Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 95 (1969)
Heft: 25

Artikel: Sur la représentation plane de structures hyperstatiques
Autor: Ansermet, Auguste
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-70258

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

tion de la réaction d'induit considérée et de la position angulaire des encoches et ajustées par un diviseur de tension.

7.1.2.1 *Réaction d'induit directe* (fig. 7)

En relevant des équipotentielles judicieusement choisies (bord des têtes de dents), on obtient le tracé de champ de réaction d'induit directe. Si le tracé est suffisamment fin, on peut faire apparaître le flux de fuite transversal d'encoche et le flux de fuite d'alésage comme montré sur l'exemple.

L'électrode 100 % n'existe que s'il y a une encoche sur l'axe interpolaire.

7.1.2.2 *Réaction d'induit transverse* (fig. 8)

Les remarques concernant la réaction d'induit directe s'appliquent aussi à la réaction d'induit transverse. On constatera cependant un flux de fuite d'alésage beaucoup plus faible dans ce cas.

L'électrode 100 % n'existe que s'il y a une encoche sur l'axe polaire.

7.2 *Répartition des températures dans le fer d'un turbo-rotor*

On a choisi comme modèle un rotor possédant sous chacune de ses encoches un canal d'amenée d'air frais. La température des bords de ces canaux est de 18°C alors que la température du bord des encoches est de 70°C. La température de la périphérie du rotor est de 29,5°C.

En admettant que le potentiel des canaux est de 0 % et celui des encoches de 100 %, on trouve par le modèle analogique à la périphérie du rotor un potentiel de 22,2 %.

Le rotor étant symétrique par rapport à ses axes polaires et interpolaires, on peut ne considérer qu'un quart de celui-ci. Le papier graphité est donc découpé sur les axes. On recouvre de peinture conductrice les encoches, les canaux et la périphérie du rotor en ayant soin d'isoler les canaux des encoches en découpant le papier au fond de l'encoche (lignes pointillées).

On impose les potentiels respectifs à l'aide du rhéographe et d'un potentiomètre diviseur.

Avec la sonde, on repère les points ayant le potentiel préalablement choisi.

Le tracé des équipotentielles se trouve à la figure 9.

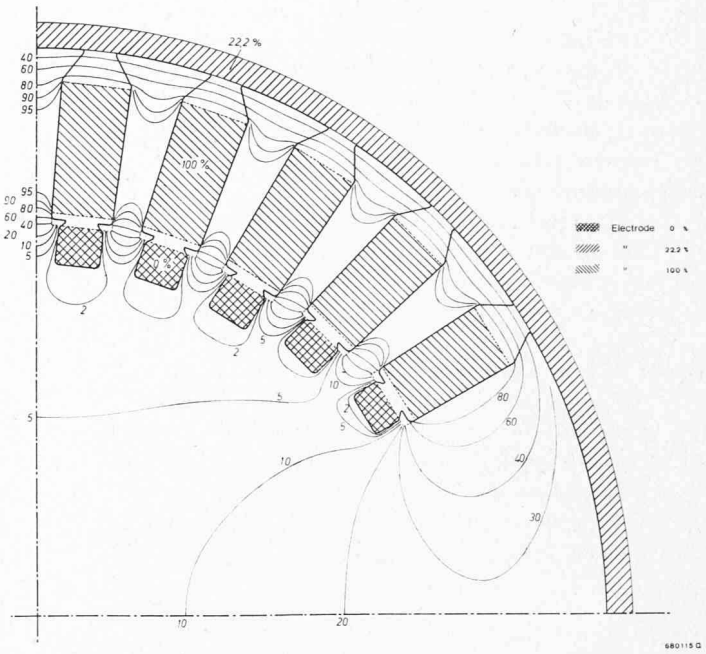

Fig. 9. — Isothermes.

Adresse des auteurs :
Chaire d'Electrométrie, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 16, ch. de Bellerive, 1007 Lausanne.

SUR LA REPRÉSENTATION PLANE DE STRUCTURES HYPERSTATIQUES [1]

par AUGUSTE ANSERMET, ing., professeur

Dans la littérature hyperstatique le problème faisant l'objet de ces lignes est peu traité ; c'est le mérite de la chaire de statique de Lausanne de l'avoir résolu de façon remarquable puis de consacrer quelques pages à des applications [1) p. 53-75] [2]. Les équations développées fournissent une solution générale tandis que les applications portent sur des structures sans barres surabondantes. L'éminent professeur lausannois ne s'en est certainement pas tenu là mais pour diverses raisons, de santé peut-être, n'a plus rien publié. Les lignes qui suivent poursuivent un double but, en se basant strictement sur la théorie de Mayor :

1° Calculer quelques pylônes et coupoles dans les cas où il y a des barres surabondantes, des coupures pouvant être envisagées. La solution sans coupures gagne en importance.

2° Etudier ce que deviennent les ellipsoïdes de déformation en représentation plane.

Cette notion d'ellipsoïdes prend toujours plus de développement surtout outre-Rhin (on dit aussi *Verschiebungsellipsoïd*). Les staticiens qui ont recours encore à la méthode bien désuète dite aux forces peuvent aussi calculer ces surfaces moyennant un changement de variables, ce qui ne sera pas très apprécié des praticiens.

L'élément fondamental est la matrice de rigidité dont on effectue l'inversion ; cette matrice ne dépend pas des forces extérieures ni du choix de la solution : avec ou sans coupures. Les inconnues, variations de coordonnées des nœuds, sont différentes mais pas leurs coefficients, pratiquement tout au moins. Quant aux forces dites de remplacement pour les barres coupées, elles sont arbitraires, même nulles. L'échelle des ellipsoïdes n'est pas encore connue, ce qui importe peu. Au

[1] Texte rédigé en hommage à la chaire de statique de Lausanne (1926) avec le patronage de la Direction EPFL.

point de vue des dimensions, il faut multiplier la force de remplacement par le module de la barre, ce qui fournit un élément linéaire implicitement compris dans les termes absolus des équations aux déformations. Dans la théorie de Mayor les termes absolus résultent de conditions d'équilibre car il n'y a pas de coupures ni formation de dérivées partielles de l'énergie.

Il convient de citer ici la remarquable publication nº 104 de l'EPUL qui est, après plus de quarante ans, inspirée de la méthode de Mayor. Toutefois cette publication donne en outre satisfactionn à ceux qui appliquent la méthode des moindres carrés ; les équations [8[, qui sont à la base des calculs, sont les équations dites normales de cette méthode.

Théorème fondamental

C'est celui qui fut soumis à l'Académie des sciences par la chaire de statique de Lausanne ; étant très connu il suffit de rappeler qu'il permet de réaliser, d'une infinité de façons, la représentation plane d'un système spatial. Le calcul du système plan entraîne le calcul immédiat de celui de l'espace.

Pour bien comprendre ce théorème, il suffit de confronter les groupes d'équations $(3 - V)$ valables spatialement et $(3' - V)$ valables planimétriquement. A titre de simplification, pour le calcul numérique, on peut même poser :

$a = 1$ pour le paramètre du complexe directeur (valeur arbitraire), ce facteur 1 ayant une dimension.

Planimétriquement il y a, bien entendu, encore trois inconnues pour chaque nœud libre, dont une rotation ; on n'a pas le choix. Les équations susmentionnées fournissent tous les éléments des matrices de rigidité. En plan on n'a plus que des ellipses et les cas concrets traités ci-après le montreront. La publication de Mayor, qui était en fait le cours de l'Ecole, est d'une clarté la mettant à la portée des praticiens. Parmi ces derniers, certains envisagent d'appliquer la statistique ; ils auront surtout à appliquer la méthode des moindres carrés. La statistique fut utilisée dans certains cas comportant la mesure de déformations (publication EPUL nº 98). Si la statistique permet de réaliser des progrès dans ce domaine on s'en réjouira. Mais le mieux, dans certains cas, est de faire un double calcul en coupant puis ne coupant pas les barres surabondantes.

Pylônes

Le cas le plus simple est celui d'un pylône à quatre barres et un sommet libre ; admettons des modules mutuellement égaux, ce qui donne lieu aussi à l'égalité des poids des barres ($p = 1$). Quand la hauteur du pylône varie il y a une valeur H_s qui correspond à la forme sphérique de l'ellipsoïde de déformation. Il y a trois variations de coordonnées inconnues.

Les résultats sont les suivants quand H varie.

Matrices de rigidité	$\begin{bmatrix} 1{,}33 & 0 & 0 \\ & 1{,}33 & 0 \\ & & 1{,}33 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1{,}2 & 0 & 0 \\ & 1{,}2 & 0 \\ & & 1{,}6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1{,}5 & 0 & 0 \\ & 1{,}5 & 0 \\ & & 1{,}0 \end{bmatrix}$
Matrices inverses	$\begin{bmatrix} 0{,}75 & 0 & 0 \\ & 0{,}75 & 0 \\ & & 0{,}75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}83 & 0 & 0 \\ & 0{,}83 & 0 \\ & & 0{,}625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}667 & 0 & 0 \\ & 0{,}667 & 0 \\ & & 1{,}00 \end{bmatrix}$
Hauteur pylône	H_s (forme sphérique)	$H > H_s$ (aplatissement)	$H < H_s$ (allongement en sens vertical)

Les longueurs des axes principaux des ellipsoïdes sont proportionnelles à $\sqrt{0{,}75} : \sqrt{0{,}75} : \sqrt{0.75}$ puis $\sqrt{0{,}83} : \sqrt{0{,}83} : \sqrt{0.625}$ et $\sqrt{0{,}67} : \sqrt{0{,}67} : \sqrt{1.00}$

En représentation plane, il y a une rotation et deux coordonnées à calculer par pylône ; en outre les modules sont fournis par l'équation $(6 - V)$ de Mayor.

Pylônes 22 barres, 5 nœuds libres
(publication EPUL nº 101)

Tableau des coordonnées
(unité de mesure arbitraire)

Nœuds	x	y	z	
1	0	0	+ 8	nœuds libres
2	+ 3	0	+ 4	
3	0	+ 3	+ 4	
4	— 3	0	+ 4	
5	0	— 3	+ 4	
6	+ 6	0	0	
7	0	+ 6	0	
8	— 6	0	0	
9	0	— 6	0	

Tableau des poids p
inversement proportionnels aux modules

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		1	1	1	1				
2			1	0,8		1	1		1
3				1	0,8	1	1	1	
4					1		1	1	1
5		1				1		1	1

Matrice de rigidité (partielle)

$$\begin{bmatrix} 0{,}72 & 0 & 0 & -0{,}36 & 0 & +0{,}48 & \dots \\ & 0{,}72 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & 2{,}56 & +0{,}48 & 0 & -0{,}64 & \dots \\ & \text{nœud } 1 & & 2{,}81 & 0 & -0{,}57 & \dots \\ & & & & 2{,}18 & 0 & \dots \\ & & & & & 1{,}80 & \dots \\ & & & & & \text{nœud } 2 & \end{bmatrix}$$

Ces éléments, surtout diagonaux, laissent pressentir que pour le nœud 1 la forme de l'ellipsoïde n'est pas favorable.

Pour ce nœud 1, les longueurs des axes principaux sont proportionnelles à 1,57 : 1,57 : 0,80 ; il faudrait modifier la structure ou les valeurs des modules des barres, donc les poids. La surface est de révolution ce que l'on pouvait présumer à cause de la structure symétrique du pylône.

La composante verticale du déplacement du nœud est exprimée, en représentation plane, en fonction d'une rotation ; pour une valeur déterminée de celle-ci on a, dans notre cas, un cercle de déformation.

Coupole du Reichstag à Berlin. Pour mieux comprendre encore le rôle de la représentation plane considérons cette coupole qui fit l'objet d'une thèse dirigée par les professeurs Mayor et Maurice Paschoud ([1], [6] et publication EPUL nº 86). En vue de conférer plus d'intérêt à ce cas, 4 barres surabondantes furent ajoutées (contre-diagonales). Le nombre de barres passa de 24 à 28 pour 24 inconnues (variations de coordonnées des nœuds).

Bien que la matrice de rigidité soit la même, avec ou sans coupures des barres surabondantes, il faut, parfois, confronter ces deux solutions.

Voici la transcription partielle de la matrice inverse de celle de rigidité ; le calcul fut effectué par le centre de calcul électronique de l'EPUL.

$$\begin{bmatrix} 2{,}44 & -1{,}56 & -1{,}20 & +1{,}95 & +1{,}53 & +0{,}73 & \dots \\ & 2{,}42 & +1{,}03 & -1{,}43 & -1{,}04 & -0{,}94 & \dots \\ & & 1{,}72 & -0{,}94 & -1{,}02 & -0{,}32 & \dots \\ & \text{nœud } 1 & & 2{,}38 & +1{,}65 & +0{,}97 & \dots \\ & & & & 2{,}58 & +1{,}15 & \dots \\ & & & & & 1{,}72 & \\ & & & & \text{nœuds } 2 & & \end{bmatrix}$$

Pour toutes les barres on a admis le même module et le même poids $p = 1$.

Dans cet exemple, il y avait lieu de former 24 groupes comportant chacun 24 équations symétriques par rapport à la diagonale avec les termes absolus des équations aux coefficients de poids des inconnues :

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

Les nœuds 1, 2, 3, 4 sont ceux de la couronne supérieure de la coupole ; pour le nœud 1, on a

$$\sqrt{2{,}44} : \sqrt{2{,}42} : \sqrt{1{,}72} = 1{,}56 : 1{,}55 : 1{,}31.$$

Valeurs proportionnelles aux distances du centre de l'ellipsoïde de déformation aux trois paires de plans tangents respectivement normaux aux axes des coordonnées. D'une propriété connue de la surface podaire concentrique à l'ellipsoïde on déduit que la somme ci-après : $(2{,}44 + 2{,}42 + 1{,}72)$ est indépendante de l'orientation des axes de coordonnées. Comme on le sait l'orientation des axes principaux dépend d'une équation de 3e degré que l'on se contente souvent ici de résoudre par voie semi-graphique. Si les éléments non diagonaux (ci-dessus $-1{,}56$, $-1{,}20 + 1{,}03$) sont suffisamment petits, les praticiens se contentent parfois des éléments fournis par la matrice.

Coupole hyperstatique. L'exemple traité à nouveau est celui ayant fait l'objet de calculs différents à Zürich (système Stress) et à Lausanne (Publications EPUL nos 95, 101). Il comporte 30 barres dont 15 surabondantes et 15 inconnues (5 nœuds libres) ce qui lui confère son caractère spécial. Il peut y avoir plus d'équations que d'inconnues ce qui dépend du mode de calcul ; en général les praticiens redoutent cette éventualité. A Lausanne, on tourna la difficulté de façon judicieuse. En principe, le mode de calcul Stress est basé sur un programme comprenant des équations aux déformations et d'équilibre comme l'avait fait B. Mayor.

En ce qui concerne les variations de coordonnées des nœuds, il ne faut pas oublier qu'il y a deux manières de les former. La chaire de statique de Lausanne n'a pas hésité, et, après plus de 40 ans, on doit reconnaître qu'elle a fait preuve d'une grande perspicacité.

Pour la coupole à 15 barres surabondantes la structure, s'exprime par les valeurs ci dessous :

Nœuds	x	y	z
1	$-0{,}62$	0	$+1{,}3$
2	$-0{,}19$	$+0{,}59$	$+1{,}3$
3	$+0{,}50$	$+0{,}365$	$+1{,}3$
4	$+0{,}50$	$-0{,}365$	$+1{,}3$
5	$-0{,}19$	$-0{,}59$	$+1{,}3$
Nœuds fixes	x	y	z
6	$-2{,}00$	0	0
7	$-0{,}62$	$+1{,}90$	0
8	$+1{,}62$	$+1{,}18$	0
9	$+1{,}62$	$-1{,}18$	0
10	$-0{,}62$	$-1{,}90$	0

L'unité de mesure est arbitraire.

On peut se borner à un rappel partiel de la matrice inverse de celle de rigidité ; il y a 15 variations de coordonnées des nœuds.

$$\left|\begin{matrix} 0{,}509 & 0 & 0 & +0{,}047 & +0{,}077 & 0 & \dots \\ & 0{,}440 & 0 & +0{,}056 & +0{,}091 & 0 & \dots \\ & & 0{,}663 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \text{Nœud 1} & & 0{,}445 & -0{,}020 & 0 & \dots \\ & & & & 0{,}510 & 0 & \dots \\ & & & & & 0{,}662 & \dots \\ & & & & \text{Nœud 2} & & \end{matrix}\right|$$

Inversion effectuée par le Centre de calcul électronique de l'EPUL.

Pour le nœud 1 on a, en représentation plane, une ellipse de déformation pour une valeur déterminée de la rotation inconnue.

En tout, ici, il y a 5 rotations et 10 coordonnées des centres de rotation à calculer.

Spatialement on a $\sqrt{0{,}509} : \sqrt{0{,}440} : \sqrt{0{,}663} =$ 0,714, 0,664 : 0,81 pour les valeurs relatives des longueurs des axes principaux.

Quant aux poids à posteriori P, dont le calcul est parfois laborieux, ils prennent des valeurs qui interviennent par leurs inverses $1 : P$.

			$1 : P =$	
5 barres	$p =$	0,7	$5 \times 0{,}7 \times 0{,}630 =$	2,21
5 »		1,15	$5 \times 1{,}15 \times 0{,}581 =$	3,35
10 »		1,0	$10 \times 1 \times 0{,}512 =$	5,12
10 »		0,8	$10 \times 0{,}8 \times 0{,}533 -$	6,27
			Somme $p/P =$	14,95

(théoriquement 15)
(calcul fait à la règle)

Par hypothèse les modules des barres sont les mêmes, à un facteur près, en plan et spatialement.

Si on veut couper les barres surabondantes, les forces de remplacement sont arbitraires, parfois nulles ; il faut les multiplier par les modules des barres pour convertir ces forces en valeurs linéaires. La force de remplacement peut varier d'une barre à l'autre et cet élément est compris implicitement dans les termes absolus des équations.

En *résumé*, on voit qu'on peut mettre à l'actif de la chaire de statique de Lausanne une solution générale en hyperstatique des systèmes articulés spatiaux avec leur représentation plane. Le calcul basé sur les déformations se révèle de beaucoup le meilleur et dans ce domaine Lausanne joua un rôle prépondérant, ce que les lignes qui précèdent viennent confirmer. La représentation plane est toujours actuelle.

Adresse de l'auteur :
Auguste Ansermet, case postale 106, 1814 La Tour-de-Peilz.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Mayor : *Statique des systèmes spatiaux* (Cours EPUL 1926).
[2] G. Dupuis : *Calcul électronique au service de l'ingénieur* (publication EPUL no 104).
[3] F. Stüssi : *Baustatik II* (Birkhauser, Bâle).
[4] F. Salles : *Initiation à la théorie de l'énergie élastique* (Paris, Dunod).
[5] *Mémoires Association internationale des ponts et charpentes*, 1962.
[6] A. Ansermet : *Berechnung von Fachwerkkuppeln* (traduction chaire de statique ETH).