Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 96 (1970)
Heft: 20

Artikel: STRIP: un nouveau moyen de calcul pour staticiens
Autor: Bengtsson, Ake / Wolf, John P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-70873

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

STRIP : Un nouveau moyen de calcul pour staticiens [1]

par ÅKE BENGTSSON, et JOHN P. WOLF

Introduction

De nos jours, les computers en service maîtrisent facilement de vastes calculs. Après l'élaboration de programmes adéquats, des problèmes toujours plus complexes peuvent être résolus avec la plus grande précision, alors que jusqu'ici, et pour des cas relativement simples, ils l'étaient à l'aide de moyens de calcul conventionnels (règles à calcul, machines comptables de table). Un exemple concret appartenant au domaine de la statique réside dans l'exploitation automatique de lignes d'influence, c'est-à-dire avant tout dans la détermination de la position la plus défavorable — conduisant aux extrémums — d'un convoi de charges complexe. De plus, la grande capacité de calcul des computers a contribué au développement de nouveaux procédés de calcul. Ces derniers permettent l'application de méthodes neuves et constituent une nouvelle manière de penser. Au moyen de la « software », ils permettent de résoudre des problèmes auxquels on ne pouvait, jusqu'à présent, guère apporter de solution ou seulement des solutions approximatives. A titre d'exemples empruntés à la statique, nous citerons la méthode des éléments finis pour l'analyse de systèmes porteurs bidimensionnels et de corps à trois dimensions, les problèmes non linéaires ainsi que certaines optimisations. STRIP constitue un nouveau système de programmes relatifs à la statique qui sollicite, dans les deux groupes d'application cités ci-dessus, la grande capacité de calcul du computer.

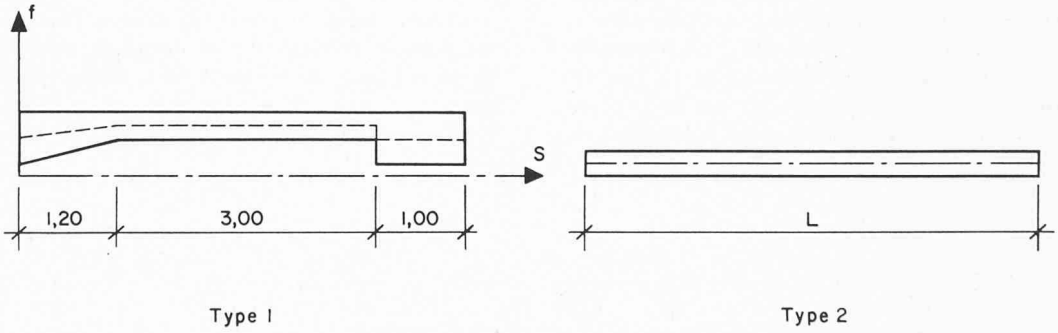
[1] Cet article a été publié en allemand dans la *Neue Zürcher Zeitung*, supplément technique, édition de midi, 11 mai 1970.

STRIP, instrument de travail du staticien

STRIP (Structural Integrated Programs) a été élaboré en quatre ans par les deux maisons Digital AG, à Zurich, et Nordisk ADB AB, à Stockholm. Il se compose de trois programmes intégrés établis sur des bases semblables. Le premier calcule des structures planes formées de barres, le second des structures spatiales formées de barres et le troisième des systèmes porteurs bidimensionnels. Il existe des manuels détaillés pour l'application pratique (voir bibliographie).

STRIP constitue pour l'ingénieur un moyen de calcul grâce auquel il peut résoudre aussi bien les problèmes simples qui se présentent à lui quotidiennement que les problèmes compliqués de la statique. Il a été tenu compte de la faculté pour l'ingénieur de formuler directement ses problèmes dans son langage technique en le tenant le plus possible à l'écart des instructions de données requises par le computer. Celui-ci ne doit pas seulement effectuer le calcul proprement dit mais doit également soulager l'utilisateur dans la préparation des données et l'interprétation des résultats.

Dans les paragraphes suivants, nous traiterons de l'orientation des données, de la représentation des résultats puis de l'examen des problèmes de la statique se présentant sous la forme de systèmes porteurs formés de barres ou de



2020 Types d'éléments — 2022

Données concernant les éléments						Données concernant les sections transversales							
Numéro du type	Comportement statique	Contribution au travail 1)	Module d'élasticité E 2)	Mod. de poussée/élasticité $G = \frac{1}{2(1+\nu)}$ 2)	Comportement du matériel 3)	Coordonnées de la longueur s, $\frac{s}{l}$ 4)	Nom de la section transversale 5)	Ecart axe de gravité f	Ecart centre de gravité fibre supérieure d 6)	Hauteur h 6)	Moment d'inertie k · I 1)	Surface k · A 6)	Surface de cisaillement k · $\bar{A}$ 6)
			$\frac{kg}{mm^2}$ $\frac{kg}{cm^2}$ $\frac{kg}{m^2}$ $\frac{t}{mm^2}$ $\frac{t}{cm^2}$ $\frac{t}{m^2}$	(1)		mm cm m (1)		mm cm m	mm cm m	mm cm m	mm^4 cm^4 m^4	mm^2 cm^2 m^2	mm^2 cm^2 m^2
6 1	11 BALKEN	16 NQ	21 3500000	31	41	6 0.	16	21 0.4	31	41	51 4.4	61 3.8	71 3.17
						1.2		0.5			1.1	2.32	1.94
						4.2		0.5			1.1	2.32	1.94
						4.2		0.4			4.4	3.8	3.17
						5.2		0.4			4.4	3.8	3.17
2	STAB		2100000			1						0.6	

BALKEN BOGEN STAB SEIL NQ — BETON STAHL ALUM SYM — STEIF

Fig. 1. — Formulaire de préparation orientée des données comprenant la géométrie et les constantes de matériau des types d'éléments se présentant dans le programme relatif aux systèmes porteurs plans formés de barres.

plaques et coques. Pour terminer, nous commenterons les aspects techniques de la programmation.

Préparation orientée des données et représentation des résultats

L'ingénieur décrit le système statique à résoudre par l'intermédiaire de formulaires de données établis de telle manière qu'ils correspondent également dans l'ordre aux réflexions classiques de la statique. Les mêmes formulaires de données sont utilisés pour divers problèmes de nature semblable (par exemple, ouvrages porteurs plans formés de barres, voir fig. 1). Les entêtes des tableaux, les figures et les notations guident l'utilisateur ; il n'est guère besoin d'apprendre un langage spécialisé de programmeur ou une langue orientée requérant une grammaire rigoureuse. Les informations techniques (voir fig. 1) sont inscrites directement. Il existe des possibilités de description alternatives afin d'éviter à l'utilisateur d'exécuter des calculs préalables à la main. Les valeurs numériques peuvent être introduites avec des unités quelconques et disposées librement à l'intérieur d'une colonne ; pour les nombres entiers, le point décimal n'est pas nécessaire.

Les formulaires de données permettent de définir la géométrie, les constantes des matériaux et les charges ainsi que la sélection désirée des résultats. Celle-ci comprend, outre le format du papier, la langue des commentaires, le nombre de décimales après la virgule, ainsi que le plus petit nombre à imprimer, la formulation des combinaisons des cas de charge pour lesquels les calculs doivent être effectués, le genre de résultats — généralement des valeurs limites — ainsi que les sections présentant un intérêt pour l'utilisateur. De cette manière, une impression inutile est évitée si bien que l'ingénieur n'obtient que les résultats aussi poussés que possible qu'il a lui-même choisis et dont il a besoin pour traiter la suite de son problème.

Dans le programme, les données sont soumises à un contrôle sévère. Celui-ci dénonce non seulement les erreurs formelles telles que, par exemple, deux points décimaux dans un même nombre, mais également des incohérences physiques, par exemple lorsque la hauteur d'un élément de poutre soumis à un gradient de température n'a pas été donnée. Comme il est possible de fournir des données en surnombre, on veillera à ce qu'aucune contradiction n'apparaisse à l'intérieur de certaines limites. Ce genre de difficulté se présente lors de la définition des coordonnées des nœuds et de la longueur mesurée sur un plan des barres comprises entre eux. Si une erreur est détectée dans le programme, apparaissent également, en plus d'une annonce, les grandeurs données qui l'ont causée ou qui sont à l'origine de cette erreur. Le reste des données est alors, autant que possible, également contrôlé. Dans un tel cas, le calcul proprement dit n'est pas exécuté.

Les résultats du calcul statique se composent de ce que l'on nomme « echoprint », des résultats intermédiaires, si ceux-ci sont désirés, et des résultats eux-mêmes. L'« échoprint » constitue la véritable donnée du calcul statique. Il est en général directement issu des données, de sorte que les différentes possibilités de description alternatives sont réduites à une seule et, en particulier, les grandeurs données sous forme condensée sont restituées dans leur totalité (par exemple, division automatique simplifiée du réseau des éléments finis). Cet « echoprint » peut également se composer du résultat d'un avant-calcul, par exemple, en ce qui concerne la variation des efforts de précontrainte, influencée par les pertes dues au frottement. Les résultats eux-mêmes, requis par l'ingénieur dans les formulaires de données, sont imprimés de manière parfaitement claire (voir fig. 2). Si des discontinuités apparaissent, comme cela se produit pour certaines lignes d'influence, des points supplémentaires sont ajoutés. Une table des matières est également imprimée. L'« echoprint », les résultats intermédiaires ainsi que les résultats proprement dits constituent un calcul statique fermé.

L'ingénieur doit continuellement prendre des décisions techniques lorsqu'il remplit les formulaires de données en langage orienté et peut définir la statique de son système porteur qu'il connaît parfaitement en vue des résultats à obtenir par la suite. Il exerce un contrôle constant sur l'analyse statique. Le système de programmes ne se charge que du calcul. Puisque l'ingénieur conserve de toute façon la responsabilité, il est essentiel qu'il connaisse parfaitement les méthodes de calcul et leur domaine de validité. C'est pourquoi, dans les deux prochains paragraphes, nous résumerons brièvement ces dernières pour les systèmes porteurs formés de barres et les systèmes bidimensionnels, après quoi nous donnerons quelques exemples pratiques. L'accès aisé à un moyen de calcul aussi efficace rend, pour

S C H N I T T K R A E F T E

PUNKTE	TOTAL - GRWM MAX M	N	Q	TOTAL - GRWM MIN M	N	Q
101.000	-43.725	-91.919	40.751	-193.384	-131.549	74.132
.200	38.842	-106.135	17.387	-58.027	-120.984	44.840
.297	73.005	-120.028	6.644	-11.880	-107.091	28.886
.400	96.596	-128.192	-6.809	16.973	-67.975	14.275
.600	96.581	-128.194	6.803	16.974	-67.974	-14.276
.800	38.817	-106.138	-17.391	-58.031	-120.981	-44.845
102.000	-43.740	-91.919	-40.754	-193.411	-131.547	-74.139
102.000	-72.099	19.076	40.648	-175.642	15.602	65.199
.200	-3.926	25.345	64.945	-96.395	13.725	43.277
.400	44.567	35.128	42.607	-44.227	11.245	28.072
.600	68.718	39.025	-11.036	-12.466	7.348	15.280
.800	55.462	48.772	-36.342	2.073	7.348	4.411
103.000	1.211	7.348	-5.517	-8.356	48.772	-50.384

(Cliché *NZZ*)

Fig. 2. — Efforts intérieurs obtenus à l'aide du programme relatif aux systèmes porteurs plans formés de barres. Pour la combinaison des cas de charge, colonnes TOTAL, les enveloppes des valeurs limites maximale et minimale des moments fléchissants M sont données dans les sections commandées avec l'effort normal N et l'effort tranchant Q correspondants.

de multiples raisons, les bons ingénieurs plus productifs, alors que les médiocres deviennent encore plus dangereux.

Systèmes porteurs formés de barres

Résumé de la méthode de calcul

Les relations de base de la statique sont constituées par les équations d'équilibre relatives aux efforts d'extrémité et par les conditions de continuité, nommées « relations efforts-déformations aux extrémités ».

L'équation (1) représente les conditions d'équilibre écrites sous forme matricielle.

$$A \cdot P = Q \tag{1}$$

Le vecteur P a pour composantes les efforts indépendants aux extrémités des barres (par exemple, pour chaque barre d'un cadre plan, trois par barre) et les réactions d'appuis. A est la matrice des coefficients des équations d'équilibre des nœuds ; le nombre de lignes de cette matrice est dépendant du type de construction, par exemple pour un cadre plan, trois lignes par nœud. Le vecteur Q a pour composantes les charges agissant aux nœuds.

Les conditions de compatibilité sont contenues dans l'équation (2).

$$T \cdot U - V \cdot P = \Delta_0 \tag{2}$$

Les composantes du vecteur U sont les déplacements et les rotations des nœuds ; leur nombre correspond à celui des conditions d'équilibre du système porteur. La matrice T transforme les composantes de U en des déformations relatives aux systèmes de coordonnées locaux des barres et des éléments constituant les supports, lesquelles correspondent aux efforts d'extrémité indépendants, également quant à leur nombre. La matrice carrée de flexibilité V dépend des propriétés des matériaux. Δ_0 a pour composantes les déformations locales initiales des barres et des éléments constituant les supports, dues par exemple à des tassements des appareils d'appuis ou à des variations de température. Les conditions de continuité (2) expriment que les déformations locales $T \cdot U$ découlant des déformations U des nœuds sont égales à la somme des déformations élastiques — liées à la matrice de flexibilité V par l'intermédiaire des efforts d'arête P — et des déformations initiales Δ_0.

Dans la théorie linéaire de la statique, la matrice de transformation T est égale à la transposée de la matrice d'équilibre A. Les équations décrivant le comportement du système statique — qui contiennent les efforts d'extrémité inconnus P et les déformations U (la plupart de ces dernières devant être déterminées) — sont représentées, dans ce cas, par la relation (3).

$$\begin{aligned} A \cdot P &= Q \\ A^* \cdot U - V \cdot P &= \Delta_0 \end{aligned} \tag{3}$$

Le système d'équations est symétrique mais n'est pas défini positif. Enonçons brièvement les deux méthodes de résolution utilisées le plus fréquemment. Si l'on exprime, à l'aide du premier groupe d'équations de la relation (3), le plus grand nombre possible d'efforts d'extrémité au moyen des grandeurs restantes (grandeurs surabondantes), et si l'on effectue la substitution rendue ainsi possible dans le second groupe d'équations, dans lequel toutes les déformations ont été, de plus, préalablement éliminées, on obtient alors un système d'équations aux grandeurs surabondantes. Dans cette « méthode des forces », il est difficile de choisir les grandeurs surabondantes, surtout si l'on désire que le système d'équations symétrique apparaisse finalement sous forme d'une matrice-bande.

Dans la méthode des déformations, les réactions sont éliminées à l'aide des conditions d'équilibre correspondantes. Par cette réduction, toutes les matrices subissent des modifications ; dans ce qui suit, elles seront affectées d'un indice R. La relation (3) reste formellement la même. Les efforts d'extrémité sont exprimés relativement aux déformations à l'aide du second groupe d'équations et introduits dans le premier groupe qui ne contient alors plus que des déformations comme inconnues [équation (4)].

$$A_R \cdot S_R \cdot A_R^* \cdot U_R = Q_R + A_R \cdot S_R \cdot \Delta_{0R} \tag{4}$$
$$\text{avec } S_R = V^{-1}{}_R$$

Le système d'équations est symétrique. Le nombre d'inconnues correspond au degré de liberté de la structure. Si des éléments de barre rigides sont introduits, les efforts d'extrémité correspondants sont également éliminés dans la réduction mentionnée ci-dessus et les équations d'équilibre nécessaires sont déterminées par une analyse topologique.

Types de structures

Treillis et cadres plans et spatiaux, grilles de poutres.

Géométrie

La disposition des nœuds dans l'espace peut être quelconque. Les barres comprises entre ces derniers sont constituées soit par des éléments de treillis soit par des poutres ou des arcs. Des appuis et articulations classiques ou élastiques sont pris en considération.

Les sections peuvent être inhomogènes ; leurs caractéristiques sont calculées par le programme et peuvent varier le long d'une même barre. La forme de la ligne des centres de gravité (voir fig. 1) et celle de la ligne des centres de cisaillement pour des barres à trois dimensions sont quelconques ; le système des axes principaux peut effectuer une rotation (voir fig. 3). Il est possible de préciser les contri-

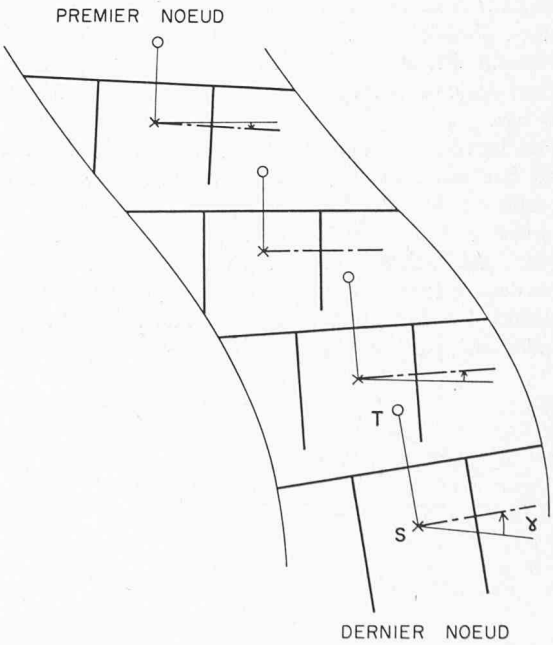


Fig. 3. — Pont-poutre dans l'espace. Les caractéristiques de la section sont variables entre les deux nœuds considérés ; la ligne des centres de gravité S et celle des centres de cisaillement T ont une forme quelconque alors que le système d'axes principal subit une rotation. Ce pont-poutre peut être calculé par STRIP comme une barre.

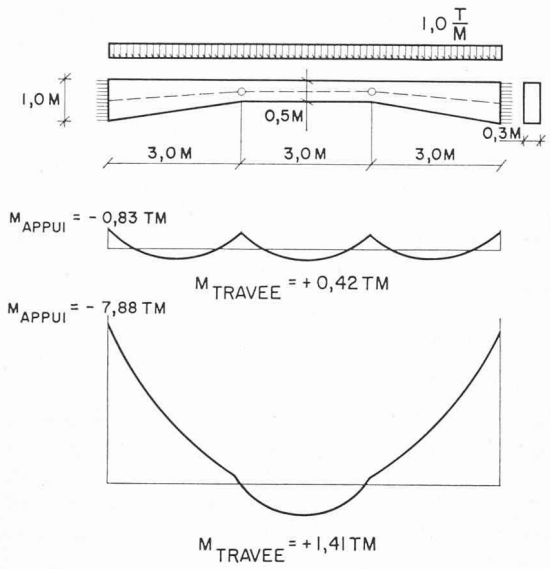


Fig. 4. — Poutre à hauteur variable chargée uniformément. La répartition des moments fléchissants sans prise en considération du travail de l'effort normal (diagramme du milieu) est très différente de celle obtenue en tenant compte de cette dernière contribution (diagramme inférieur).

butions des efforts intérieurs qui doivent être prises en considération dans l'équation de travail. En particulier, des éléments rigides peuvent être introduits et le travail de l'effort normal éliminé. Remarquons que si ce dernier est supprimé, des résultats totalement faux peuvent apparaître pour certaines structures, telles que, par exemple, l'arc à faible flèche. La figure 4 montre une poutre à hauteur variable présentant une ligne des centres de gravité brisée qui a été calculée en tenant compte de diverses hypothèses. La répartition des moments, compte tenu de toutes les contributions de travail, est représentée dans la partie inférieure de la figure alors que la partie supérieure représente cette répartition lorsque l'on ne considère pas la contribution de l'effort normal au travail des forces intérieures. Si l'on supprime le travail de l'effort normal ou, autrement dit, si l'on introduit des « effets rigides », on obtient également des avantages comme cela est démontré plus bas.

Des barres, articulations et appareils d'appuis peuvent aussi être liés excentriquement aux nœuds. On introduit de cette manière un domaine rigide. La figure 5 est une perspective d'un pont dans l'espace ; dans la zone des appuis, des articulations excentriques ont été disposées entre deux nœuds. La figure 6 montre que les deux barres verticales 1 — 2 et 3 — 4 aboutissent excentriquement à un nœud choisi, par exemple, au milieu du tronçon horizontal 2 — 3. Le nombre de nœuds, de même que celui des inconnues du système d'équations (4) définitif, est ainsi abaissé, ce qui permet de réduire le temps de calcul. Ce système d'équations est également moins susceptible de contenir des erreurs puisqu'il présente moins d'inconnues et qu'aucune barre courte auxiliaire — et par conséquent très rigide — n'est introduite. La figure 6 montre l'erreur maximale commise sur la valeur des efforts intérieurs lorsqu'une barre 2 — 3 supplémentaire est introduite plutôt qu'un joint excentrique (calcul exécuté en double précision, 72 Bit). Les deux mêmes avantages apparaissent lorsque le travail de l'effort normal est supprimé. L'introduction d'« effets rigides » ne doit être faite qu'après mûre réflexion : le calcul peut conduire à des résultats très éloignés de la réalité (voir fig. 4) ou ne peut alors pas être effectué du tout lorsque des systèmes partiels rigides statiquement indéterminés apparaissent.

Charges

Les cas de charge suivants peuvent être envisagés :

— Charges concentrées et réparties d'intensité variable agissant en un lieu quelconque, également excentriquement.

— Variations de température, prise en considération d'états de contraintes propres n'agissant que sur une partie de la section et présentant une répartition quelconque le long des barres.

— Déformations des appuis.

— Charges de trafic composées de vagons assemblés avec des charges concentrées et des surfaces de contact réparties. Elles peuvent également être constituées de deux convois différents présentant un écart minimum prescrit. Les charges de trafic, conformément à l'indication préalable des valeurs limites de la combinaison des cas de charge, sont déplacées dans la position la plus défavorable sur la voie de roulement — qui peut être disposée excentriquement — sur laquelle le convoi est, le cas échéant, réduit automatiquement de quelques vagons et dont les vagons isolés sont eux-mêmes supposés chargés ou non. Les majorations pour actions dynamiques ainsi que les forces centrifuges et celles de freinage sont prises en considération. La figure 7 montre la position de la charge — définie par l'exploitation automatique de la ligne d'influence — qui conduit, au point donné, à un moment de flexion minimum.

— Précontrainte due à des groupes de câbles assemblés, disposés d'une manière quelconque. Les pertes par frottement, par surtension et relâche, sont prises en considération.

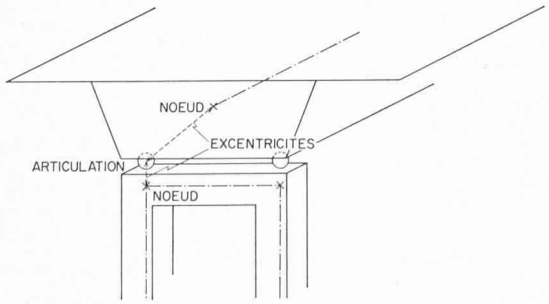


Fig. 5. — Pont-poutre et cadre d'appui présentant des articulations fixées excentriquement aux nœuds.

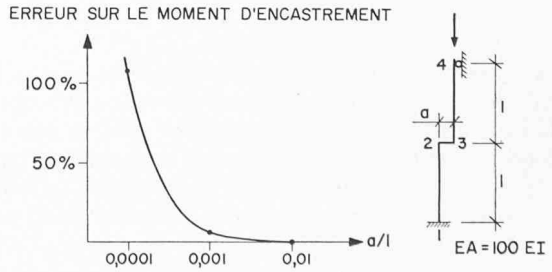


Fig. 6. — Colonne dont la ligne des centres de gravité présente un saut. L'erreur commise sur la valeur du moment d'encastrement, provoquée par la barre horizontale 2–3, courte et par conséquent rigide, peut être évitée par l'introduction d'un joint excentrique aux deux parties de la colonne.

Combinaisons des cas de charge

Les combinaisons des cas de charge sont constituées par des sommes algébriques ou par des valeurs limites des efforts intérieurs, des contraintes de bord, des réactions d'appuis et des déformations dues à des cas de charge simples, lesquels sont multipliés par des facteurs et peuvent être également définis alternativement les uns par rapport aux autres. Le résultat consiste en des efforts intérieurs, des déformations et des contraintes en des points librement choisis ainsi qu'en des réactions d'appuis. Les lignes d'influence de ces grandeurs, dues à une charge verticale, aux forces centrifuges, à un effort de freinage ainsi qu'à un effort normal et à des moments de flexion et de torsion intérieurs sont également calculées.

Problèmes non linéaires

Certaines propriétés des matériaux ainsi que des variations de la géométrie apparaissant sous l'action des charges conduisent à des problèmes non linéaires.

Le fluage du béton et la relaxation des aciers de précontrainte provoquent des déformations non élastiques et une variation de l'effort de précontrainte. Ces phénomènes dépendent de l'état de contrainte et ne peuvent être saisis que par une méthode itérative. STRIP prend également en considération le retrait ainsi que le fluage qui apparaissent dans les structures en béton. Des ouvrages en construction mixte, dans lesquels seule une partie de la construction flue, peuvent également être traités.

Dans la théorie d'ordre supérieur de la statique — dans laquelle les variations de géométrie apparaissant sous l'action des charges sont prises en considération dès le début du calcul — la matrice d'équilibre A apparaissant dans l'équations (1), respectivement la matrice de transformation T apparaissant dans l'équation (2), sont dépendantes des déformations U encore inconnues. La matrice de flexibilité V est une fonction des efforts de bord P cherchés. Le système d'équations non linéaire (1) et (2) est résolu par méthode itérative dans laquelle un système d'équations linéaire (4) apparaît à chaque étape du calcul. Diverses possibilités d'itération demeurent à disposition. La méthode la plus simple applicable dans les structures en cadres (type 1) fonctionne dans toutes les étapes de calcul avec la même position non déformée correspondant au membre de gauche du système d'équations (4), tandis que la charge apparaissant dans le membre de droite, charge qui n'est pas encore en équilibre, est calculée à nouveau. De cette manière, le volume de calcul est réduit pour chaque étape, mais le nombre d'étapes nécessaire est en général élevé. Le type 2, qui est utilisé dans les constructions constituées par des câbles, dans lesquels siègent des efforts initiaux, ainsi que dans des systèmes porteurs sollicités par une charge voisine de la charge critique de flambement, prend en considération tous les termes et constitue une itération de Newton-Raphson. Il conduit à la résolution d'un nouveau système d'équations pour chaque étape de calcul. Il existe plusieurs possibilités pour obtenir les valeurs initiales de ce type d'itération. L'arc avec sous-tirant représenté à la figure 8 (patinoire de Skelefteå, Suède, auteur du projet : Smeljebackens Valsverk) a été calculé avec STRIP d'après la théorie du second ordre pour le cas de charge poids propre et neige sur un côté. La répartition des moments est également reportée dans cette figure. La flèche verticale du point P (voir fig. 8) est représentée à la figure 9 pour le type d'itération 2.

Le comportement géométrique non linéaire permet de plus de calculer la charge sous laquelle une structure est instable. STRIP détermine la charge critique de flambement comme valeur propre en partant soit de la position indéformée soit de la position déformée, c'est-à-dire en relation avec un calcul du second ordre.

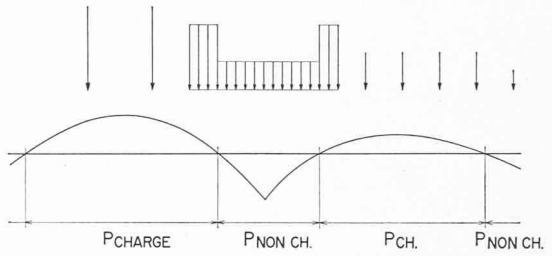


Fig. 7. — Position des charges, définie par l'exploitation automatique de la ligne d'influence, conduisant au moment de flexion minimum dans la section donnée.

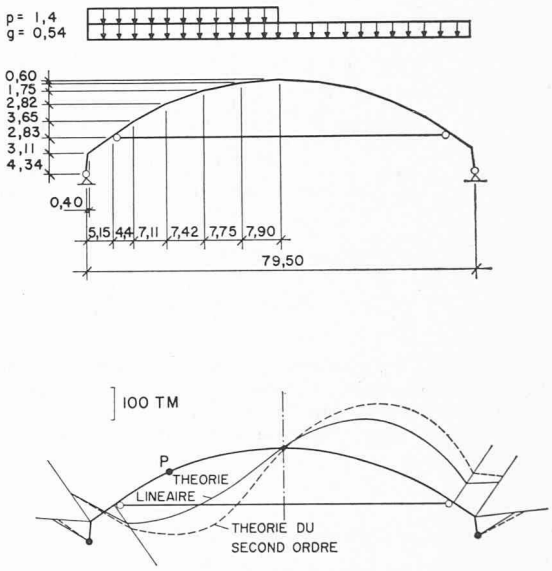


Fig. 8. — Patinoire de Skelefteå. Comparaison de la répartition des moments fléchissants obtenus par la théorie linéaire et par celle du second ordre dans un arc à deux articulations avec tirant pour le cas de charge poids propre et neige sur un côté.

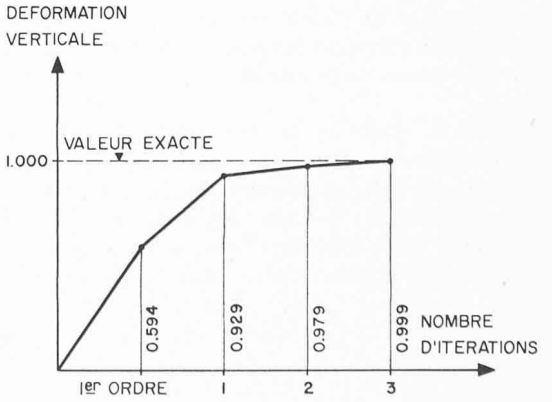


Fig. 9. — Patinoire de Skelefteå. Convergence de la flèche verticale au point P avec le type d'itération 2 (Newton-Raphson) utilisé pour la résolution des relations non linéaires de la statique.

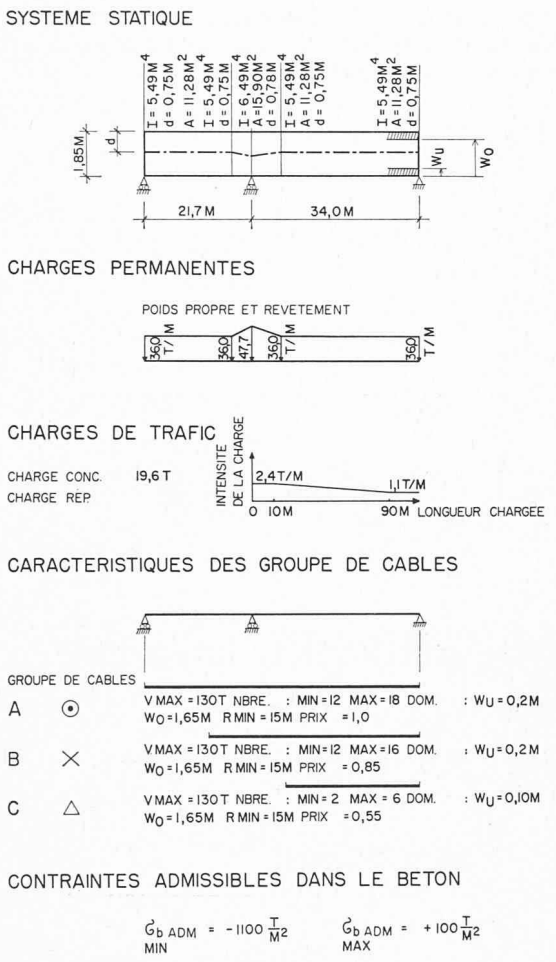


Fig. 10. — Pont à deux travées. Le système statique, les dimensions du béton, les charges, les caractéristiques des groupes de câbles ainsi que les contraintes admissibles dans le béton constituent la donnée pour l'optimisation du choix des câbles de précontrainte.

Optimisation de la précontrainte

L'ingénieur ne doit pas seulement utiliser la grande capacité de calcul du computer pour calculer diverses variantes et comparer celles-ci entre elles afin de déterminer l'ouvrage le plus favorable. De nombreuses autres méthodes de calcul doivent être développées qui permettent un dimensionnement optimum direct. La recherche est en plein essor dans ce domaine. Un problème partiel, le dimensionnement optimum des câbles de précontrainte dans une construction précontrainte dont les dimensions de béton sont données, a été pris en considération dans l'établissement de STRIP. Traitons brièvement ce problème au moyen d'un exemple pratique.

Résolvons le problème de dimensionnement suivant : Nous connaissons les dimensions du béton (voir fig. 10) et les charges (charges permanentes, charges de trafic selon les normes suédoises) à l'aide desquelles les lignes des valeurs limites des contraintes aux arêtes supérieure et inférieure de la poutre peuvent être automatiquement cherchées. L'ingénieur désire utiliser trois groupes de câbles. Pour chacun d'eux, nous connaissons les données suivantes (voir fig. 10) : la position des sections d'ancrage, l'effort de précontrainte d'un câble pouvant aussi — pour prendre en considération d'une manière approchée le calcul de l'effet du frottement — être variable le long de la poutre, le nombre minimum et maximum de câbles (lequel peut être également nul), les limites inférieure et supérieure du domaine admissible afin qu'un recouvrement de béton suffisant soit garanti, lequel peut être choisi variable le long de la poutre, le plus petit rayon de courbure admissible ainsi qu'un prix relatif. Les contraintes admissibles dans le béton pour l'état de service sont choisies comme suit pour les arêtes supérieure et inférieure :

$$\sigma_{\text{min. adm.}} = -1100\,\frac{t}{\text{m}^2} \text{ et } \sigma_{\text{max. adm.}} = +100\,\frac{t}{\text{m}^2}$$

Plusieurs combinaisons de charges avec des contraintes admissibles s'écartant les unes des autres ainsi qu'un facteur de diminution pour le fluage et le retrait peuvent également être introduits. Nous cherchons globalement le nombre entier de câbles le plus économique dans chaque groupe et la répartition le long des poutres, afin que la réserve de contraintes apparaissant dans chaque section et pour toutes les conditions de contraintes formulées — pour les positions des charges les plus défavorables — soit satisfaite au mieux. Les conditions constructives mentionnées ci-dessus doivent être observées. L'optimisation est effectuée en deux parties ayant une influence réciproque. Dans la première partie, nous déterminons le nombre de câbles au prix le plus favorable, en tenant compte des conditions de contrainte. Dans la seconde nous déterminons pour des efforts de précontrainte donnés, et en tenant compte des exigences constructives, la réserve maximale de contraintes ainsi que la répartition des câbles. Ceci est exécuté au moyen d'un programme linéaire qui calcule le maximum d'une fonction linéaire où des conditions linéaires annexes (inégalités) doivent être remplies.Les inégalités formulées dans les diverses sections sont données à la fig. 11. *SP* signifie que les quatre conditions de contraintes sont introduites, W_0 correspond à la condition supérieure constructive et R au rayon de courbure minimum. Le résultat de l'optimisation (voir fig. 11) est constitué par la réserve de contraintes et par la répartition et le nombre de câbles dans chaque groupe. Les conditions déterminantes nécessaires à l'obtention de la solution optimale sont également représentées dans cette figure. $\sigma_{u\,max.}$ (respect. $\sigma_{o\,max}$) signifie que dans cette section la contrainte maximale admissible à l'arête inférieure (respect. à l'arête supérieure) est atteinte jusqu'à la réserve ; W_u (respect. W_o) signifie que le câble est situé au bord inférieur (respect. au bord supérieur) du domaine admissible et R, que le rayon de courbure est égal à la valeur minimum prescrite. Il est démontré que plusieurs positions de câbles produisent la même réserve de contraintes maximale. La position des câbles de précontrainte dans la section sur appuis et dans la section 0,6 de la deuxième travée ne doit pas être modifiée ; le moment parasitaire doit également rester le même. La figure 11 montre aussi une autre disposition des câbles qui conduit aux mêmes valeurs optimales. Cependant, cette solution désignée comme une optimisation modifiée fait apparaître d'autres inégalités déterminantes qui ne sont pas reportées dans cette figure.

Systèmes bidimensionnels plans ou spatiaux

Introduction à la méthode de calcul

Des systèmes bidimensionnels plans ou spatiaux ne peuvent généralement pas être calculés de manière exacte. STRIP utilise la méthode des éléments finis qui est brièvement esquissée ci-après et qui peut être comparée aux procédés de la statique des barres. La structure, par exemple la plaque représentée à la fig. 12, est divisée en éléments

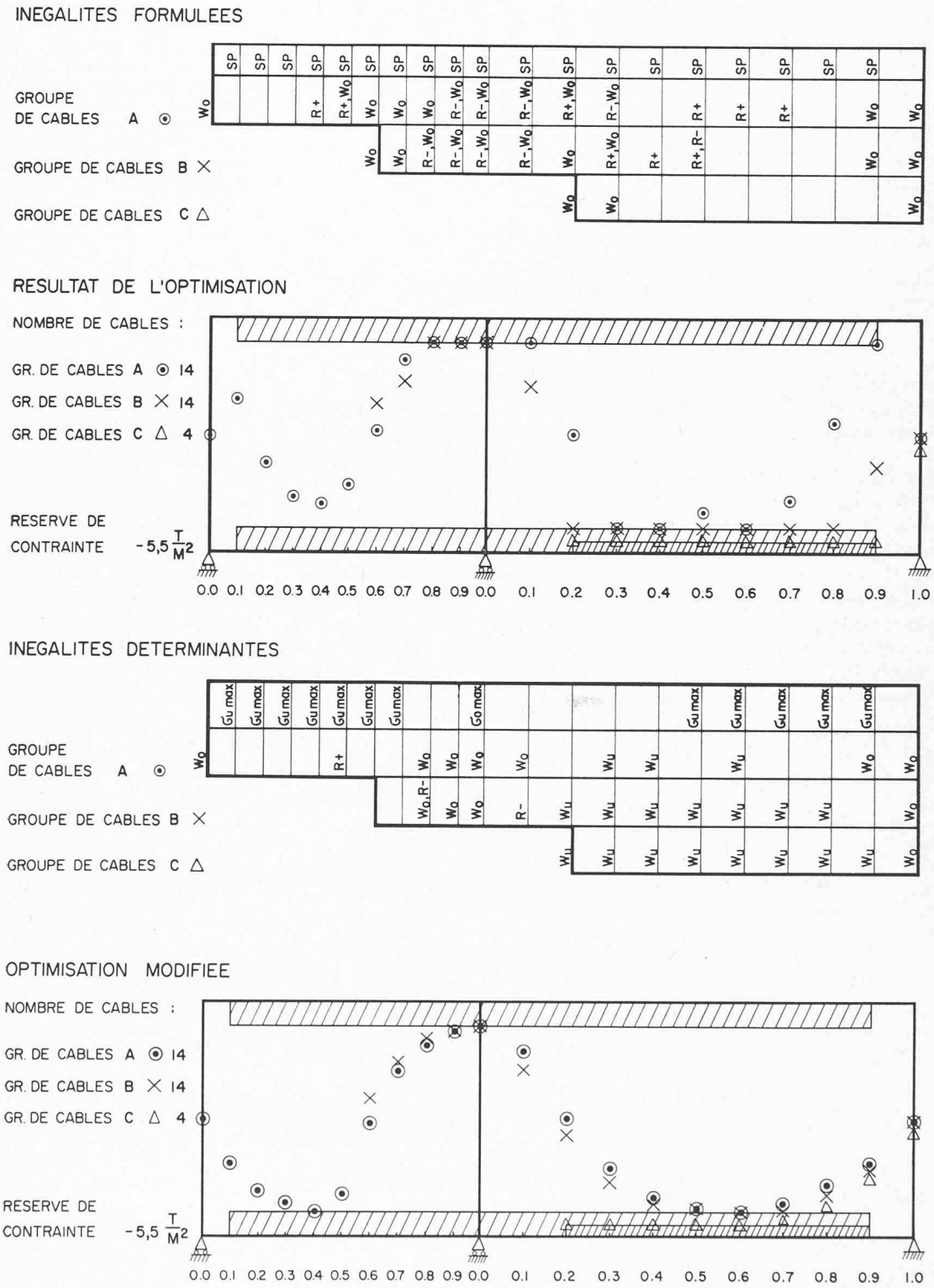
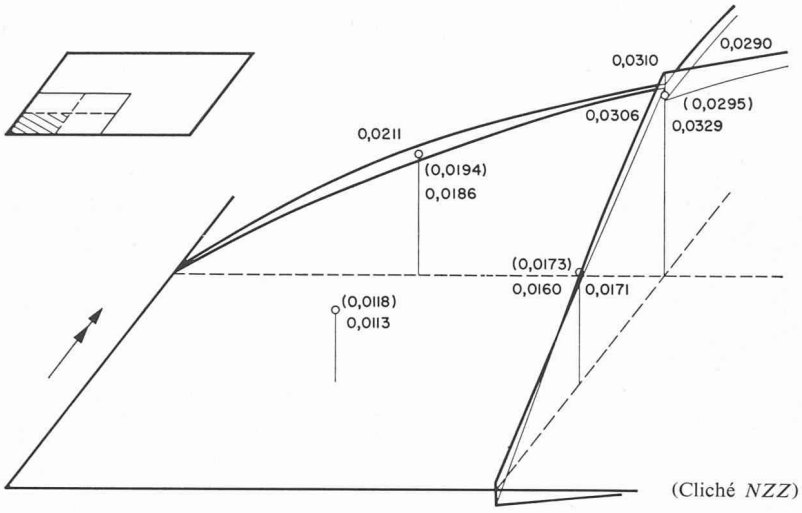


Fig. 11. — Pont à deux travées. L'optimisation est effectuée à l'aide des inégalités préalablement formulées (en haut) ; le résultat est constitué par le nombre de câbles au prix le plus favorable, par la réserve de contraintes la plus grande possible ainsi que par les positions des câbles (milieu). Au point optimum, certaines inégalités deviennent déterminantes (milieu). Une disposition des câbles présentant des valeurs optimales égales, déterminée à la main sur la base de la solution optimale (milieu), a été représentée dans la figure inférieure (optimisation modifiée).
N. T. : Les indices sont ceux de la langue allemande.



(Cliché *NZZ*)

Fig. 12. — Méthode des éléments finis. Le calcul d'un quart de la plaque carrée appuyée librement et soumise à une charge répartie a été effectué avec quatre éléments finis seulement. Les valeurs des moments fléchissants obtenues, lesquelles présentent — remarquons-le — des discontinuités le long des côtés des éléments finis, sont voisines de la solution exacte donnée entre parenthèses, encore facile à déterminer dans ce cas simple.

finis par un réseau de lignes. Sur chacun de ces éléments, une fonction de contraintes à coefficients indéterminés, qui correspondent aux efforts d'extrémité de la statique des barres, est introduite. De cette manière, la matrice de flexibilité V de l'équation (3) peut être déterminée. Afin d'assurer la continuité entre des éléments voisins, nous choisissons des fonctions de déformations supplémentaires le long des bords. Ceci permet aussi de formuler la matrice d'équilibre A. Il existe encore d'autres possibilités de constituer des éléments finis. Les fonctions de contraintes et de déformations représentent des approximations physiques. Les principes d'énergie introduits ici, qui contiennent les relations fondamentales de la statique, offrent la garantie que l'écart de la solution exacte est minimum (voir fig. 12). Les éléments finis, concentrés aux nœuds constituent le système de remplacement présentant un degré de liberté fini qui, selon l'équation (4), peut être résolu exactement sans d'autres hypothèses. Dans l'exemple de la figure 12 n'apparaissent que 12 inconnues de déformations, soit le même nombre, dans le cas de la statique des barres, que pour un cadre à un étage et deux travées appuyé librement. La méthode des éléments finis est également appliquée dans la statique des barres ; les barres elles-mêmes constituent les éléments finis unidimensionnels qui sont concentrés aux nœuds. Les propriétés statiques de ces barres peuvent cependant être saisies sans faire appel à des approximations physiques ; cette méthode est donc exacte dans le cas de la statique des barres.

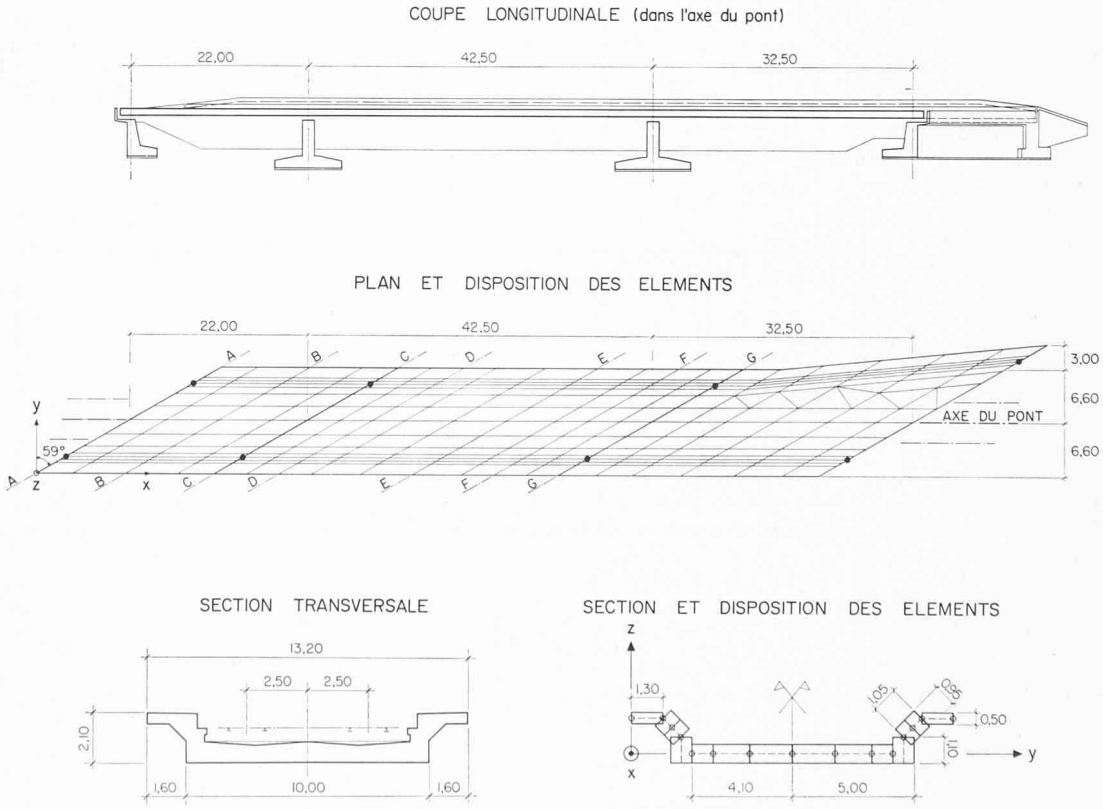


Fig. 13. — Pont de chemin de fer Giesshübel à deux voies. Vue d'ensemble et disposition des éléments finis.

Exemples pratiques

La figure 13 représente le pont à deux voies de la Sihltalbahn (Giesshübel, auteur du projet : R. Henauer, Zurich), composé de trois travées et appuyé en biais sur des appareils d'appuis ponctuels, qui a été calculé comme un voile mince à l'aide de STRIP. Les éléments finis choisis sont des parallélogrammes ainsi que des triangles dans la zone de l'élargissement du pont. Le système d'équations (4) apparaissant finalement contient 1628 inconnues. Remarquons que le programme permet également l'introduction d'éléments finis rectangulaires et trapézoïdaux (trapèzes isocèles) ; un élément fini en soi peut présenter des propriétés orthotropes et une épaisseur variable linéairement. De plus, les appuis peuvent être élastiques et il est possible d'introduire des joints. La méthode des éléments finis permet de prendre en considération une surface moyenne de la coque quelconque, une épaisseur variable, des matériaux présentant des propriétés variables à l'intérieur de la structure, des conditions de bord très générales et divers types de charges. Par une réduction des dimensions des mailles du réseau, l'exactitude peut être renforcée à volonté.

La figure 14 représente les contraintes normales agissant sur la surface moyenne dans la direction longitudinale du pont pour le cas de charge poids propre et ballast. L'effet de la largeur de participation apparaît clairement. Il s'avère que — comme dans le cas d'une plaque — la travée médiane porte essentiellement dans la direction de la diagonale la plus courte. En plus des charges concentrées et réparties, des variations de température et des déplacements d'appuis ont été pris en considération. Il est possible de déterminer des surfaces d'influence, y compris celles issues d'efforts internes (précontrainte). Les cas de charge simples sont de plus combinés pour la détermination des valeurs limites. Les contraintes normales extrêmes, constituées des valeurs minimale et maximale, ont été également représentées pour une section. D'autres résultats sont encore obtenus, tels les contraintes principales ainsi que les directions principales en des points préalablement choisis sur la surface moyenne et sur les deux fibres de bord.

Dans le but de comparer les résultats du calcul en voile mince avec ceux de la statique des barres et de la théorie simple des ossatures plissées et de définir la précision atteinte pour une répartition donnée des éléments, analysons le pont de la figure 15. Le système porteur, encastré des deux côtés, est composé de trois poutres longitudinales ; une poutre extérieure est soumise à une charge unitaire répartie. Dans la direction transversale, 19 éléments ont été choisis ; dans la direction longitudinale, les rectangles sont 1,5 fois plus longs que dans la direction transversale. Les contraintes normales sur la surface moyenne, apparaissant au milieu de la travée, ont été représentées pour les divers types de calculs. Les valeurs obtenues pour les poutres longitudinales par la méthode des éléments finis, en considérant l'effet de coque, sont comprises entre celles de la statique des barres — dans laquelle les parts de torsion de Saint-Venant et de torsion non uniforme sont prises en considération — et celles de la théorie simple des ossatures plissées — qui prend uniquement en considération le

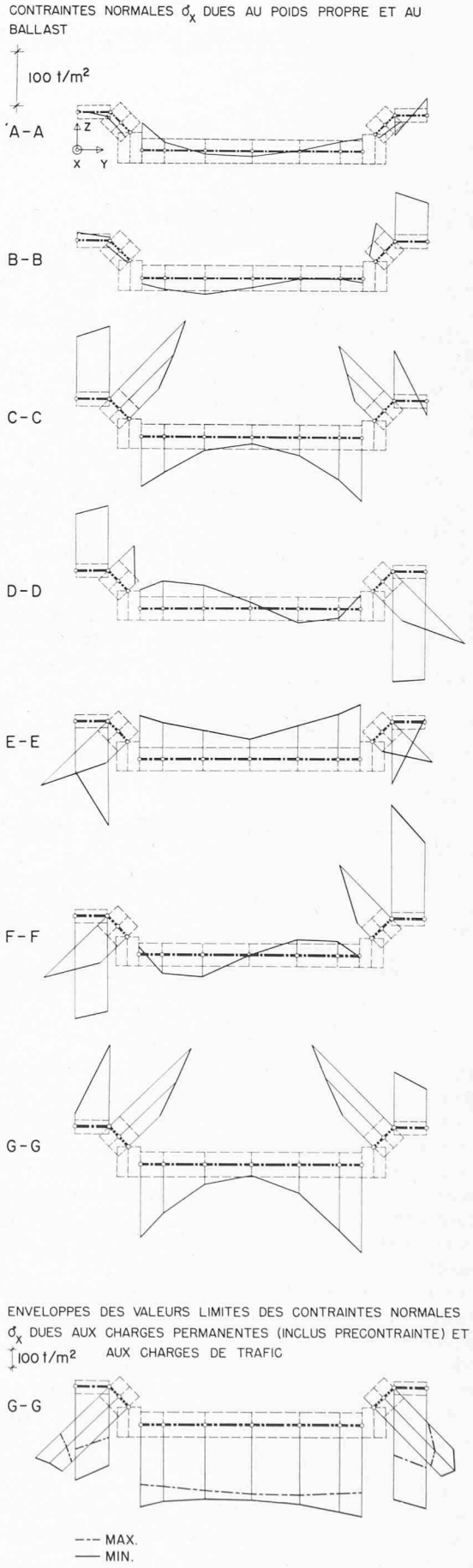


Fig. 14. — Pont de chemin de fer Giesshübel à deux voies. Contraintes normales longitudinales σ_x agissant sur la surface moyenne dans les sections obliques (voir fig. 13) dues au poids propre et au ballast ; ces contraintes font apparaître l'effet de la largeur de participation et montrent que la travée médiane porte essentiellement dans la direction de la diagonale la plus courte. Enveloppes des valeurs limites dans une section sur appui dues à l'ensemble des cas de charge.

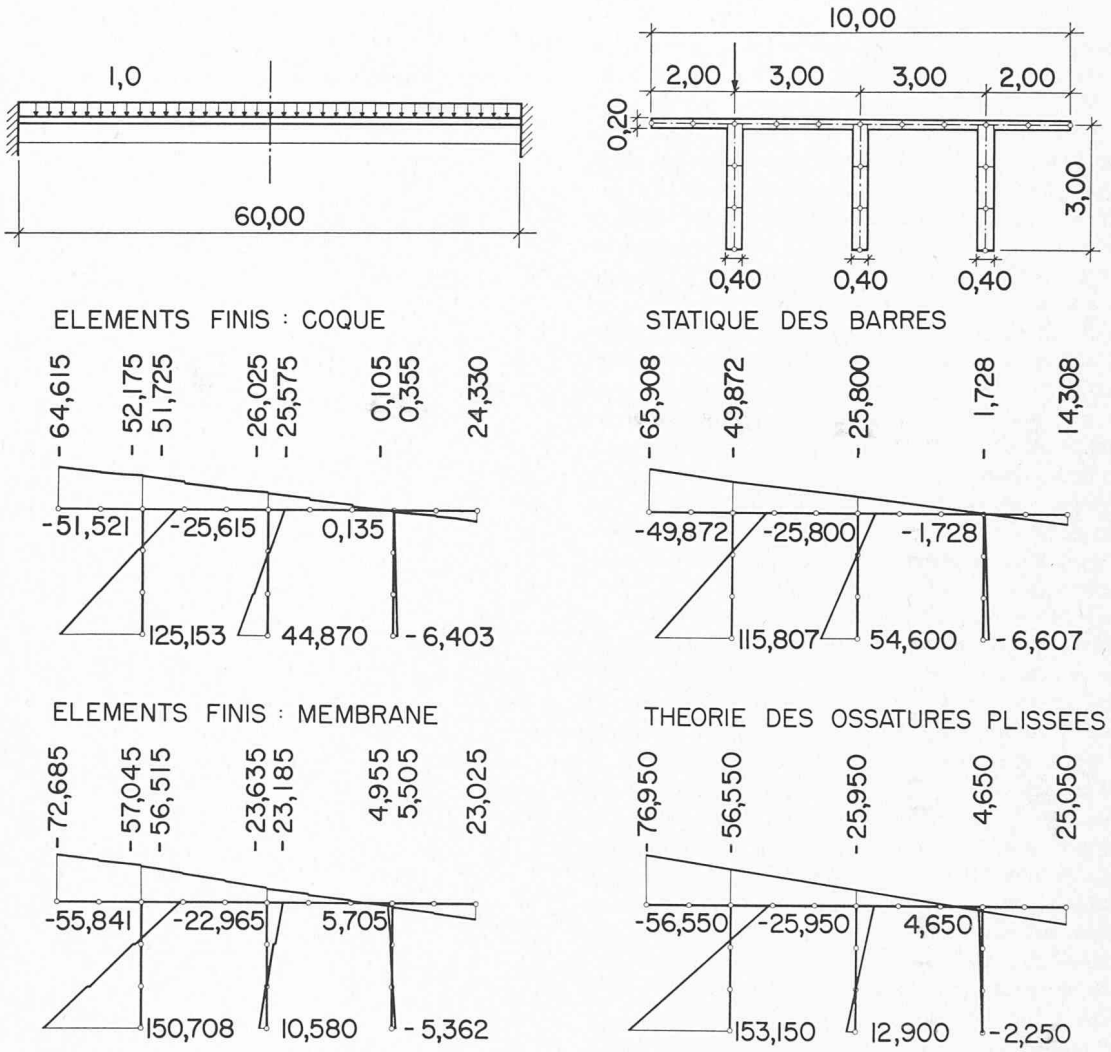


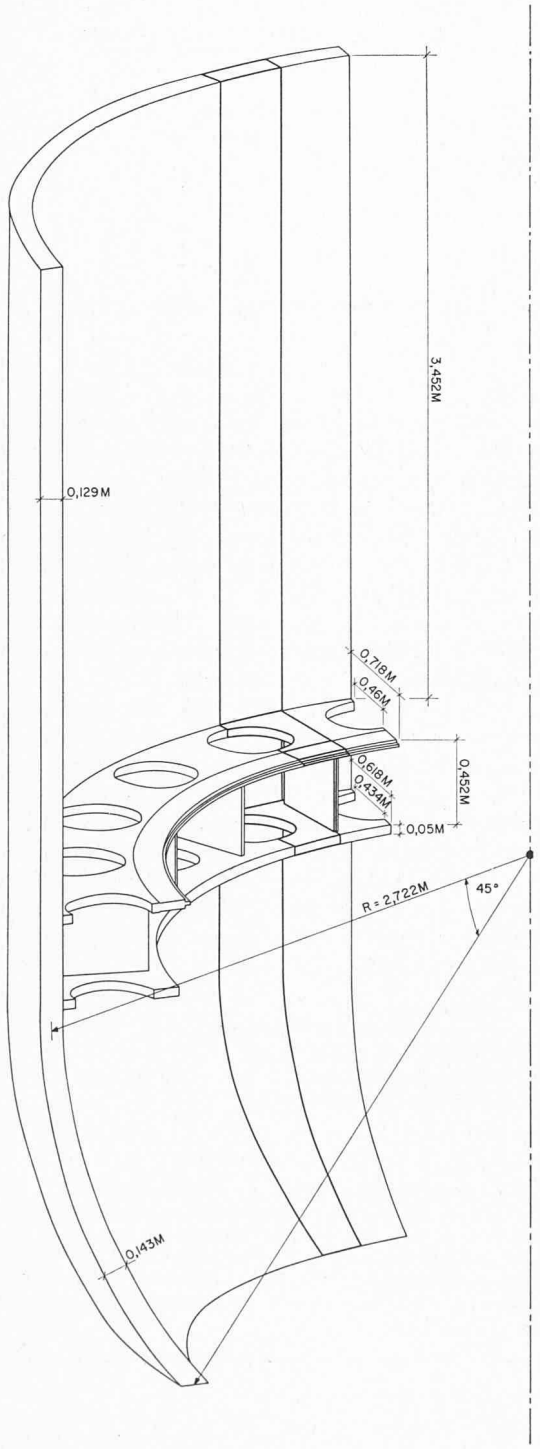
Fig. 15. — Pont à trois poutres maîtresses en profil ouvert, encastré, soumis à une charge agissant sur une poutre longitudinale extérieure. Contraintes normales agissant sur la surface moyenne, au milieu de la portée. Les valeurs du calcul par la méthode des éléments finis avec l'effet de coque (au milieu à gauche) sont situées plus près des résultats de la statique des barres (au milieu à droite) que de ceux de la théorie simple des ossatures plissées (en bas à droite). Ceux-ci peuvent être comparés aux résultats du calcul par la méthode des éléments finis avec l'effet de membrane (en bas à gauche).

gauchissement — et, en fait, plus près des valeurs de la première. Lorsque l'effet de membrane est seul pris en considération, les éléments finis n'agissent que comme des parois alors que ceux d'une coque agissent en plus comme des plaques. Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis, en tenant compte du seul effet de membrane, peuvent être comparés directement avec ceux de la théorie des ossatures plissées, puisque les deux calculs reposent essentiellement sur les mêmes hypothèses.

La méthode des éléments finis est appliquée au calcul statique des ponts surtout dans des cas compliqués pour lesquels la hauteur et la largeur de l'ouvrage ainsi que l'épaisseur des parois sont variables, ou lorsqu'il se présente des poutres transversales, ou encore si le système porteur est appuyé en biais. A titre d'exemple, mentionnons le calcul de la répartition transversale des charges dans un ouvrage formé de plusieurs caissons disposés les uns à côté des autres et reliés seulement par la dalle constituant la voie de roulement et la diffusion dans le sens longitudinal des efforts intérieurs dus aux charges agissant sur la partie en console de la voie de roulement d'un pont en caisson. De plus, il est clair que STRIP permet également de calculer des parois et des plaques, même si celles-ci présentent des trous.

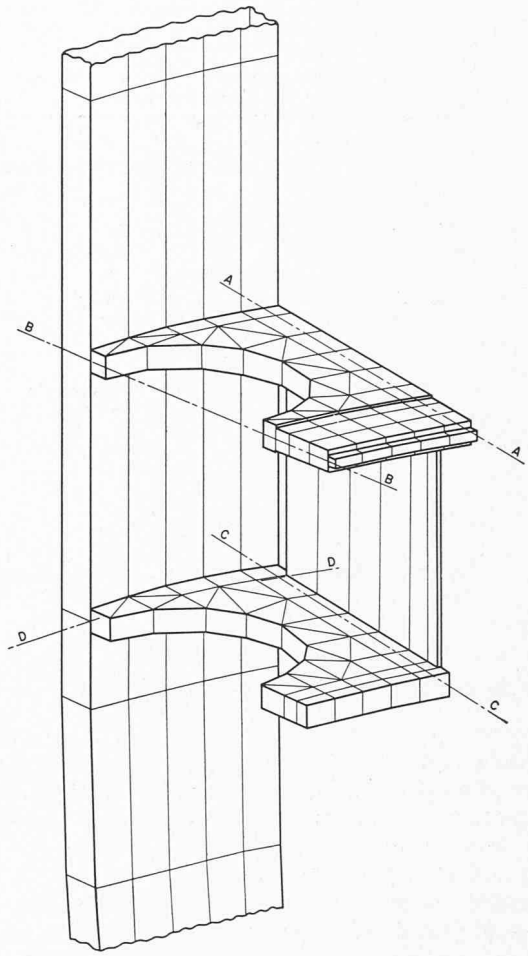
A titre d'application à l'étude de la construction des machines, considérons l'analyse de la structure du réacteur atomique de Würgassen (mandant : Gutehoffnungshütte, Sterkrade AG). Cette structure est constituée par une enveloppe formée d'une coque cylindrique et d'une coque sphérique, ainsi que par deux anneaux porteurs d'épaisseur variable, présentant des évidements et reliés entre eux par des nervures. La figure 16 représente, en perspective, un quart de cette construction ; en raison de la symétrie, il est suffisant de calculer un secteur de 9° seulement. Ce dernier est mis en évidence dans la figure 16. Analysons le cas de charge de l'état de service. Les charges qui agissent sont le poids propre, une pression intérieure de 71,9 kg/cm² dans le domaine cylindrique de la coque et une pression intérieure de 73,8 kg/cm² dans le domaine sphérique ; une différence de pression agit donc de bas en haut sur les deux anneaux porteurs. La distribution des éléments introduite dans STRIP est représentée à la figure 17. Les éléments finis de chacun des anneaux porteurs sont reliés excentriquement à la surface moyenne du cylindre. Les conditions de

symétrie ou les efforts de membrane sont introduits comme charges au droit des coupures. La figure 18 montre la répartition des contraintes dans la direction tangentielle agissant sur la surface moyenne et celle du moment radial dans quelques sections caractéristiques.



(Cliché *NZZ*)

Fig. 16. — Réacteur atomique de Würgassen. Représentation d'un quart de la structure, constituée par une enveloppe formée d'une coque cylindrique et d'une coque sphérique, ainsi que de deux anneaux porteurs présentant des évidements et reliés entre eux par des nervures. En vertu de la symétrie, il est suffisant de calculer un secteur de 9 degrés qui est mis en évidence dans la figure.



(Cliché *NZZ*)

Fig. 17. — Réacteur atomique de Würgassen. Division en éléments finis d'une partie de la construction calculée.

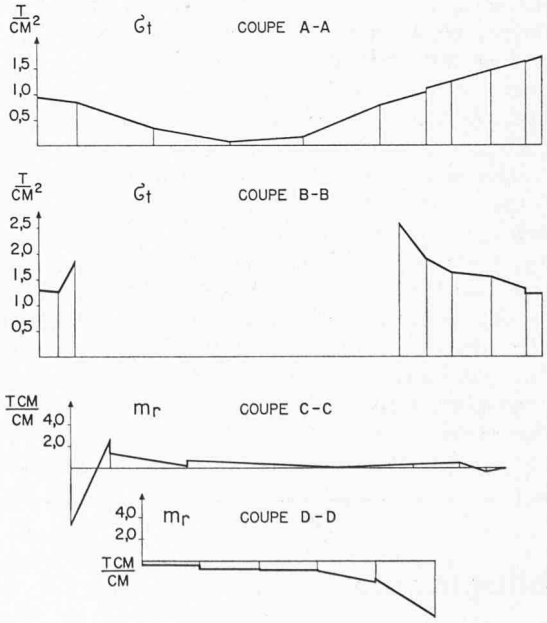


Fig. 18. — Réacteur atomique de Würgassen. Cas de charge en état de service. La pression intérieure agissant sur le cylindre est un peu plus faible que celle exercée sur la partie sphérique ; ainsi, une différence de pression agit de bas en haut sur les deux anneaux porteurs. Contrainte normale σ_t dans la direction tangentielle agissant sur la surface moyenne et moment fléchissant radial m_r dans les sections définies à la figure 17.

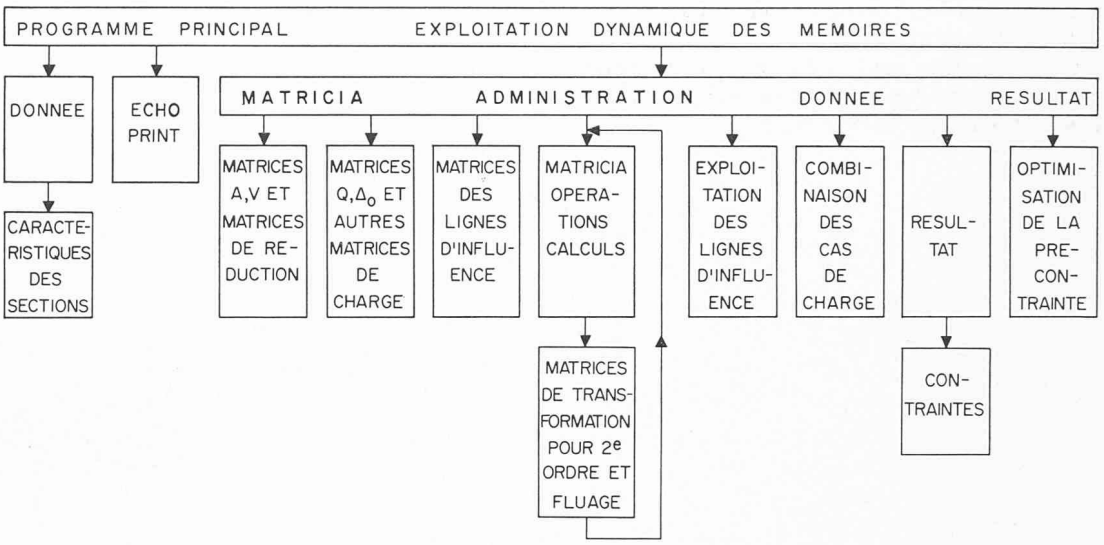


Fig. 19. — Structure schématique du programme relatif aux systèmes porteurs plans formés de barres ; chaque bloc représenté est lui-même encore fortement fragmenté.

Aspects techniques de la programmation

Comme nous l'avons montré ci-dessus, la formulation matricielle est très judicieuse pour saisir systématiquement les opérations apparaissant dans les calculs statiques. Elle est semblable pour toutes les formes de systèmes porteurs ; seules, les matrices elles-mêmes (par exemple, leurs dimensions) sont dépendantes de cette forme.

Parallèlement aux matrices pleines, il en existe également qui comportent de nombreux zéros ; ces dernières présentent la plupart du temps une structure en bande. De plus, certaines sont encore symétriques. Toutefois, pour des structures compliquées, les matrices deviennent très grandes ; ainsi, 20 000 lignes peuvent apparaître dans une même matrice. Des systèmes d'équations présentant de 3000 jusqu'à 5000 inconnues doivent être résolus. Dans le cas de STRIP, un système de matrices nommé MATRICIA a été développé, qui exécute l'administration et les opérations proprement dites. Les diverses propriétés des matrices sont prises en considération à l'aide de possibilités alternatives de stockage dans la mémoire centrale et sur des unités périphériques (tambour, plaque). Ces matrices, et tout particulièrement leurs dimensions variant fortement d'un problème à l'autre, ont conduit à ce que pour la même opération, par exemple la multiplication, plusieurs algorithmes soient à disposition, dont l'optimum est utilisé. Dans le calcul des multiplications et inversions, les additions sont exécutées en double précision (72 Bit). La grandeur des matrices traitées est illimitée ; la décomposition en sous-matrices et, par conséquent, l'administration s'y rapportant, se font automatiquement.

Les données les plus importantes et les adresses de celles sous-ordonnées, stockées sur des unités périphériques, sont mémorisées dans des tableaux nommés « tableaux internes ». Ceux-ci sont placés sur des mémoires externes. Des parties sont continuellement transportées dans la mémoire centrale dans laquelle les données sont utilisées mais également modifiées par le programme. L'espace réservé pour les tableaux internes est ordonné d'une manière optimum selon les aspects dynamiques. Cette administration des données permet le « random access » mais prévoit que les temps de service des mémoires externes sont petits afin que la durée d'occupation soit raisonnable.

Les trois programmes STRIP sont très vastes et, par conséquent, fortement fragmentés. La figure 19 montre la structure du programme relatif aux systèmes plans formés de barres ; chaque bloc introduit est lui-même encore fortement fragmenté. Ce seul programme présente au total 350 sous-programmes qui se composent de 60 000 instructions Fortran. C'est pourquoi STRIP ne peut être installé que sur de grands computers comprenant également la « software » nécessaire. Actuellement, il existe des versions UN-1108 et GE-625.

Adresse des auteurs :
Åke Bengtsson c/o Nordisk ADB AB,
Pyramidvägen 9, Solna 1, Suède.
John P. Wolf, c/o Digital SA,
Leonhardshalde 21, 8001 Zurich.

BIBLIOGRAPHIE

Åke Bengtsson et John P. Wolf : *Manuels STRIP à l'usage de la clientèle*, Step-2 (constructions planes formées de barres), Step-3 (constructions spatiales formées de barres) et Step-S (voiles minces, plaques et parois), théorie STRIP. En allemand : Edition Digital AG, Leonhardshalde 21, 8001 Zurich. En suédois : Edition Nordisk ADB AB, Pyramidvägen 9, Solna 1, Suède.

Bibliographie

Analyse binaire (2 volumes), par *R. L. Vallée*. Paris, Masson, 1970. — *Tome I : Théorie et applications aux circuits combinatoires*. Un volume 16×24 cm, 152 pages, 75 figures. Prix broché, 60 F. — *Tome II : Clef des automates numériques*. Un volume 16×24 cm, 188 pages, 124 figures. Prix broché, 80 F.

L'analyse binaire constitue un ensemble de méthodes mathématiques efficaces, adapté à l'étude des automates numériques, et plus généralement, à celle des systèmes de traitement numérique de l'information.

L'informatique, dans sa croissance rapide, exigeait des modèles adaptés à son caractère particulier et à ses dimensions. Cette jeune discipline ne pouvait s'accommoder longtemps des règles et des limites étroites que prétendait lui imposer l'algèbre. Il lui fallait se libérer au plus vite d'une axiomatique encombrante et embrasser les immenses possibilités qu'offrait l'analyse.