Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 95 (1969)

Heft: 25

Artikel: Dispositif pour le relevé de champs laplaciens et poissoniens par méthode rhéographique

Autor: Chatelain, Jean / Hamburger, Erna

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-70257

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

95e année Lausanne, 13 décembre 1969 N° 25

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL
de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (SVIA)
de la Section genevoise de la SIA
de l'Association des anciens élèves de l'EPFL (Ecole polytechnique fédérale de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'EPFZ (Ecole polytechnique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE
Président: E. Martin, arch. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; M. Mozer, arch.; J.-C. Ott, ing.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; M. Chevalier, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.; M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION
de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; M. Cosandey, ing.; A. Métraux, ing.; A. Rivoire, arch.; J.-P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, 1000 Lausanne

RÉDACTION
F. Vermeille, rédacteur en chef; E. Schnitzler, ingénieur, et M. Bevilacqua, architecte, rédacteurs
Rédaction et Editions de la S.A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, 1000 Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 46.—	Etranger	Fr. 50.—
Sociétaires	»	» 38.—	»	» 46.—
Prix du numéro . . .	»	» 2.30	»	» 2.50

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande » N° 10 - 5775, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29, 1000 Lausanne

ANNONCES
Tarif des annonces:
1/1 page . . . . . Fr. 495.—
1/2 » . . . . . » 260.—
1/4 » . . . . . » 132.—
1/8 » . . . . . » 68.—
Adresse: Annonces Suisses S.A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26, 1000 Lausanne et succursales.

SOMMAIRE

Dispositif pour le relevé de champs laplaciens et poissoniens par méthode rhéographique, par Jean Chatelain et Erna Hamburger, professeurs à l'EPF-Lausanne
Sur la représentation plane de structures hyperstatiques, par Auguste Ansermet, ing., professeur.
Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, département de génie civil : 3e cycle d'études.
Société suisse des ingénieurs et des architectes.
Carnet des concours. — Informations diverses. — Documentation générale. — Documentation du bâtiment.

DISPOSITIF POUR LE RELEVÉ DE CHAMPS LAPLACIENS ET POISSONIENS PAR MÉTHODE RHÉOGRAPHIQUE

par JEAN CHATELAIN et ERNA HAMBURGER, professeurs à l'EPF-Lausanne [1]

1. Introduction

Le développement remarquable de la construction des machines électriques et de l'appareillage exige de la part des constructeurs une connaissance approfondie de la répartition des champs magnétiques, électriques et thermiques.

Les équations de la physique théorique permettent une formulation très concise des phénomènes, mais l'étude détaillée d'un cas concret par voie mathématique devient vite inextricable car la géométrie d'un objet quelconque présente une telle complexité que sa traduction mathématique s'avère excessivement malaisée. La transformation conforme, si elle apporte une solution élégante, reste malgré tout d'un usage délicat.

Cette constatation justifie la recherche d'autres méthodes, certes moins rigoureuses, mais de loin plus rapides et plus souples à l'emploi, à savoir :

— les méthodes graphiques (tracés de Lehmann), peu précises, souvent très longues et fastidieuses ;
— les méthodes analogiques dont la précision dépend essentiellement du soin apporté à l'expérimentation.

Afin de bien saisir les fondements théoriques et le domaine de validité de ces dernières, il convient de rappeler les propriétés des champs.

2. Propriétés des champs dans un milieu continu

L'étude porte sur des états considérés comme stationnaires ou quasi stationnaires.

[1] Le présent travail est le résultat d'une étroite collaboration entre les chaires de machines électriques et d'électrométrie. La première ayant manifesté le désir d'expérimenter cette méthode et ayant fourni les exemples, la seconde ayant conçu et réalisé l'appareil. Les principaux collaborateurs sont :

Principe de travail au papier graphité :	M. Lüdecke, travail de diplôme, 1962
Exemples de spectres magnétiques et thermiques :	MM. Lévy, Liechti et Richard, ingénieurs diplômés
Détecteur de zéro à modulateur :	M. A. Rosselet, travail de diplôme, 1962
Mise au point et perfectionnement de l'appareil :	MM. S. Franzini, ingénieur diplômé et G. Perrin, ing. techn.

2.1 *Champ électrique*

Soit $\vec{E}$ = champ électrique (V/m)
V = potentiel scalaire électrique (V)
ρ = densité volumique de charges (C/m³)
ε = permettivité (F/m)

Dans un milieu isotrope, le champ électrique satisfait la relation suivante :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V \qquad (1)$$

Il en découle que :

$$\vec{\text{rot}}\, \vec{E} = 0 \qquad (2)$$

car $\vec{\text{rot}}\, \vec{\text{grad}}\, V = 0$.

D'autre part, le théorème de Gauss donne :

$$\text{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (3)$$

On obtient finalement :

$$\nabla^2 V = \text{div}\, \vec{\text{grad}}\, V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (4) = \text{équation de Poisson}$$

En l'absence de charges ($\rho = 0$) :

$$\nabla^2 V = \text{div}\, \vec{\text{grad}}\, V = 0 \quad (5) = \text{équation de Laplace}$$

Si l'on explicite ces deux relations pour un domaine bidimensionnel $x\,0\,y$ $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0\right)$ on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (6) = \text{champ poissonien}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad (7) = \text{champ laplacien}}$$

2.2 *Champ magnétique*

Soit : $\vec{H}$ = champ magnétique (A/m)
$\vec{B}$ = induction magnétique (Vs/m² = T)
V_m = potentiel scalaire magnétique (A)
$\vec{A}$ = potentiel-vecteur magnétique (Vs/m)
μ = perméabilité magnétique (H/m)
$\vec{J}$ = densité de courant (A/m²)

Les équations de Maxwell introduisent les phénomènes magnétiques :

$$\vec{\text{rot}}\, \vec{H} = \vec{J} \qquad (8)$$

$$\text{div}\, \vec{B} = 0 \qquad (9)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad (10)$$

L'opérateur (div $\vec{\text{rot}}$) étant nul, on en déduit que :

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}}\, \vec{A} \qquad (11)$$

L'opérateur ($\vec{\text{rot}}\, \vec{\text{grad}}$) étant nul, il s'en suit que le potentiel-vecteur n'est défini qu'à un gradient près. On peut donc lui imposer une condition supplémentaire qui sera :

$$\text{div}\, \vec{A} = 0 \qquad (12)$$

En éliminant $\vec{B}$, il vient :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\, \vec{\text{rot}}\, \vec{A}$$

$$\vec{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu}\, \vec{\text{rot}}\, \vec{A}\right) = \vec{J}$$

$$\frac{1}{\mu}\, \vec{\text{rot}}\, \vec{\text{rot}}\, \vec{A} + \vec{\text{grad}}\, \frac{1}{\mu} \times \vec{\text{rot}}\, \vec{A} = \vec{J}$$

or : $\frac{1}{\mu}\, \vec{\text{rot}}\, \vec{\text{rot}}\, \vec{A} = \frac{1}{\mu}\, (\vec{\text{grad}}\, \text{div}\, \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}) = -\frac{\nabla^2 \vec{A}}{\mu}$ (voir (12))

Si la perméabilité est constante dans le domaine considéré, on trouve finalement :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu\, \vec{J} \qquad (13) = \text{équation de Poisson}}$$

Lorsque le domaine est dépourvu de sources de conrant ($\vec{J} = 0$), l'expression devient :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = 0 \qquad (14) = \text{équation de Laplace}}$$

Dans ce dernier cas, à μ = cte, en appliquant (8), on a :

$$\vec{\text{rot}}\, \vec{H} = 0$$

Ceci est la condition pour que $\vec{H}$ dérive d'un potentiel scalaire magnétique V_m.

$$\vec{H} = -\vec{\text{grad}}\, V_m \qquad (15)$$

Il s'ensuit selon (9) que :

$$\nabla^2 V_m = 0 \qquad (16) = \text{équation de Laplace}$$

En explicitant cette dernière expression dans un domaine bidimensionnel, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 V_m}{\partial \partial x^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial y^2} = 0 \qquad (17) = \text{champ laplacien}}$$

Reprenons les expressions (13) et (14) et appliquons-les, en les explicitant, à un domaine défini comme suit :

— bidimensionnel $x\,0\,y$ avec μ = cte

— $\vec{J}$ orienté perpendiculairement au plan $x\,0\,y$ selon 0_x

$\vec{J} = \vec{k}\, J_z = \vec{k}\, J$ $\qquad$ $\vec{k}$ = vecteur unitaire

On obtient dans ces conditions :

$$\vec{k} \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}\right] = -\vec{k} \mu J$$

$\vec{A} = \vec{k} A_z\, (x, y) = \vec{k} A\, (x, y)$ avec $\vec{A}$ orienté selon 0_z

Finalement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu\, J \qquad (18) = \text{champ poissonien}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \qquad (19) = \text{champ laplacien}}$$

Ces relations sont extrêmement intéressantes, car elles justifient l'analogie entre la répartition d'un champ magnétique dérivant d'un potentiel vecteur et celle d'un champ électrique dérivant d'un potentiel scalaire. L'hypothèse selon laquelle $\vec{J}$ ne possède qu'une composante selon 0_z correspond à l'exécution pratique des machines électriques dans lesquelles les conducteurs sont disposés parallèlement à l'axe de rotation.

La relation peut d'ailleurs être étendue à un domaine tridimensionnel, pour autant que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} = \vec{J}$ ne possède qu'une composante selon 0_z, variable avec z :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\mu J(z) \qquad (20)$$

2.3 *Champ thermique*

Soit : $\vec{\varphi}$ = flux thermique surfacique (W/m²)
T = température (°K)
$\dot{q}$ = flux thermique volumique (W/m³)
λ = conductivité thermique (W/m°K)

Les phénomènes thermiques sont régis par les lois suivantes :

$$\vec{\theta} = -\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T \qquad (21)$$

$$\text{div}\, \theta = \dot{q} \qquad (22)$$

$\vec{\theta}$ dérive d'un potentiel scalaire qui est la température T. En éliminant $\vec{\theta}$, on obtient :

$$\text{div}\,(-\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T) = -\dot{q}$$

$$\lambda\, \text{div}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T = \text{grad}\, \lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T = -q$$

$$\lambda\, \Delta T + \text{grad}\, \lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T = -\dot{q}$$

Si λ = cte dans le domaine considéré, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, \lambda = 0$$

d'où :

$$\Delta T = -\frac{q}{\lambda} \qquad (23) = \text{équation de Poisson}$$

Si le domaine ne renferme aucune source de chaleur ($\dot{q} = 0$) l'expression devient :

$$\Delta T = 0 \qquad (24) = \text{équation de Laplace}$$

Les relations précédentes explicitées dans un domaine bidimensionnel deviennent :

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{\dot{q}}{\lambda}$	(25) = champ poissonien
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$	(26) = champ laplacien

L'identité formelle des équations de champs thermiques et électriques justifie de nouveau l'analogie.

2.4 *Conclusions*

Les développements précédents permettent de constater que les répartitions des champs magnétique et thermique obéissent à des relations identiques à celles du champ électrique. L'analogie est valable aussi bien pour des champs poissoniens que laplaciens.

En ce qui concerne les champs magnétiques, on étudie le plus souvent la répartition du potentiel-vecteur, car elle fournit directement les lignes de champ définies comme étant les équipotentielles-vecteurs, alors que les équipotentielles scalaires correspondent au tracé orthogonal dans un milieu laplacien.

En milieu poissonien, les lignes de champ sont toujours définies. Il est possible de tracer le réseau orthogonal dont les lignes convergent vers un « point d'indifférence » correspondant au maximum du potentiel-vecteur. Moyennant certaines hypothèses, il est aussi possible d'appliquer l'analogie à des problèmes d'écoulement de fluide.

3. Etude de la répartition d'un champ par voie analogique

3.1 *Dispositifs utilisés*

Compte tenu de l'identité d'expression des champs électrique, magnétique et thermique, la solution expérimentale offerte à l'ingénieur consiste à mesurer sur un modèle convenablement alimenté la répartition du potentiel électrique. La mesure est en effet commode à effectuer et, moyennant certaines précautions, très précise, contrairement aux mesures de grandeurs magnétique ou thermique.

La réalisation du modèle dépend essentiellement du milieu conducteur adopté qui peut être liquide ou solide. Dans le premier type (cuve électrolytique), les électrodes sont métalliques et conformes à la géométrie de deux surfaces équipotentielles supposées connues du dispositif à étudier (par ex., deux pôles). Pour que ces électrodes représentent effectivement deux équipotentielles, il est indispensable que le matériau qui les constitue soit beaucoup plus conducteur que le liquide utilisé pour le bain. La cuve électrolytique se prête à des études tridimensionnelles de champs laplaciens.

Lorsque la nature du système permet de ramener la répartition tridimensionnelle à un problème plan, il est judicieux d'abandonner la cuve électrolytique d'emploi malcommode et facilement entaché d'erreurs (polarisation des électrodes, mauvais réglage de niveau, effets dus à la capillarité, etc.) au profit d'un milieu conducteur solide. Le « rhéographe » décrit ultérieurement a été développé plus spécialement pour l'emploi de papier graphité. Les électrodes sont peintes au moyen d'un vernis conducteur présentant une résistivité négligeable vis-à-vis de celle du papier utilisé. Des indications précises sur la réalisation des modèles figurent sous paragraphe 5.2 et dans les exemples du paragraphe 7.

3.2 *Relevé des équipotentielles* (principe)

Quel que soit le modèle adopté, on peut représenter l'appareillage nécessaire suivant le schéma de principe de la figure 1.

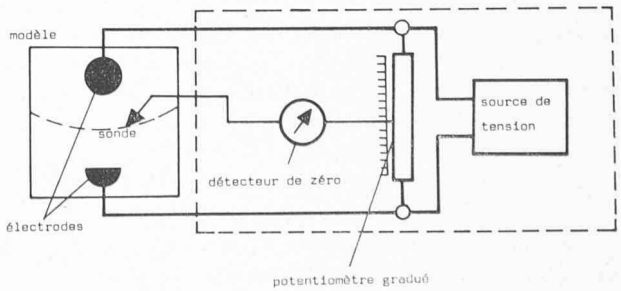

Fig. 1. — Schéma de principe.

La source de tension alimente le modèle et un potentiomètre gradué linéairement. Un détecteur de zéro est monté en pont entre le curseur du potentiomètre et une sonde pouvant se déplacer sur le modèle.

L'indication du détecteur est nulle lorsque la sonde se trouve sur l'équipotentielle correspondant au potentiel du curseur.

Cette équipotentielle peut ainsi être déterminée point par point, en recherchant sur le modèle les positions de la sonde correspondant aux « zéros » du détecteur.

Pour connaître le potentiel, il suffit de graduer le potentiomètre en prenant comme référence une de ses bornes.

4. Rhéographe

La qualité des relevés obtenus par la méthode précédente dépend essentiellement :

— de la conformité du modèle au système ;
— de la précision de tous les éléments intervenant dans le montage ;
— de la sensibilité du détecteur.

Par ailleurs, il faut éviter que des perturbations extérieures induisent des tensions parasites et donnent ainsi lieu à de faux « zéros ».

C'est dans le but de mettre à la disposition des intéressés un appareil répondant à ces exigences que l'IE-EPFL a développé et réalisé le *Rhéographe* (fig. 2).

Cet appareil comprend tous les éléments de principe encadrés en pointillé sur la figure 1. Leur réalisation a été dictée par les considérations exposées par la suite.

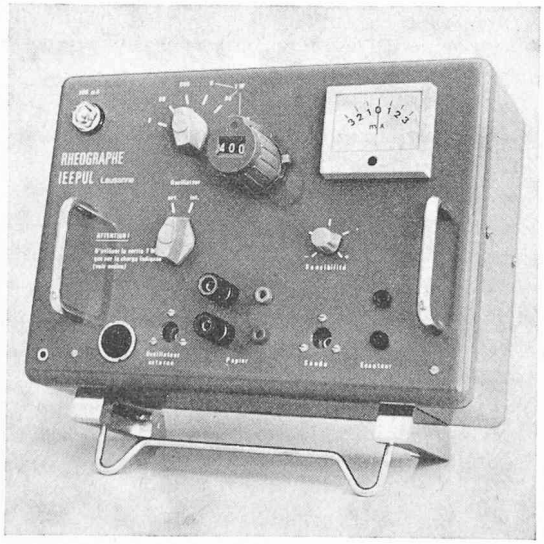

Fig. 2. — Rhéographe.

4.1 *Source de tension*

Le choix d'une source de tension continue est à déconseiller pour différents motifs. Elle provoquerait en effet l'électrolyse du liquide conducteur lors de l'utilisation d'une cuve rhéolytique, et la polarisation des électrodes fausserait entièrement les relevés. De plus, elle impliquerait le choix d'un détecteur de zéro à courant continu ; la sensibilité de celui-ci, dont dépend le *pouvoir séparateur* de l'appareillage, devrait être limitée afin de minimiser les phénomènes de dérive. D'autre part, les contacts pourraient faire apparaître des tensions dues à des f.é.m. thermo-électriques ou chimiques. L'utilisation d'une source alternative B.F. permet de s'affranchir de ces restrictions, et rend la manipulation beaucoup moins sensible aux phénomènes parasites. Elle présente en outre l'avantage de rendre possible la détection du zéro par voie acoustique, ce qui permet à l'opérateur de concentrer son attention sur le modèle.

Le choix de la fréquence est dicté par différentes considérations d'ordre pratique. On évite l'emploi du 50 Hz, source éventuelle de tensions induites non négligeables.

On choisit de préférence une fréquence suffisamment élevée, dans le but de simplifier la réalisation de l'amplificateur de détecteur et des organes de couplage (transformateurs de liaison à encombrement réduit) et de travailler dans un domaine de bonne sensibilité de l'oreille lors de la détection acoustique.

Néanmoins, cette fréquence doit être suffisamment basse pour que les effets des capacités et inductances parasites du modèle et des fils de connexion soient négligeables (voir figure 3).

Pour ces raisons, la fréquence de la source utilisée dans le *Rhéographe* a été choisie autour de 400 Hz.

Il est à noter qu'une variation dans le temps de cette fréquence ne compromet nullement la précision de la méthode.

4.2 *Détecteur*

Le détecteur utilisé est du type à modulateur en anneau (fig. 4).

Le choix d'un tel dispositif est basé sur le fait qu'il permet de détecter uniquement la composante du signal *en phase* avec la tension appliquée aux bornes du modèle, réduisant ainsi l'influence des capacités parasites indiquées sur la figure 3.

Ces capacités empêcheraient en effet l'obtention d'un zéro bien net, par un détecteur autre que celui mentionné, à moins qu'elles ne soient inversement proportionnelles aux d.d.p. appliquées à leurs bornes (c'est-à-dire que les impédances équivalentes Z_1 et Z_2 aient le même argument).

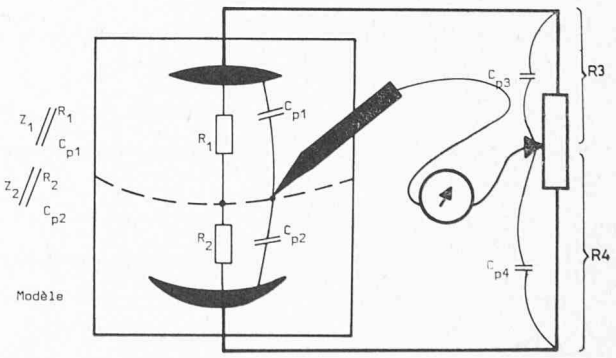

Fig. 3. — Mise en évidence des éléments capacitifs.

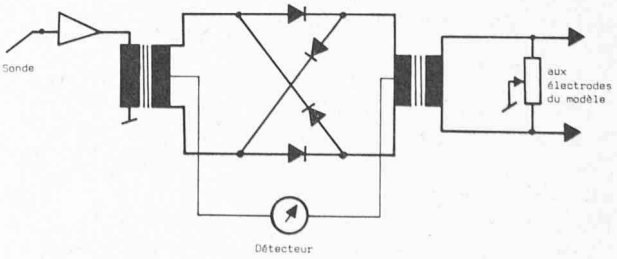

Fig. 4. — Détecteur à modulateur en anneau.

La forte impédance d'entrée de l'amplificateur et son gain élevé garantissent une grande sensibilité et une influence négligeable du dispositif de mesure sur le modèle.

4.3 *Potentiomètre*

Le potentiomètre de référence utilisé est du type multitours. Cet élément de précision est garanti linéaire à moins de 2 ‰ d'erreur, et, étant donné l'ordre de grandeur des imprécisions imputables aux autres éléments, ce chiffre représente la classe de l'ensemble de l'appareil.

4.4 *Adaptation de la charge*

Afin de préserver une bonne sensibilité du détecteur, il est nécessaire que la source de tension permette d'appliquer une tension suffisamment élevée aux bornes de la charge. Or, la valeur de celle-ci peut varier dans des limites assez larges, en fonction de facteurs tels que la géométrie du modèle, la résistivité du milieu conducteur, et la présence éventuelle d'un diviseur potentiométrique externe dont on verra l'utilité par la suite. De plus, les cas extrêmes de court-circuit par contact accidentel des fils de connexion du modèle et de circuit ouvert sont à prévoir et ne doivent pas entraîner la dégradation permanente des performances de l'appareil.

Ces impératifs ont conduit au choix de la solution suivante :

L'appareil comporte un sélecteur à six positions. Sur les trois premières, les bornes de sortie peuvent être reliées à une charge quelconque, pouvant varier du court-circuit au circuit ouvert, sans que le signal ne subisse de distorsions. La puissance absorbée par la charge extérieure est alors maximale (env. 400 mW) lorsque cette dernière correspond à la valeur nominale affichée par le sélecteur (8-80-800 ohms) ; on a dans ces conditions une adaptation optimale entre générateur et utilisateur. Le transfert d'énergie entre ces deux éléments passe en effet par un maximum lorsque leurs résistances internes sont identiques.

Sur les trois dernières positions, les bornes de sortie peuvent être reliées à une charge *inférieure* ou *égale* à la valeur nominale (8-80-800 ohms), la puissance débitée étant toujours maximum — environ 1 W — dans cette dernière éventualité. Si la charge est *supérieure* à la valeur nominale, le signal de sortie subira un écrêtage dû à la saturation de l'étage final de la source, qui ne se comporte *plus* comme un élément linéaire. Il n'est pas conseillé d'utiliser l'appareil dans ces conditions, bien que des essais effectués à l'aide d'un générateur externe de signaux non sinusoïdaux aient fait constater que l'erreur due aux harmoniques n'est que du même ordre de grandeur que celle due à la non-linéarité du potentiomètre et à l'épaisseur de la sonde.

L'utilisation des positions «1 W» (8-80-800 ohms) est généralement indispensable lors de la mise en parallèle avec le modèle d'un diviseur de tension potentiométrique pour le relevé de champs poissoniens ou chaque fois qu'on doit alimenter un modèle consommant une puissance appréciable. Pour l'estimation de la charge, voir le paragraphe 5.6.

4.5 *Accessoires*

La *sonde* fournie avec chaque appareil est équipée d'une pointe sèche se prêtant bien au «marquage» point par point du papier graphité ; cette pointe peut être remplacée par une cartouche métallique de stylo à bille, éventuellement de couleur, afin de faciliter la lecture et l'interprétation du tracé.

Lors de l'utilisation du *Rhéographe* avec une cuve rhéolytique, l'entrée de l'appareil est reliée directement à la sonde capillaire du chariot de la cuve.

Des diviseurs de tension potentiométriques peuvent être livrés sur demande. Ils permettent d'imposer le potentiel de vingt points distincts du modèle, dont dix à des potentiels fixes et dix variables de façon continue, rendant ainsi possible l'étude de champs poissoniens ou de phénomènes de saturation.

5. Précautions dans l'emploi

Les utilisateurs du *Rhéographe* doivent se conformer aux règles suivantes :

5.1 *Electrodes*

Il est indispensable que la résistance interne de l'électrode soit négligeable vis-à-vis de celle présentée par le milieu conducteur adopté (papier graphité ou bain électrolytique). Si cette condition n'est pas remplie, on commet inévitablement une erreur grossière, la surface de l'électrode n'étant *pas* une équipotentielle.

En règle générale, il est judicieux de diminuer cette résistance interne en doublant la peinture conductrice (argent colloïdal) par une feuille en aluminium. L'alimentation des électrodes sera même, cas échéant, faite en plusieurs points.

5.2 *Papier*

Il existe plusieurs qualités de papier graphité. Elles sont caractérisées par leur résistance surfacique spécifique. Le choix d'une qualité particulière dépend de plusieurs facteurs, entre autres :

— la géométrie du modèle ;
— l'utilisation éventuelle d'un diviseur de tension potentiométrique.

Ces éléments, généralement connus à l'avance, permettent de déterminer le type de papier le mieux approprié à la réalisation d'un modèle de résistance compatible avec les caractéristiques de l'appareil.

On pourra, à cet effet, procéder de la manière suivante :

a) faire une esquisse du modèle ;
b) partager la surface comprise entre les deux équipotentielles connues (électrodes) en carrés curvilignes s'appuyant sur le contour de ces électrodes (voir fig. 5) ;
c) calculer la résistance résultante en considérant que chaque carré est remplacé par une résistance de valeur égale à la résistance surfacique spécifique du papier.

La valeur ainsi obtenue permettra :

— soit de déterminer de façon approximative la résistance du modèle pour une qualité de papier donnée (ρ connu) ;
— soit de choisir cette qualité de telle sorte que le modèle présente une résistance la plus proche possible de celle désirée.

Il faudra, d'autre part, s'assurer que l'anisotropie du papier ne constitue pas une source d'erreurs trop importante.

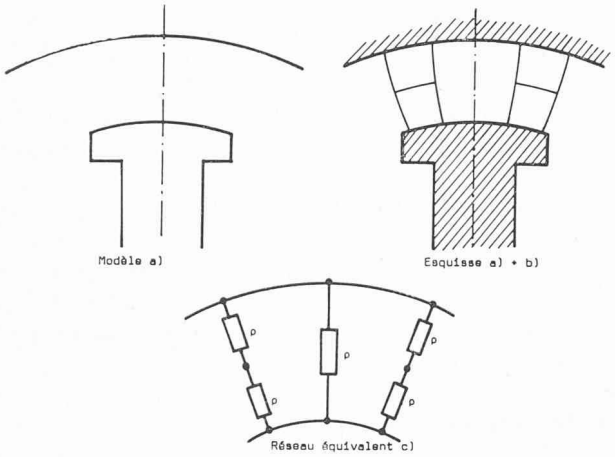

Fig. 5. — Estimation des résistances d'un modèle.

La poudre de graphite se dépose en effet de façon préférentielle dans la direction de laminage du support. On pourra, si besoin est, « corriger » le tracé pour une déformation linéaire proportionnelle à la racine carrée du rapport des résistances spécifiques suivant la direction privilégiée et l'axe orthogonal à celle-ci.

5.3 *Manipulation*

Au cours d'une mesure, l'opérateur ne doit jamais toucher le modèle. Il risquerait en effet de souiller la surface du papier, ou de fausser la mesure en modifiant la répartition du champ s'il est en même temps en contact avec la pointe de la sonde ou avec la carcasse de l'appareil. Dans ce dernier cas, il risquerait même de ressentir une sensation désagréable, car une tension d'une vingtaine de volts peut apparaître entre une des électrodes du modèle et la masse.

6. Conclusions

Les méthodes expérimentales d'analyse de champs basées sur une analogie électrique, se révèlent très efficaces lors de l'étude de problèmes complexes.

Leur application est rendue aisée par la réalisation d'un appareil compact comprenant tous les éléments nécessaires à ce genre de mesures.

7. Exemples

7.1 *Application à la machine synchrone à pôles saillants*

Hypothèses :

— On considère la machine comme une portion d'une machine infiniment longue. En faisant ainsi abstraction des phénomènes d'extrémité, on se ramène à un problème bidimensionnel en considérant la répartition du champ magnétique dans un plan perpendiculaire à l'axe de la machine.

— La perméabilité du fer est supposée infinie, ce qui permet de localiser l'étude à l'entrefer de la machine.

— On admet que les axes polaires et interpolaires sont des axes de symétrie de la machine (ce qui exclut donc les nombres d'encoches fractionnaires par pôle et phase au stator). Il est alors possible de ne considérer qu'un demi-pas polaire.

On a déterminé trois tracés de champ caractéristiques de la machine synchrone, à savoir :

— la marche à vide (fig. 6) ;
— la réaction d'induit directe (fig. 7) ;
— la réaction d'induit transverse (fig. 8).

7.1.1 *Marche à vide* (fig. 6)

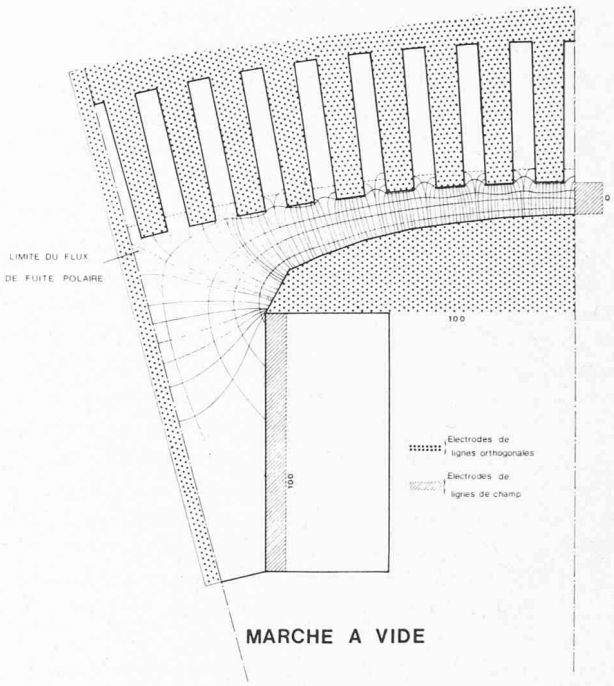

Fig. 6. — Machine synchrone ; distribution du champ polaire.

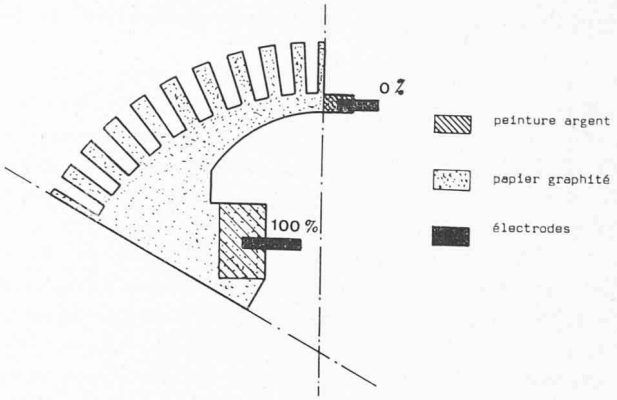

Fig. 6a. — Alimentation du modèle pour le tracé des lignes de champ.

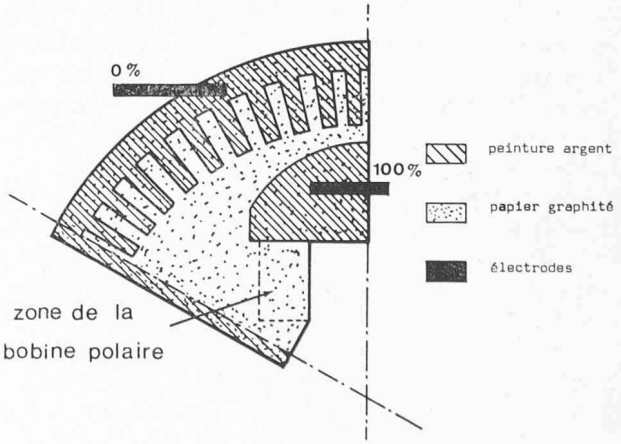

Fig. 6b. — Alimentation du modèle pour le tracé des équipotentielles.

7.1.1.1 *Tracé de champ*

On place les électrodes comme le montre la figure 6a.

L'électrode 100 % est connectée à la surface occupée par la F.m.m. polaire.

L'électrode 0 % est placée sur l'axe polaire (axe de symétrie du flux polaire = axe de symétrie impaire des potentiels vecteurs).

En relevant des équipotentielles situées entre 0 et 100 on obtient le tracé de champ polaire dans l'entrefer et comme montré sur l'exemple, on fait apparaître le flux de fuite polaire.

7.1.1.2 *Tracé orthogonal*

En plaçant les électrodes comme représenté sur la figure 6b, on peut établir le tracé orthogonal au précédent. Les lignes correspondent dans ce cas à des équipotentielles scalaires magnétiques.

L'électrode 100 % est peinte sur toute la corne et la semelle polaire.

L'électrode 0 % est peinte sur toute la surface statorique, compte tenu de la denture.

Le tracé ainsi obtenu est valable dans tout l'entrefer et dans l'espace interpolaire à l'exception de la zone occupée par la bobine polaire où le champ polaire est poissonien. On ne relèvera donc pas de ligne équipotentielle dans cette partie de la zone de l'espace interpolaire.

7.1.2 *Réactions d'induit*

On démontre, lorsque l'on ne considère que le fondamental de l'induction tournante, que la répartition du potentiel vecteur est à la surface du stator :

— sinusoïdale sur un pas polaire pour une réaction d'induit directe ;

— cosinusoïdale sur un pas polaire pour une réaction d'induit transverse.

On impose donc dans les encoches statoriques des valeurs discrètes du potentiel vecteur calculées en fonc-

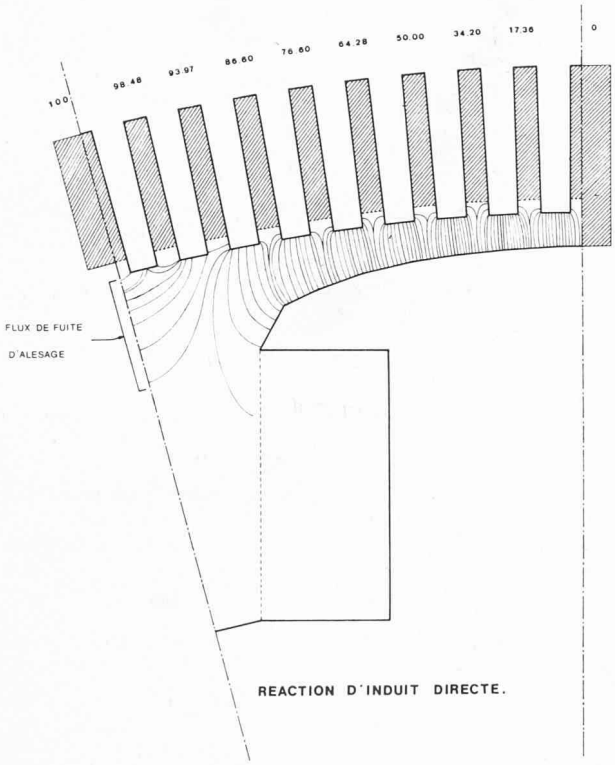

Fig. 7. — Machine synchrone ; réaction d'induit directe.

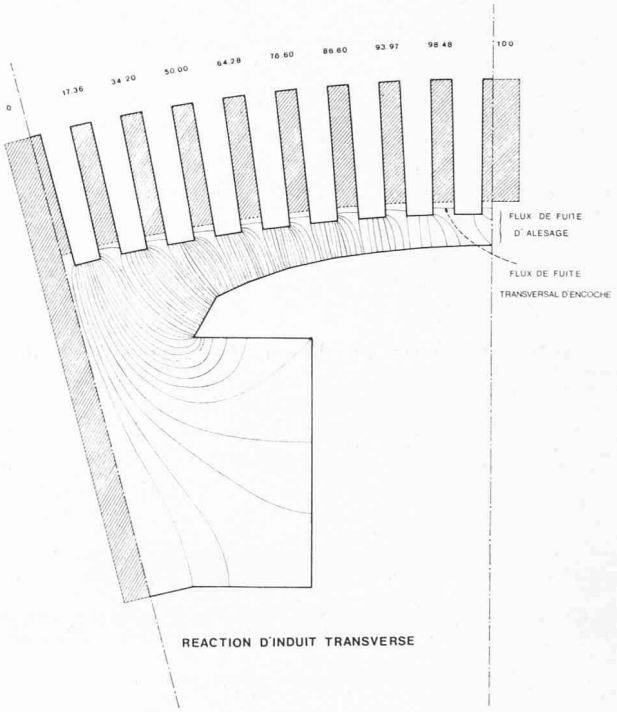

Fig. 8. — Machine synchrone ; réaction d'induit transverse.

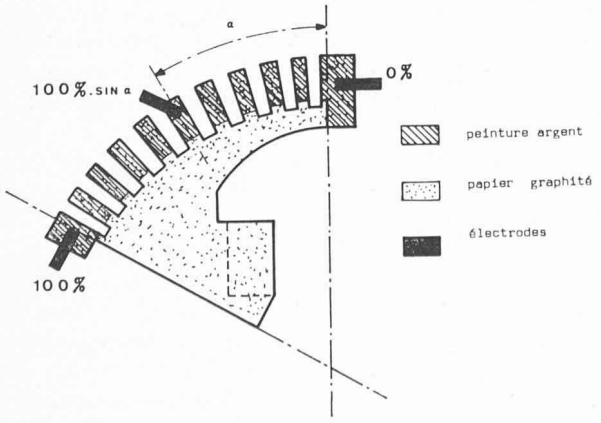

Fig. 7a. — Alimentation du modèle pour le tracé des lignes de champ.

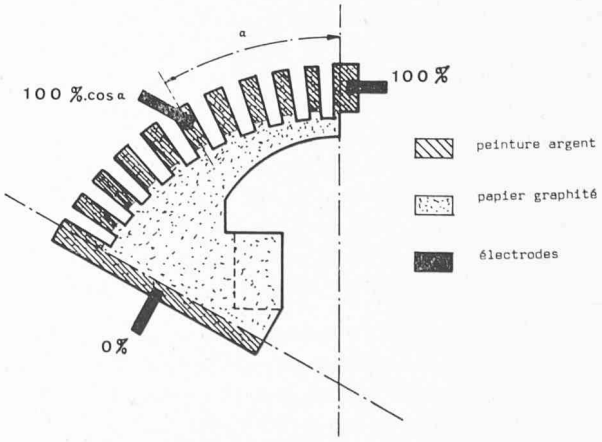

Fig. 8a. — Alimentation du modèle pour le tracé des lignes de champ.

tion de la réaction d'induit considérée et de la position angulaire des encoches et ajustées par un diviseur de tension.

7.1.2.1 *Réaction d'induit directe* (fig. 7)

En relevant des équipotentielles judicieusement choisies (bord des têtes de dents), on obtient le tracé de champ de réaction d'induit directe. Si le tracé est suffisamment fin, on peut faire apparaître le flux de fuite transversal d'encoche et le flux de fuite d'alésage comme montré sur l'exemple.

L'électrode 100 % n'existe que s'il y a une encoche sur l'axe interpolaire.

7.1.2.2 *Réaction d'induit transverse* (fig. 8)

Les remarques concernant la réaction d'induit directe s'appliquent aussi à la réaction d'induit transverse. On constatera cependant un flux de fuite d'alésage beaucoup plus faible dans ce cas.

L'électrode 100 % n'existe que s'il y a une encoche sur l'axe polaire.

7.2 *Répartition des températures dans le fer d'un turbo-rotor*

On a choisi comme modèle un rotor possédant sous chacune de ses encoches un canal d'amenée d'air frais. La température des bords de ces canaux est de 18°C alors que la température du bord des encoches est de 70°C. La température de la périphérie du rotor est de 29,5°C.

En admettant que le potentiel des canaux est de 0 % et celui des encoches de 100 %, on trouve par le modèle analogique à la périphérie du rotor un potentiel de 22,2 %.

Le rotor étant symétrique par rapport à ses axes polaires et interpolaires, on peut ne considérer qu'un quart de celui-ci. Le papier graphité est donc découpé sur les axes. On recouvre de peinture conductrice les encoches, les canaux et la périphérie du rotor en ayant soin d'isoler les canaux des encoches en découpant le papier au fond de l'encoche (lignes pointillées).

On impose les potentiels respectifs à l'aide du rhéographe et d'un potentiomètre diviseur.

Avec la sonde, on repère les points ayant le potentiel préalablement choisi.

Le tracé des équipotentielles se trouve à la figure 9.

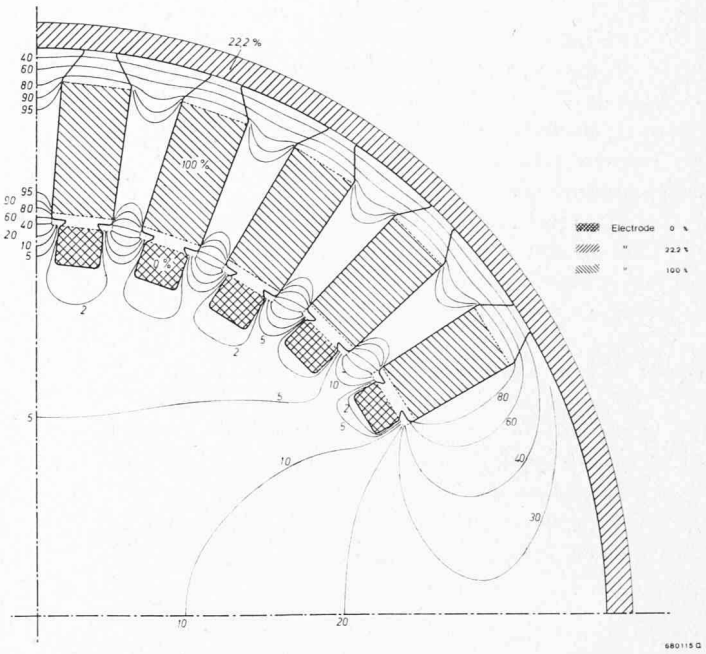

Fig. 9. — Isothermes.

Adresse des auteurs :
Chaire d'Electrométrie, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 16, ch. de Bellerive, 1007 Lausanne.

SUR LA REPRÉSENTATION PLANE DE STRUCTURES HYPERSTATIQUES [1]

par AUGUSTE ANSERMET, ing., professeur

Dans la littérature hyperstatique le problème faisant l'objet de ces lignes est peu traité ; c'est le mérite de la chaire de statique de Lausanne de l'avoir résolu de façon remarquable puis de consacrer quelques pages à des applications [1) p. 53-75] [2]. Les équations développées fournissent une solution générale tandis que les applications portent sur des structures sans barres surabondantes. L'éminent professeur lausannois ne s'en est certainement pas tenu là mais pour diverses raisons, de santé peut-être, n'a plus rien publié. Les lignes qui suivent poursuivent un double but, en se basant strictement sur la théorie de Mayor :

1° Calculer quelques pylônes et coupoles dans les cas où il y a des barres surabondantes, des coupures pouvant être envisagées. La solution sans coupures gagne en importance.

2° Etudier ce que deviennent les ellipsoïdes de déformation en représentation plane.

Cette notion d'ellipsoïdes prend toujours plus de développement surtout outre-Rhin (on dit aussi *Verschiebungsellipsoïd*). Les staticiens qui ont recours encore à la méthode bien désuète dite aux forces peuvent aussi calculer ces surfaces moyennant un changement de variables, ce qui ne sera pas très apprécié des praticiens.

L'élément fondamental est la matrice de rigidité dont on effectue l'inversion ; cette matrice ne dépend pas des forces extérieures ni du choix de la solution : avec ou sans coupures. Les inconnues, variations de coordonnées des nœuds, sont différentes mais pas leurs coefficients, pratiquement tout au moins. Quant aux forces dites de remplacement pour les barres coupées, elles sont arbitraires, même nulles. L'échelle des ellipsoïdes n'est pas encore connue, ce qui importe peu. Au

[1] Texte rédigé en hommage à la chaire de statique de Lausanne (1926) avec le patronage de la Direction EPFL.