous avons admis $\beta_c = 0{,}8\ \beta_{w_{28}} = -280$ kg/cm² et $n = 1{,}25$, $\gamma = -0{,}075$.

Comme nous l'avons vu plus haut, le calcul se fait par approximations successives : l'analyse présentée en comprenait huit pour trois valeurs différentes de la charge.

La figure 32 compare les efforts dans les armatures principales en travée pour une charge croissant jusqu'à 12,5 t. Cette charge correspond à 1,5 fois la charge créant des contraintes égales aux contraintes admissibles suivant les normes SIA 162. Elle est aussi égale à la moitié de la charge de rupture d'essais.

La figure 33 représente la variation des efforts principaux dans le béton et le développement des zones fissurées.

Nous constatons que les résultats du calcul sont tout à fait comparables à ceux que fournit l'essai sur modèle et donnent une idée précise du comportement de la poutre. Nous avons d'autre part remarqué que la tension dans les étriers était supérieure à ce qu'indiquent les essais, mais que la flèche en travée était identique.

Par la suite, nous avons tenté d'augmenter la charge jusqu'à la ruine en réduisant le nombre d'itérations intermédiaires pour limiter le temps de calcul. Nous n'avons pas pu dépasser 70 à 75 % de la charge de rupture obtenue par l'essai, car les résultats devenaient incohérents pour plusieurs raisons dont nous présenterons quelques aspects.

Certaines causes d'erreur, telles que le glissement des armatures ou la modification locale de leur mode de travail (armature principale localement doublement coudée sous l'effort tranchant), proviennent de phénomènes physiques particuliers qu'il est difficile de symboliser. D'autres, par contre, découlent de la technique de calcul ; par exemple, la méthode d'itération choisie (type *a*, 5.2) implique que les éléments fissurés soient admis très fortement orthotropes dans la direction des fissures. Ce schéma rigide conduit dans certains cas à des singularités de la matrice de rigidité interdisant la poursuite du calcul, de plus il ne permet pas de tenir compte, simplement, des compressions auxquelles l'élément résiste lorsque les fissures se referment. Dans le cas de la poutre, la proportion des zones fortement fissurées est relativement importante et l'on observe sur appui une fissuration secondaire d'orientation différente. Ces remarques expliquent dans une large mesure l'impossibilité que nous avons rencontrée de déterminer plus précisément la charge de rupture de la poutre. Il nous semble par conséquent que l'usage de la méthode des forces fictives (processus *b*), 5.2) nous permettra de réduire notablement l'écart entre la charge de rupture réelle et celle calculée, sans remettre en cause les hypothèses de base sur le modèle de déformation du béton, qui s'est révélé fructueux.

Par ailleurs, cet exemple de calcul montre qu'il est déjà possible d'analyser avec précision le comportement de certaines structures à contrainte ou déformation plane et de forme complexe dans un domaine non élastique qui échappait à l'investigation de l'ingénieur. Ainsi l'usage de ce programme pour l'analyse de sections planes de structures massives peut déjà donner des renseignements pratiquement utilisables dans le dimensionnement de tels ouvrages.

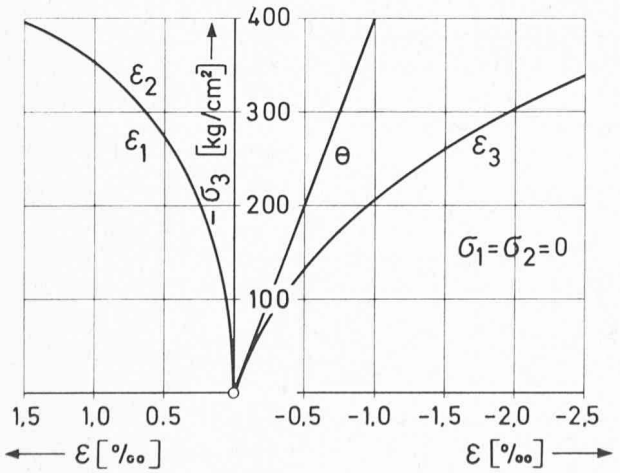

Fig. 31. — Diagramme synthétique « contrainte-déformation » pour une charge uniaxiale.

6. Conclusion

L'analyse des structures massives et complexes en béton armé exige l'élaboration de lois de comportement du béton sous un état de contrainte triaxial.

Le modèle de déformation tridimensionnel « élastique — parfaitement plastique », mis au point grâce au grand essor de la technologie des métaux, restitue dans une large mesure le comportement réel de nombreux métaux.

On constate cependant que ce modèle s'adapte mal au comportement effectif du béton, qui d'une part est un matériau fragile et d'autre part se déforme, sans discontinuité, de façon irréversible dès le début de la sollicitation.

Nous avons donc été conduits à définir tout d'abord un critère de rupture du béton sous charge triaxiale. Comme lieu des points représentatifs des états de contrainte correspondant à la rupture, nous avons choisi, dans le système de référence des contraintes principales, une surface à symétrie de révolution comprenant un cône et un tronc de cône. Ceux-ci se coupent dans le plan passant par les trois points représentatifs de la rupture uniaxiale.

Au stade actuel de notre étude, la surface admise représente une approximation suffisante qui concorde assez bien avec les résultats d'essais biaxiaux et qui, de plus, peut être facilement déterminée pour un béton donné. Le choix d'une surface plus élaborée, comprenant notamment des directrices non circulaires dans les zones de faible pression moyenne, nous semble encore trop incertain au vu du nombre restreint d'essais multiaxiaux systématiques.

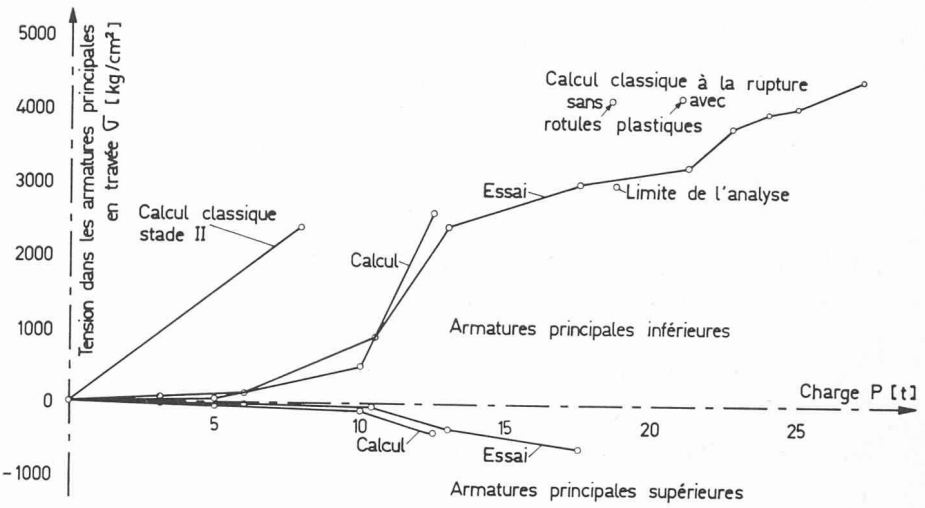

Fig. 32. — Efforts dans les armatures principales en travée.

Nous avons ensuite recherché un modèle de déformation représentatif de l'évolution des caractéristiques d'un béton sous charge rapide croissante. Nous avons opté pour un modèle isotrope non linéaire qui, par opposition aux modèles rhéologiques, ne fait pas intervenir le temps comme paramètre principal. A un instant donné de la sollicitation, nous admettons entre les contraintes et les déformations une relation de type élastique définie par les modules sécants de compressibilité k et de glissement μ, ces modules étant dérivés des coefficients de Lamé. De plus, les modules μ et k sont considérés comme variables en fonction de l'évolution du matériau sous la charge. Ainsi, le coefficient de compressibilité, constant pour certains bétons, est admis variable en fonction de la pression moyenne, ou du premier invariant du tenseur des contraintes. Le coefficient de glissement est exprimé en fonction du deuxième invariant du tenseur des contraintes, représentatif de la distorsion du matériau.

Ces hypothèses sont cohérentes avec les résultats d'essais biaxiaux et il est pratiquement possible, par des essais courants, d'obtenir pour un béton donné une définition numérique des caractéristiques que nous utilisons.

Nous basant sur ce modèle, nous avons élaboré un programme de calcul bidimensionnel, basé sur la méthode des éléments finis. Ce programme permet d'analyser une structure en béton armé, à contrainte ou déformation plane, de forme complexe. Nous avons effectué, à titre de contrôle, l'étude d'une poutre en béton armé sur trois appuis simples, soumise à une charge croissant jusqu'à la moitié de la charge de ruine réelle, et nous avons comparé les résultats à ceux d'essais. Il apparaît que les calculs sont parfaitement confirmés. D'autre part, le programme actuel a permis de suivre le comportement jusqu'à une charge voisine de 70 % de cette charge de ruine, mais l'analyse n'a pu être prolongée valablement au-delà de cette limite. Enfin, l'examen des

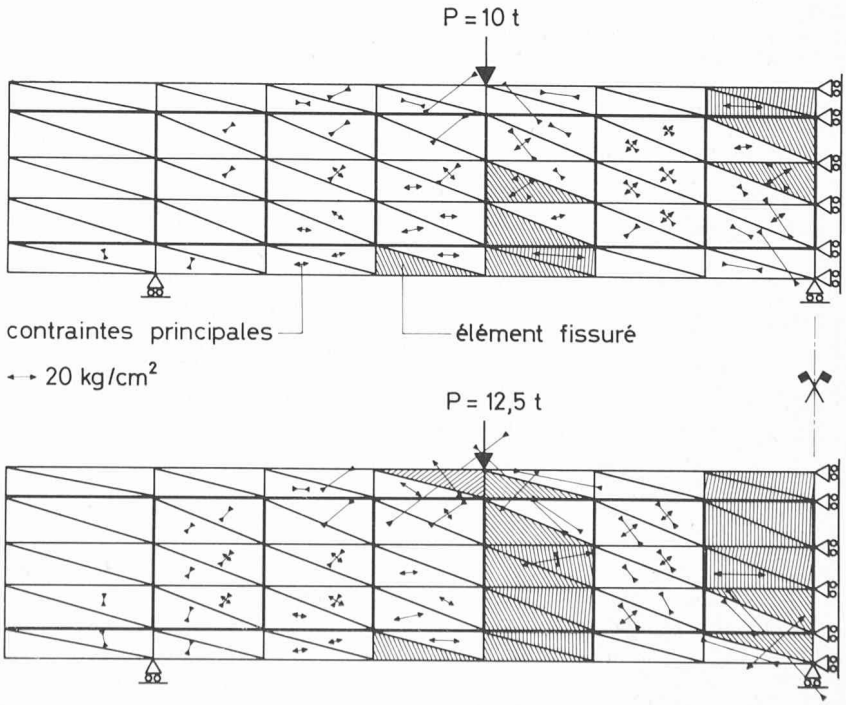

Fig. 33. — Description des contraintes dans le béton.

résultats semble montrer qu'il sera possible d'étendre le domaine d'investigation sur la base des lois de comportement décrites dans cet article.

Le programme ainsi élaboré rend donc possible le calcul de structures bidimensionnelles en béton armé, de forme complexe, dans un domaine non linéaire. Les hypothèses et la technique de calcul choisies rendent possible une amélioration de ce programme pour tenir compte de phénomènes que nous avons, jusqu'ici, négligés par souci de simplification. Nous étudions actuellement l'extension de ce programme au calcul tridimensionnel, afin d'obtenir un outil puissant qui prendra toute sa signification dans l'analyse du comportement non linéaire jusqu'à la rupture de structures complexes.

Annexe : Définitions

Pour faciliter l'expression des relations que nous avons présentées, nous avons utilisé les termes suivants :

1. *Etat de contrainte triaxal*

Soit l'état de contrainte en un point d'un solide défini par trois contraintes normales et six contraintes tangentielles égales deux à deux (fig. 34).

Nous appelons *tenseur des contraintes* la matrice symétrique suivante :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Les termes σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} sont les contraintes normales, les autres sont les contraintes tangentielles. (1)

Nous appelons *tenseur principal* le tenseur des contraintes exprimé dans l'espace des contraintes principales défini par les vecteurs propres du tenseur des contraintes :

$$\sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

La *pression moyenne* est définie par $\overline{\sigma} = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ (3)

et le *déviateur des contraintes* par

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \overline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \overline{\sigma} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \overline{\sigma} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \overline{\sigma} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Le *déviateur principal* sera

$$S_i = \sigma_i - \overline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \overline{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \overline{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \overline{\sigma} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Les contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3 sont les racines de l'équation $-\sigma^3 + I_1\sigma^2 + I_2\sigma + I_3 = 0$, où I_1, I_2, I_3 sont les invariants d'ordre 1, 2, 3 de la transformation (6) (changement de repère)

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= |\ \sigma_{ij}\ | \text{ (déterminant).} \end{aligned} \qquad (7)$$

2. *Etat de déformation triaxial*

Si nous appelons *tenseur des déformations* spécifiques

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

déformation moyenne $\dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \overline{\varepsilon}$ (9)

ou *dilatation cubique* $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \theta$

nous pouvons définir par analogie avec les contraintes :

- le *tenseur principal des déformations* ε_i
- le *déviateur des déformations* $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \overline{\varepsilon}_i$
- le *déviateur principal des déformations* e_i

avec, par exemple, $e_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \overline{\varepsilon} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \overline{\varepsilon} \end{bmatrix}$ (10)

Les contraintes et les déformations ainsi définies, rappelons quelques aspects des lois élastiques qui peuvent les lier.

3. *Définition des caractéristiques élastiques* [2]

Dans l'espace des contraintes principales, chaque contrainte est liée, dans le domaine élastique, à l'ensemble des déformations par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= a_1\varepsilon_2 + b_1\varepsilon_2 + c_1\varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= a_2\varepsilon_2 + b_2\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_3 \\ \sigma_3 &= a_3\varepsilon_1 + b_3\varepsilon_2 + c_3\varepsilon_3 \end{aligned} \qquad (11)$$

Le milieu isotrope est caractérisé par :

$$b_1 = c_1 = a_2 = c_2 = a_3 = b_3 \quad \text{et} \quad a_1 = b_2 = c_3$$

Posons : $b_1 = \lambda \quad a_1 = \lambda + 2\mu$

où λ et μ sont les paramètres de Lamé ;

(11) devient :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= \lambda\varepsilon_1 + (\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_3 \\ \sigma_3 &= \lambda\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_2 + (\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_3 \end{aligned} \qquad (12)$$

Si nous mettons en évidence les termes en λ, nous obtenons les équations suivantes :

$$\sigma_1 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_1.$$

Le système (12) peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\sigma_i = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_i \qquad (13$$

Dans un système d'axes quelconques, (13) se transforme en neuf équations du type suivant :

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \text{ si } i = j \\ \delta_{ij} &= 0 \text{ si } i \neq j \end{aligned} \qquad (14)$$

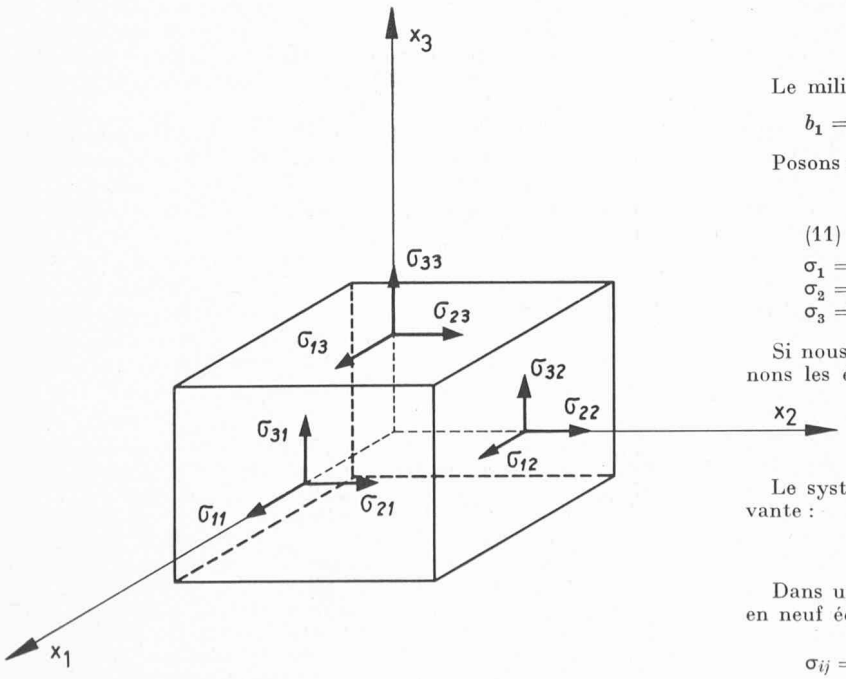

Fig. 34. — Définition des contraintes.

Décomposons chaque membre de (14) en deux parties, en utilisant la relation (4), nous obtenons :

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \overline{\sigma}\,\delta_{ij} = 2\,\mu\,e_{ij} + (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\overline{\varepsilon}\,\delta_{ij} \qquad (15)$$

En faisant la somme des équations relatives à S_{11}, S_{22}, S_{33}, on obtient :

$$\overline{\sigma} = (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\overline{\varepsilon} \quad \underline{\text{où } \overline{\sigma} = 3\,k\,\overline{\varepsilon_{ij}} = k\,\theta}$$

avec $k = \lambda + \frac{2}{3}\,\mu$ appelé *coefficient de compressibilité.*

Cette relation exprime la proportionnalité entre la dilatation cubique et la pression moyenne.

Puis on déduit : $S_{ij} = 2\,\mu\,e_{ij}$ avec μ appelé *coefficient de glissement.*

C'est une relation entre les déviateurs des contraintes et des déformations, qui s'explicite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = 2\,\mu \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

Remarque : Pour une charge uniaxiale, le système (11) donne, avec les conventions de Lamé, le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \lambda\,\theta + 2\,\mu\,\varepsilon_1 \\ 0 &= \lambda\,\theta + 2\,\mu\,\varepsilon_2 \\ 0 &= \lambda\,\theta + 2\,\mu\,\varepsilon_3. \end{aligned}$$

En éliminant $\theta = \frac{\sigma_1}{3\,\lambda + 2\,\mu}$ et en résolvant par rapport à ε_i on obtient :

$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$ avec $E = \frac{\mu\,(3\,\lambda + 2\,\mu)}{\lambda + \mu}$ module d'élasticité de Young

et $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\,\nu\,\varepsilon_1$ avec $\nu = \frac{\lambda}{2\,(\lambda + \mu)}$ coefficient de Poisson.

Nous constatons que le module de Young et le coefficient de Poisson sont mieux adaptés pour traiter des problèmes à une dimension ; ils sont nécessaires d'autre part pour définir des corps anisotropes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] O. C. Zienkiewicz : *The finite Element Method in Structural and Continium Mechanics.* McGraw-Hill, Londres, 1967.

[2] B. Persoz : *Introduction à l'étude de la rhéologie.* Dunod, Paris, 1960.

[3] Takeo Yokobori : *The Strength, Fracture and Fatigue of Materials.* P. Noordhoff, Gröningen, The Netherlands, 1965.

[4] A. Nadai : *Theory of Flow and Fracture of Solids.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, Londres, 1950.

[5] Robert l'Hermite : *Idées actuelles sur la technologie du béton.* La documentation technique du bâtiment et des travaux publics, 6, rue Paul-Valéry, Paris XVI^e, 1955.

[6] R. l'Hermite : *L'expérience et les théories nouvelles en résistance des matériaux.* Dunod, Paris, 1945.

[7] D. J. Hannant : *Failure criteria for Concrete in Compression.* Central Electricity Research Laboratories. Magazine of Concrete Research, vol. 20, No. 64, septembre 1968.

[8] Y. R. Rashid : *Ultimate Strength Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels.* Nuclear Engineering and Design, vol. 7 (1968), No. 4.

[9] Helmut Weigler und Gerhard Becker : *Untersuchungen über das Bruch- und Verformungsverhalten von Beton bei zweiachsiger Beanspruchung.* Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 157, Berlin, 1963.

[10] Fritz Leonardt, René Walther und Walter Dilger : *Schubversuche an Durchlaufträgern.* Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 163, Berlin, 1964.

[11] Horst Reimann : *Kritische Spannungszustände des Betons bei mehrachsiger, ruhender Kurzzeitbelastung.* Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 175, Berlin, 1965.

[12] R. l'Hermite : *Les déformations du béton.* Cahiers de la Recherche, n° 12. Eyrolles, Paris, 1961.

[13] Formation universitaire continue des ingénieurs et des architectes : *Connaissance de la matière et technologie moderne.* Commission romande SIA-EPUL-A^{3}E^{2}PL-GEP, mai-juin 1968.

[14] S. Valliappan : *Non Linear Stress Analysis of two dimensional Problems with Special Reference to Rock and Soil Mechanics.* Civil Engineering Report No. C/Ph/4/68. University of Wales, Swansea.

BIBLIOGRAPHIE

L'opinion. Techniques d'enquêtes par sondage, par *J. Antoine*, ancien élève de l'Ecole polytechnique, directeur à la SEMA. Paris, Dunod, 1969. — Un volume 15×22 cm, 300 pages, 10 figures et 6 organigrammes. Prix : broché, 28 F.

Les phénomènes d'opinion prennent une importance croissante tant dans la vie politique que dans l'économie. Le développement prodigieux des « mass-media » est, pour une bonne part, responsable de cette évolution qui concerne aussi bien les décisions politiques des gouvernants que les décisions économiques et commerciales des entreprises. Les données de fait de la concurrence entre les nations, les entreprises, les groupes sociaux évoluent également rapidement, avec l'ouverture des frontières, les innovations techniques et l'élévation des revenus.

Tout responsable a besoin d'instruments lui permettant de situer son action — contexte préalable et résultat — dans un univers en changement rapide et profond. La technique moderne des enquêtes par sondage fournit une réponse à cette nécessité, tant sur le plan des faits et comportements qu'au niveau plus difficile des opinions, des attitudes et des motivations. Ce livre aborde les applications des enquêtes par sondage, dont il dresse le panorama actuel, illustré par de très nombreux exemples vécus, puisés notamment dans l'expérience de la SOFRES et de la SEMA.

Une première partie traite des enquêtes d'intérêt collectif sur l'économie et la société et vise particulièrement l'éclairage des décisions politiques et économiques au niveau de la nation, de la région et de la ville.

La seconde, qui concerne plus spécialement les problèmes commerciaux des entreprises, présente les différents thèmes d'enquêtes par sondage, allant de l'étude de la clientèle à la publicité, en passant par la distribution, les tests de produits, etc.

Enfin, les conditions d'exécution et de validité des enquêtes par sondage sont étudiées, en insistant sur les points qui doivent faire l'objet du dialogue entre le demandeur d'enquête et le spécialiste de l'exécution des sondages.

Cadres de l'administration, hommes politiques, professionnels du marketing, de la publicité, de la presse, étudiants en sciences économiques, sociologie, politique, commerce, responsables de syndicats, mouvements et associations, tireront profit de ce livre, dont la lecture n'exige aucune formation mathématique préalable.

Sommaire :

Les enquêtes sur les problèmes d'intérêt collectif. Enquêtes d'intérêt national. Enquêtes sur le développement urbain et agricole. Enquêtes d'opinion publique. — *Les enquêtes de recherche commerciale.* Tests préliminaires aux lancements de produits. Enquêtes de marché auprès du grand public. Analyse de la distribution des produits. Enquêtes concernant les marchés industriels. L'audience des moyens d'information de masse et des supports de publicité. La mesure de l'efficacité de la publicité. Enquêtes et stratégie commerciale. — *Les conditions de réalisation des enquêtes par sondage.* Histoire d'une enquête. L'échantillonnage. Le questionnaire. Les enquêteurs. Les machines.