**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande
**Band:** 96 (1970)
**Heft:** 23

**Artikel:** Flambage par bifurcation des cadres rectangulaires plans
**Autor:** Vinnakota, Sriramlulu / Badoux, J.-C.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-70879

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 02.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Flambage par bifurcation des cadres rectangulaires plans

par Dr SRIRAMULU VINNAKOTA, chercheur et Dr J.-C. BADOUX, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Lausanne

## 1. Introduction

Les cadres rectangulaires sont d'un emploi courant en charpente métallique. Ils se présentent sous les formes les plus variées et constituent des systèmes souvent hautement hyperstatiques.

La capacité portante de tels cadres est limitée, soit par leur résistance, soit par leur stabilité ou par leurs déformations. Il y a en général interférence entre ces trois effets et donc une théorie générale pour calculer la capacité portante des cadres doit faire intervenir ces trois effets simultanément, ce qui complique énormément les calculs.

A l'heure actuelle (1970), il existe très peu d'études précises [1, 2, 3] [1] qui permettent d'analyser jusqu'à la rupture le comportement des cadres à plusieurs étages et à plusieurs panneaux. Dans ces méthodes, les calculs sont faits à l'aide de calculatrices électroniques et/ou à l'aide d'abaques. Leur utilisation qui nécessite un temps de calcul assez considérable, ne se justifie que pour vérifier des projets définitifs ou pour étudier des cadres non usuels. Pour déterminer les charges ultimes des cadres courants, on se contente généralement de méthodes approchées qui peuvent conduire à des résultats suffisamment justes.

En s'inspirant de la formule de Rankine, M. Merchant a proposé une telle méthode pour le calcul de la charge portante des cadres non contreventés à plusieurs étages, méthode qui se résume à l'application de l'équation suivante [4] :

$$\frac{1}{P_u} = \frac{1}{P_{cr}^{el}} + \frac{1}{P_{pl}} \qquad (1)$$

[1] Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

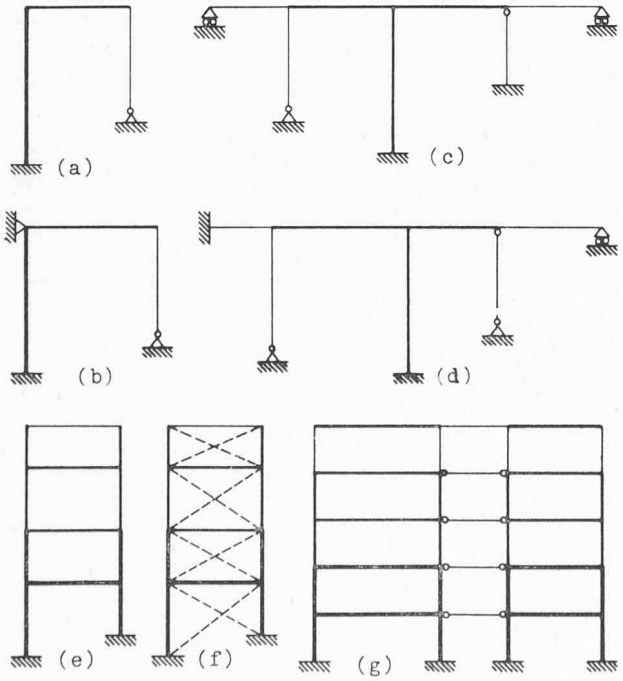


Fig. 1. — Types de constructions qui peuvent être résolus à l'aide de l'étude présente.

où $P_{cr}^{el}$ est la charge critique du flambage du cadre fait d'un matériau à élasticité infinie.

$P_{pl}$ est la charge limite donnée par la théorie plastique du premier ordre.

$P_u$ est la charge portante du cadre.

Il a été démontré que la formule de Rankine généralisée (1) donne des valeurs des charges portantes avec une bonne sécurité en regard de la grande majorité des analyses exactes effectuées. Mais, malheureusement, l'utilisation de cette équation n'est pas aussi simple qu'il apparaît à première vue, car la détermination de $P_{cr}^{el}$ entraîne des calculs considérables.

Dans cet article, nous exposerons une méthode pratique, basée sur la méthode des déformations, pour calculer la charge critique $P_{cr}^{el}$ des cadres rectangulaires. Puis, nous donnerons des exemples numériques.

## 2. Enoncé du problème étudié

Le présent exposé est consacré au calcul de la charge critique des cadres rectangulaires plans formés de barres droites d'inertie constante. Les colonnes du cadre, qui sont verticales, s'élèvent sans interruption depuis la fondation jusqu'à la partie supérieure de la structure. De même les poutres (horizontales) sont continues de la gauche à la droite de la structure. Ainsi, il n'y a aucune barre manquante dans un panneau intérieur. Les colonnes du premier étage peuvent être de longueurs différentes. Les barres peuvent être reliées aux nœuds, qui sont considérés indéformables, soit par des assemblages rigides, soit par des articulations. Les pieds des colonnes peuvent être ou bien articulés ou bien encastrés d'une manière rigide à la fondation.

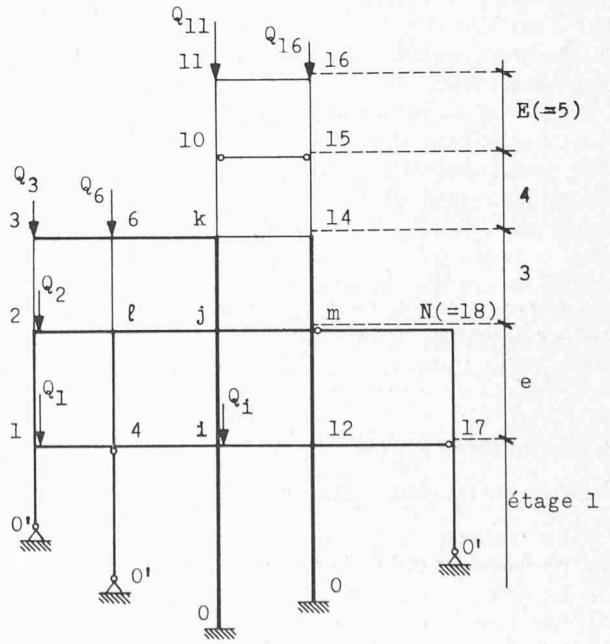


Fig. 2. — Désignation et sollicitation du cadre.

Les figures 1a à 1g représentent quelques-unes des constructions entrant dans le groupe considéré qui, au point de vue pratique, est très important puisqu'il comprend les portiques simples, les portiques continus, ainsi que les cadres multiples à étages et réunit par conséquent les constructions qui se rencontrent le plus fréquemment.

Les forces extérieures considérées dans la présente étude sont telles que, avant la perte de stabilité, les barres ne subissent qu'une compression axiale (ou traction) sans subir de flexion. A titre d'exemple, la figure 2 montre un tel système de forces. Ici, les charges sont uniquement des charges concentrées appliquées aux nœuds, agissant dans l'axe des colonnes.

Un cadre faisant partie d'un bâtiment est, en pratique, soumis à des charges dues au poids propre et aux surcharges. Pour simuler les conditions de sollicitation d'un tel cadre, on a considéré un système de charges non proportionnelles dans lequel chaque force se compose de deux parties. Ainsi, on a :

$$Q_1 = Q_{g1} + \lambda Q_{s1}\,; \quad Q_2 = Q_{g2} + \lambda Q_{s2}\,; \quad \ldots \qquad (2)$$

La première partie, affectée de l'indice $g$, caractérise la contribution du poids propre. Elle reste constante.

La deuxième partie, affectée de l'indice $s$, augmente proportionnellement à sa valeur initiale. Elle représente la contribution des surcharges dont l'intensité est définie par le coefficient de proportionnalité ou paramètre de charge $\lambda$.

La transformation des poids morts et des surcharges agissant sur les barres horizontales en forces nodales se fait par un procédé simple. On considère chaque poutre, entre deux nœuds consécutifs, comme une poutre sur appuis simples. Les charges concentrées équivalentes agissant aux nœuds sont égales et de signe opposé aux réactions de cette poutre simple. Quand il y a des forces horizontales agissant aux nœuds, les forces axiales dans les barres sont trouvées par un calcul préliminaire ou leur effet sur la rigidité est négligé.

Si le paramètre de charge $\lambda$ augmente, pour une certaine valeur critique de $\lambda = \lambda_{cr}$, la forme fondamentale d'équilibre avec les barres rectilignes devient instable. Cette valeur est caractérisée par le fait que le cadre peut, sous cette charge, soit garder la forme fondamentale d'équilibre, soit prendre une autre forme. Le passage d'un état d'équilibre à un autre s'accompagne en général de l'apparition dans les barres de déformations et d'efforts complémentaires.

Afin d'évaluer la valeur critique de $\lambda$, nous procédons comme suit : pour un niveau de sollicitation $\lambda$ laissé constant, nous imposons au cadre dans sa position initiale une déformation générale (très petite) compatible avec les conditions d'appuis. Nous étudions l'équilibre du cadre dans cette position déplacée et analysons dans quelles conditions une telle déformée peut se trouver dans le voisinage de la déformée fondamentale du cadre. Dans le cas des cadres étudiés, la déformée complémentaire peut être obtenue par déplacement des poutres.

## 3. Hypothèses

La présente étude est basée sur les hypothèses suivantes :

I. Les matériaux qui constituent les barres sont supposés parfaitement et infiniment élastiques.
II. Les nœuds sont supposés être rigides.
III. Les forces sont supposées conserver leur direction initiale et leur point d'application initial pendant le flambage.
IV. En plus, les forces extérieures sont telles que, avant la perte de stabilité, les barres ne subissent qu'une force axiale (compression ou traction) sans subir de flexion.
V. Les déformations (à l'état déplacé) sont considérées petites.
VI. Le cas de flambage étudié est celui du flambage par flexion dans le plan du cadre. Il est supposé que le flambage spatial accompagné de torsion et le voilement local des parois sont empêchés.

De plus, on néglige les variations élastiques de longueur dues aux efforts axiaux. Tous les nœuds d'une traverse présentent donc le même déplacement transversal $v$.

## 4. Théorie

Considérons la construction représentée sur la figure 2 qui comprend $N$ nœuds en dehors des appuis et $E$ étages. Dans la méthode des déformations, qu'on envisage d'utiliser ici, on admet comme inconnues les déformations du cadre. D'après les hypothèses du paragraphe 3, ce sont les rotation de $N$ nœuds et les déplacements de $E$ étages. Pour déterminer ces $N + E\,(= M)$ inconnues, on a besoin de $M$ équations, que l'on va établir dans les paragraphes qui suivent.

Faisons maintenant une remarque sur les indices et sur la désignation des éléments. Les nœuds du cadre portent chacun un numéro. Les indices dont on affecte les charges et les rotations se rapportent toujours à ces numéros. Normalement, il y a quatre barres qui aboutissent à un nœud. Il est donc indiqué d'affecter chaque grandeur d'un deuxième indice, qui donne le numéro du nœud de l'autre extrémité de la barre. Ainsi $K_{ji}$ est le coefficient $K$ relatif au nœud $j$ de la barre $ji$.

Si la liaison entre l'extrémité d'une barre et le nœud correspondant est une articulation, ce fait est indiqué par une prime sur l'indice correspondant. Ainsi $K_{ji'}$ est le coefficient $K$ relatif au nœud $j$ de la barre $ji$, liée rigidement au nœud $j$ et articulée en $i$.

### 4.1 *Relations de base*

D'abord nous exprimons les efforts aux deux extrémités des barres en fonction des déformations en ces mêmes points. Nous examinerons quatre cas de liaisons aux extrémités des barres :

— barre liée rigidement à ses deux extrémités ;
— barre liée rigidement à une de ses extrémités et articulée à l'autre ;
— barre articulée à ses deux extrémités et
— barre liée rigidement à ses deux extrémités mais dont l'un des encastrements est libre de se déplacer perpendiculairement à la barre.

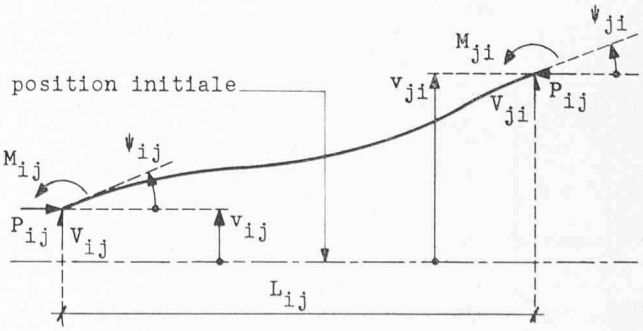


Fig. 3. — Déformée et sollicitation d'une barre $ij$ dans la position déplacée du cadre.

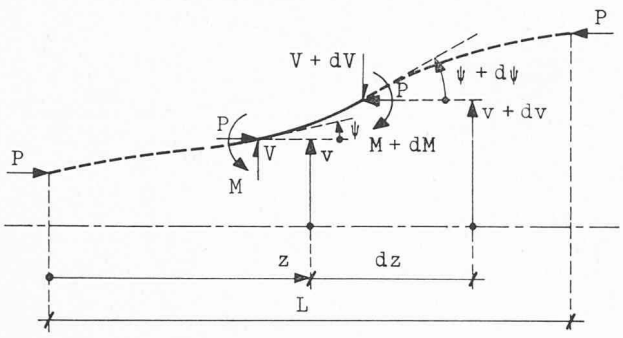


Fig. 4. — Equilibre d'un élément $(z,\ z + dz)$ de la barre $ij$.

4.1.1 *Barre liée rigidement à ses deux extrémités*

Prenons une barre du système aboutissant aux nœuds $i$ et $j$ et considérons cette barre avant et après sa déformation (fig. 3). Considérons le cas général où les sections de la barre subissent des rotations et des déplacements : soient $L_{ij}$ la longueur de cette barre, $I_{ij}$ le moment d'inertie de la section, $P_{ij}$ l'effort normal sollicitant cette barre.

Posons :

$\psi_{ji}$, $\psi_{ji}$ angle de rotation des extrémités $i$ respectivement $j$,
$v_{ij}$, $v_{ji}$ déplacements transversaux des extrémités de la barre, perpendiculaire à sa position initiale ;
$M_{ij}$, $M_{ji}$ moments de flexion aux extrémités de la barre ;
$V_{ij}$, $V_{ji}$ efforts tranchants aux extrémités de la barre.

*Signes*

Angles de rotation des nœuds $\psi$ : positif si la déformation se fait dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Déplacements $v$ : positifs s'ils ont lieu de bas en haut ou de droite à gauche.

Effort normal $P$ : positif dans le cas d'une compression.

Les moments aux nœuds, agissant sur les extrémités des barres, sont positifs s'ils tournent dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Les efforts tranchants aux nœuds, agissant sur les extrémités des barres, sont positifs s'ils agissent de bas en haut ou de droite à gauche.

L'équilibre d'un petit élément $dz$, situé à l'abcisse $z$, donne, en négligeant les termes de second ordre (fig. 4) :

$$\frac{dM}{dz} = -V + P_{ij}\,\psi \tag{3}$$

on a également :

$$\text{la pente } \psi = \frac{dv}{dz} \tag{4}$$

$$\text{la courbure } \Phi = \frac{d^2v}{dz^2} \tag{5}$$

$$\text{En plus } \Phi = -\frac{M}{E\,I_{ij}} \tag{6}$$

On obtient d'après les équations (3) à (6) la relation

$$E\,I_{ij}\,\frac{d^4v}{dz^4} + P_{ij}\,\frac{d^2v}{dz^2} = 0 \tag{7}$$

La solution générale de l'équation homogène (7) est donnée par :

$$v = a_1 + a_2\,\bar{z} + a_3 \sin(\varphi_{ij}\,\bar{z}) + a_4 \cos(\varphi_{ij}\,\bar{z}) \tag{8}$$

[1] Afin de simplifier l'écriture, nous supprimons les indices $ij$ des grandeurs $L$, $I$, $P$ et $\varphi$.

$$\text{où } \bar{z} = \frac{z}{L_{ij}}\,;\ \varphi^2_{ij} = \frac{P_{ij}\,L^2_{ij}}{E\,I_{ij}} \tag{9}$$

et $a_1$, $a_2$, $a_3$ et $a_4$ sont les quatre constantes d'intégration à déterminer.

Le déplacement transversal, la pente, le moment de flexion et l'effort tranchant en un point $z$ de la barre s'écrivent [1] à l'aide des relations (3) à (6) et (7) :

$$v = a_1 + a_2\,\bar{z} + a_3 \sin\varphi\,\bar{z} + a_4 \cos\varphi\,\bar{z} \tag{10}$$

$$\psi = a_2\,\frac{1}{L} + a_3\,\frac{\varphi}{L}\cos\varphi\,\bar{z} - a_4\,\frac{\varphi}{L}\sin\varphi\,\bar{z} \tag{11}$$

$$M = a_3\,P \sin\varphi\,\bar{z} + a_4\,P \cos\varphi\,\bar{z} \tag{12}$$

$$V = a_2\,\frac{P}{L} \tag{13}$$

Les constantes d'intégration sont déterminées par les conditions aux extrémités de la barre, à savoir :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_{ij}\,;\ v = v_{ij} \text{ en } z = 0 \\ \psi &= \psi_{ji}\,;\ v = v_{ji} \text{ en } z = L \end{aligned} \tag{14}$$

qui peuvent être exprimées, à l'aide des relations (10) et (11), sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \psi_{ij} \\ v_{ij} \\ \psi_{i} \\ v_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & \frac{\varphi}{L} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{\varphi}{L}\cos\varphi & -\frac{\varphi}{L}\sin\varphi \\ 1 & 1 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \tag{15}$$

D'où on obtient :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & \frac{\varphi}{L} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{\varphi}{L}\cos\varphi & -\frac{\varphi}{L}\sin\varphi \\ 1 & 1 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \psi_{ii} \\ v_{ij} \\ \psi_{ji} \\ v_{ji} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Le signe $-1$ indique l'inverse de la matrice.

Les moments et les efforts tranchants aux extrémités peuvent être obtenus à l'aide des relations (12) et (13). Ainsi nous avons, en tenant compte des signes...

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ V_{ij} \\ M_{ji} \\ V_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & P \\ 0 & \frac{P}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P\sin\varphi & -P\cos\varphi \\ 0 & -\frac{P}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \tag{17}$$

En remplaçant dans le système ci-dessus les constantes d'intégration par leurs valeurs données par la relation matricielle (16) on obtient après des transformations simples :

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ V_{ij} \\ M_{ji} \\ V_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ij} & D_{ij} & K_{ji}\,C_{ij} & -D_{ij} \\ D_{ij} & G_{ij} & D_{ji} & -G_{ji} \\ K_{ij}\,C_{ij} & D_{ij} & K_{ji} & -D_{ji} \\ -D_{ij} & -G_{ij} & -D_{ji} & G_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{ij} \\ v_{ij} \\ \psi_{ji} \\ v_{ji} \end{bmatrix} \tag{18}$$

où les fonctions de stabilité $C$, $D$, $G$ et $K$ sont définies [5] par

$$\left.\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{\varphi\,(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)}{(2-2\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)} = S_{ji} \\ C_{ij} &= \frac{(\varphi - \sin\varphi)}{(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)} = C_{ji} \\ K_{ij} &= \frac{EI}{L}\,S_{ij}; \qquad K_{ji} = \frac{EI}{L}\,S_{ji} \\ D_{ij} &= \frac{K_{ij}}{L}\,(1 + C_{ij}) = D_{ji} \\ G_{ij} &= \left(\frac{2\,D_{ij}}{L} - \frac{P}{L}\right) = G_{ji} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Lorsque $P$ a une valeur très faible, ou quand les effets de deuxième ordre de la charge directe sont négligés, les valeurs de $K$, $C$, $D$ et $G$ s'obtiennent à partir des équations correspondantes ci-dessus, en faisant tendre $P$ vers zéro.

$$\begin{aligned} K_{ij} &= 4\,\frac{EI}{L} = K_{ji}; \qquad & C_{ij} &= \frac{1}{2} = C_{ji} \\ D_{ij} &= 6\,\frac{EI}{L^2} = D_{ji}; \qquad & G_{ij} &= 12\,\frac{EI}{L^3} = G_{ji} \end{aligned} \tag{20}$$

*Interprétation statique des coefficients K, G, C et D*

Si dans la relation (18) on fait $v_{ij} = v_{ji} = 0$ et $\psi_{ji} = 0$, on a :

$$M_{ij} = K_{ij}\,\psi_{ij}; \quad M_{ji} = K_{ij}\,C_{ij}\,\psi_{ij}.$$

Nous voyons que $K$ a la dimension d'un moment, $\psi$ étant un nombre et $K_{ij} = M_{ij}$ pour $\psi_{ij} = 1$.

La grandeur $K_{ij}$ est le moment à l'extrémité $i$ de la barre $ij$, rigidement encastrée à ses deux extrémités et soumise à l'effort normal centré $P_{ij}$ (fig. 5), provoqué par une rotation unitaire du nœud $i$.

$K$ s'appelle « le facteur de rigidité ».

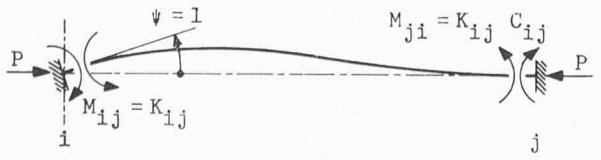


Fig. 5. — Désignation des coefficients $K$ et $C$.

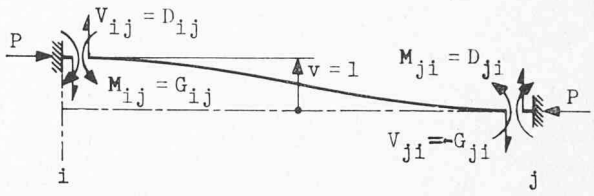


Fig. 6. — Désignation des coefficients $D$ et $G$.

$$C_{ij} = \frac{M_{ji}}{M_{ij}}$$

La grandeur $C_{ij}$ est le rapport du moment $M_{ji}$ transmis à l'extrémité $j$ au moment $M_{ij}$ agissant à l'extrémité $i$ pour les conditions mentionnées ci-dessus. $C$ s'appelle « le facteur de transmission ».

Pour avoir l'interprétation de $G$ et $D$, nous faisons dans la relation (18) :

$$\psi_{ij} = \psi_{ji} = 0 \text{ et } v_{ji} = 0, \text{ on a :}$$

$$V_{ij} = -V_{ji} = G_{ij}\,v_{ij}; \quad M_{ij} = M_{ji} = D_{ij}\,v_{ij}$$

$$\left.\begin{aligned} G_{ij} &= V_{ij} \\ D_{ij} &= M_{ij} \end{aligned}\right\} \text{ pour } v_{ij} = 1$$

La grandeur $G_{ij}$ est l'effort tranchant nécessaire aux extrémités de la barre $ij$, soumise à un effort normal centré $P_{ij}$, pour déplacer transversalement les deux extrémités d'une unité de longueur lorsque les rotations des extrémités sont empêchées (fig. 6). $G_{ij}$ s'appelle « la rigidité à l'effort tranchant ».

$D_{ij}$ est le moment à l'extrémité $i$ de la barre pour ce dernier cas de charge.

### 4.1.2 *Barre liée rigidement à une de ses extrémités et encastrée à l'autre*

Soit une barre $ij$ liée rigidement au nœud $i$ et articulée en $j$ (figure 7b). Nous avons $\psi_{ji} \neq \psi_j$. Nous pouvons exprimer l'angle de rotation à l'articulation en fonction de l'angle de rotation au nœud rigide $i$. De ce fait, nous diminuons le nombre des équations de rotation, les angles de rotation aux articulations se calculant en fonction des angles de rotation des nœuds rigides.

En effet, en substituant $M_{ji} = 0$ dans le système (18) et en l'ordonnant, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ V_{ij} \\ V_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ij'} & D_{ij'} & -D_{j'i} \\ D_{ij'} & G_{ij'} & -G_{j'i} \\ -D_{ij'} & -G_{ij'} & G_{j'i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{ij} \\ v_{ij} \\ v_{ji} \end{bmatrix} \tag{21}$$

où

$$\begin{aligned} &S_{ij'} = S_{ij}\,(1 - C^2_{ij}); K_{ij'} = \frac{EI}{L}\,S_{ij'}; \; K_{j'i} = 0 = C_{ij'} \\ &D_{ij'} = \frac{K_{ij'}}{L} = D_{j'i}; \qquad G_{ij'} = \frac{D_{ij'}}{L} - \frac{P}{L} = G_{j'i} \end{aligned} \tag{22}$$

Nous avons en plus la relation

$$\psi_{j'i} = -\,[K_{ij}\,C_{ij}\,\psi_{ij} + D_{ij}\,(v_{ij} - v_{ji})]\,/K_{ji} \tag{23}$$

qu'on peut calculer une fois qu'on a $\psi_{ij}$, $v_{ij}$ et $v_{ji}$.

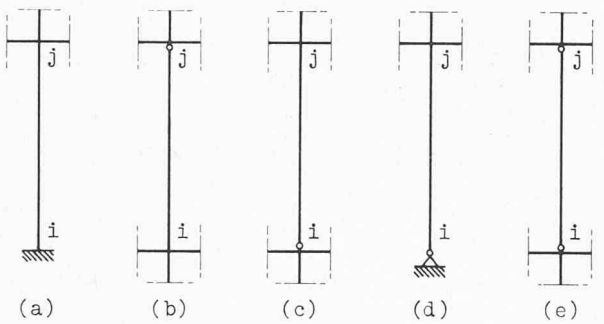


Fig. 7. — Cas particuliers des conditions aux limites.

4.1.3 *Barre articulée à ses deux extrémités*

Considérons maintenant une barre $ij$ articulée aux nœuds $i$ et $j$ du cadre (fig. 7e). Nous avons $M_{ij} = M_{ji} = 0$. En introduisant ces valeurs dans le système de base (18) et en le simplifiant, on obtient la relation :

$$\begin{bmatrix} V_{ij} \\ V_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{i'j'} & -G_{j'i'} \\ -G_{i'j'} & G_{j'i'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ij} \\ v_{ji} \end{bmatrix} \tag{24}$$

où

$$G_{i'j'} = -\frac{P}{L} = G_{j'i'}$$
$$K_{i'j'} = K_{j'i'} = C_{i'j'} = C_{j'i'} = D_{i'j'} = D_{j'i'} = 0 \tag{25}$$

En plus, on a pour les rotations aux extrémités de la barre (rappelons que $\psi_{i'j'} \neq \psi_i$ ; $\psi_{j'i'} \neq \psi_j$) :

$$\psi_{i'j'} = \psi_{j'i} = (v_{ji} - v_{ij})/L$$

qu'on peut calculer une fois qu'on a $v_{ji}$ et $v_{ij}$.

4.1.4 *Barre liée rigidement à ses deux extrémités mais dont l'un des encastrements est libre de se déplacer perpendiculairement à la barre* (fig. 8)

Soit une barre $ij$ à liaison rigide dans le nœud $i$ et dont l'extrémité $j$ est encastrée parfaitement sur un appui déplaçable dans le sens perpendiculaire à l'axe de la barre[1]. Donc, on a les conditions :

$$\psi_{ji} = 0 \; ; \quad V_{ji} = 0 = V_{ij}$$

En substituant ces valeurs dans la relation matricielle (18) et en la simplifiant, nous avons :

$$M_{ij} = K_{ij''} \; \psi_{ij} + D_{ij''} \, v_{ij} \tag{26}$$

où

$$K_{ij''} = K_{ij} - \frac{D_{ij} \, D_{ji}}{G_{ji}} = \frac{E \, I}{L} \, S_{ij''}$$
$$D_{ij''} = D_{ij} - \frac{G_{ij} \, D_{ji}}{G_{ji}} = 0 \tag{27}$$

Nous avons en plus les relations :

$$M_{ji} = \left[ K_{ij} \; C_{ij} - \frac{D_{ij} \; D_{ji}}{G_{ji}} \right] \psi_{ij} + D_{ij''} \; v_{ij}$$

$$v_{ji} = \left[ D_{ij} \, \psi_{ij} + G_{ij} \, v_{ji} \right] / G_{ji}$$

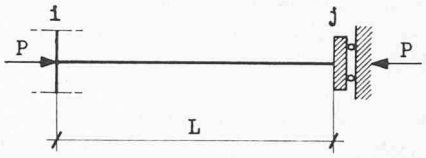


Fig. 8. — Barre liée rigidement à ses deux extrémités, mais dont l'un des encastrements est libre de se déplacer perpendiculairement à la barre.

qu'on peut calculer une fois qu'on a $\psi_{ij}$ et $v_{ij}$. Lorsque $P$ a une valeur très faible, ou quand les effets de deuxième ordre de la charge directe sont négligés, la valeur de $S_{ij''}$ s'obtient à partir des relations (19) et (27), en faisant tendre $P$ vers zéro. Ainsi $S_{ij''} = 1$.

4.2 *Equations de nœud*

Considérons maintenant un nœud $j$ situé à l'étage $e$ et liant quatre barres entre elles. Soient $i$, $l$, $k$, $m$ les nœuds adjacents liés par une barre avec le nœud $j$ (fig. 2).

Ecrivons les équations des moments :

$$\begin{aligned} M_{ji} &= K_{ji} \, \psi_j + K_{ij} \, C_{ij} \, \psi_i + D_{ij} \, v_{e-1} - D_{ji} \, v_e \\ M_{jk} &= K_{jk} \, \psi_j + K_{kj} \, C_{kj} \, \psi_k + D_{jk} \, v_e - D_{kj} \, v_{e+1} \\ M_{jl} &= K_{jl} \, \psi_j + K_{lj} \, C_{lj} \, \psi_l \\ M_{jm} &= K_{jm} \, \psi_j + K_{mj} \, C_{mj} \, \psi_m \end{aligned} \tag{28}$$

Or, pour que le nœud soit en équilibre (fig. 9), il faut que $\Sigma \, M_j = 0$.

En faisant la somme de ces quatre expressions et en l'égalant à zéro, on a :

$$K_{jj} \, \psi_j + \Sigma \, K_{ij} \, C_{ij} \, \psi_i + D_{ij} \, v_{e-1} + (D_{jk} - D_{ji}) \, v_e - D_{kj} \; v_{e+1} = 0 \tag{29}$$

avec $K_{jj} = \Sigma \, K_{ji}$.

Les sommations s'étendent à tous les nœuds adjacents au nœud $j$ considéré. L'équation (29) est appelée l'équation de nœud.

*Remarques*

1. Pour les barres articulées au nœud $j$ (voir par exemple fig. 7b et 7e), il est à remarquer qu'elles n'apportent aucune contribution de moment et par conséquent elles n'interviennent pas dans l'équation de nœud correspondante.

2. Si l'un des nœuds voisins, le nœud $i$ par exemple, est un nœud d'appui à encastrement rigide (fig. 7a), les termes $(K_{ij} \; C_{ij} \; \psi_i)$, $(D_{ij} \; v_{e-1})$ correspondants disparaissent du fait de $\psi_i = 0$ et $v_{e-1} = 0$.

3. Si le nœud d'appui $i$ est au contraire articulé (fig. 7d), le terme $D_{i'j} \, v_{e-1}$ disparaît de nouveau du fait de $v_{e-1} = 0$, ainsi que le terme $(K_{i'j} \, C_{i'j} \, \psi_i)$ du fait de $K_{i'j} = 0$ ; les coefficients $K_{ji}$ et $D_{ji}$ sont à remplacer par les coefficients $K_{ji'}$ et $D_{ji'}$ conformément aux relations (22).

4. Pour un nœud complètement articulé (fig. 7d, nœud $i$), il n'y a pas d'équation de nœud parce qu'il en a déjà été tenu compte dans le système (22) et elles sont ainsi éliminées du calcul.

[1] Ce fait est indiqué par le signe $''$ placé à côté de l'indice de l'extrémité correspondante $j$. (Voir les équations 26 et 27.)

5. Pour les nœuds parfaitement encastrés, l'angle de rotation est nul et l'équation de nœud correspondante disparaît également.

Si nous avons $N$ nœuds intermédiaires (en dehors des appuis), nous avons donc $N$ équations de nœud. Cet ensemble de $N$ équations peut être mis sous la forme matricielle, comme suit :

$$R_{\psi\psi} \vec{D}_{\psi} + R_{\psi v} \vec{D}_{v} = 0 \qquad (30)$$

Dans laquelle :

$\vec{D}_{\psi}$ est le vecteur colonne dont les $N$ éléments sont les rotations des nœuds $= \{ \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_i, \psi_j, \ldots, \psi_N \}$

$\vec{D}_{v}$ est le vecteur colonne dont les $E$ éléments sont les déplacements des étages $= \{ v_I, v_{II}, \ldots, v_e, \ldots, v_E \}$

$R_{\psi\psi}$ est une matrice carrée d'ordre $N \times N$ et

$R_{\psi v}$ est une matrice rectangulaire d'ordre $N \times E$.

Ci-dessous nous indiquerons la manière d'établir les matrices $R_{\psi\psi}$ et $R_{\psi v}$.

*Matrice $R_{\psi\psi}$ :*

Pour un nœud quelconque $j$, on commence par écrire, sur la $j^{me}$ ligne qui lui correspond, $r_{jj} = K_{jj}$ dans la colonne $\psi_j$, puis on considère successivement l'extrémité $i$ de toutes les barres aboutissant en $j$ (sauf si cette extrémité est un appui ou une articulation) et on écrit $r_{ji} = K_{ij} C_{ij}$ dans chaque colonne $\psi_i$. Si l'extrémité est un appui, ou une articulation ou si les nœuds $i$ et $j$ ne sont pas reliés par une barre, l'élément $r_{ji}$ dans l'expression de la matrice $R_{\psi\psi}$ doit être pris égal à zéro. En vertu du principe de réciprocité, la matrice $R_{\psi\psi}$ est symétrique.

*Matrice $R_{\psi v}$ :*

Il faut remarquer que seules les barres verticales aboutissant au nœud en considération fournissent des contributions à l'équation de nœud [voir l'équation (29)].

Pour le nœud $j$ situé à l'étage $e$, on écrit sur la $j^{me}$ ligne de la sous-matrice $R_{\psi v}$ ; $r_{je} = + D_{jk} - D_{ji}$ dans la colonne $v_e$, puis on écrit successivement $r_{j,e-1} = D_{ij}$ dans la colonne $v_{e-1}$ (sauf si $e = 1$) et $r_{j,e+1} = - D_{kj}$ dans la colonne $v_{e+1}$ (sauf si $e = E$ où le nœud $k$ correspondant à $j$ n'existe pas). Tous les autres éléments sur la $j^{me}$ ligne de la sous-matrice doivent être pris égaux à zéro. Dans le cas où certaines barres sont articulées, il faut tenir compte des modifications indiquées dans les paragraphes 4.1.2 et 4.1.3.

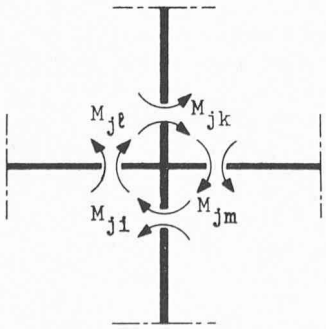


Fig. 9. — Equilibre d'un nœud.

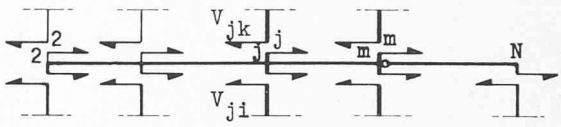


Fig. 10. — Equilibre d'une traverse.

4.3 *Equations d'étage*

Nous obtenons les équations d'étage en écrivant l'équilibre des forces horizontales. Si nous coupons le cadre par des paires de plans horizontaux, très près de chaque poutre (fig. 10), il faut que pour la partie isolée :

$$\Sigma H = 0 \qquad (31)$$

équation que nous pouvons expliciter en

$$\Sigma V_{ji} + \Sigma V_{jk} = 0 \qquad (32)$$

dans laquelle

$\Sigma V_{ji}$ est la somme des efforts tranchants le long de la coupure inférieure et

$\Sigma V_{jk}$ est la somme des efforts tranchants le long de la coupure supérieure.

Les efforts tranchants $V_{ji}$ et $V_{jk}$ peuvent être remplacés par leur expression en fonction de $\psi$ et $v$,

$$\begin{aligned} V_{ji} &= -D_{ij}\,\psi_i - D_{ji}\,\psi_j - G_{ij}\,v_{e-1} + G_{ji}\,v_e \\ V_{jk} &= D_{jk}\,\psi_j + D_{kj}\,\psi_k + G_{jk}\,v_e - G_{kj}\,v_{e+1} \end{aligned} \qquad (33)$$

Nous obtenons :

$$\sum^{i}\left[-D_{ij}\,\psi_i\right] + \sum^{j}\left[(D_{jk}-D_{ji})\,\psi_j\right] + \sum^{k}\left[D_{kj}\,\psi_k\right] -$$

$$\left[\sum^{i} G_{ij}\right] v_{e-1} + \left[\sum^{j} (G_{ji} + G_{jk})\right] v_e - \left[\sum^{k} G_{kj}\right] v_{e+1} = 0$$

dans laquelle :

$\sum^{i}$ s'étend à tous les nœuds inférieurs des barres reliant l'étage $e$ à l'étage $e-1$.

$\sum^{j}$ s'étend à tous les nœuds supérieurs des barres reliant les étages $e$ et $e-1$ et à tous les nœuds inférieurs des barres reliant les étages $e$ et $e+1$.

$\sum^{k}$ s'étend à tous les nœuds supérieurs des barres reliant les étages $e$ et $e+1$.

Dans le cas où le système comprend des barres articulées à certains nœuds, il y a lieu d'en tenir compte à l'aide des indications des paragraphes 4.1.2 et 4.1.3.

Pour chaque étage nous pouvons écrire une équation d'étage. Pour le cadre en étude de $E$ étages, nous avons ainsi $E$ équations d'étage liant les rotations $\psi$ et les déplacements $v$ du cadre. Comme dans le cas des équations de nœud, l'ensemble des équations d'étage peut être écrit sous forme matricielle de la manière suivante :

$$R_{v\psi} \vec{D}_{\psi} + R_{vv} \vec{D}_{v} = 0 \qquad (35)$$

Dans laquelle :

$R_{v\psi}$ est une matrice rectangulaire d'ordre $E \times N$

$R_{vv}$ est une matrice carrée d'ordre $E \times E$.

Les vecteurs $\overrightarrow{D_\psi}$ et $\overrightarrow{D_v}$ ont déjà été définis dans le paragraphe 4.2.

Les matrices $R_{v\psi}$ et $R_{vv}$ s'établissent concrètement de la façon suivante :

D'abord on constate que l'équation (34) relative à l'étage $e$ permet de remplir la $e^{me}$ ligne de ces deux matrices. On note également que seules les barres verticales aboutissant à l'étage $e$ fournissent des éléments dans cette ligne.

*Matrice $R_{v\psi}$ :*

Pour chaque nœud $i$, correspondant à l'extrémité inférieure d'une barre liant l'étage $e$ en question avec celui de l'étage inférieur, on écrit dans la $i^{me}$ colonne $r_{ei} = -D_{ij}$.

Pour chaque nœud $j$, situé à l'étage $e$, on écrit dans la $j^{me}$ colonne $r_{ej} = (D_{jk} - D_{ji})$.

Enfin, correspondant à chaque nœud $k$, correspondant à l'extrémité supérieure d'une barre liant l'étage $e$ en question avec celui de l'étage supérieur, on écrit dans la $k^{me}$ colonne $r_{ek} = D_{kj}$.

*Matrice $R_{vv}$ :*

On remarque d'après l'équation (34) que la $e^{me}$ ligne correspondante à l'étage $e$, contient tout au plus trois éléments non nuls, à savoir $r_{e,\,e-1}$, $r_{e,\,e}$ et $r_{e,\,e+1}$. Le terme diagonal $r_{e,\,e}$ vaut $\sum_i (G_{ji} + G_{jk})$. La sommation s'étend à toutes les extrémités supérieures des barres reliant les étages $e$ et $e-1$, si $e < E$, à toutes les extrémités inférieures des barres reliant les étages $e$ et $e+1$. Puis on a $r_{e,\,e-1} = -\sum_i G_{ij}$ où la sommation s'étend à toutes les extrémités inférieures des barres reliant l'étage $e$ à l'étage $e-1$.

Enfin, on a, si $e < E$, $r_{e,\,e+1} = -\sum_k G_{kj}$, où la sommation s'étend à toutes les extrémités supérieures des barres reliant l'étage $e+1$ à l'étage $e$.

## 4.4 *Matrice de rigidité du cadre*

La matrice complète de la structure qui comprend les déplacements des étages aussi bien que les rotations angulaires des nœuds peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} R_{\psi\psi}\,\overrightarrow{D_\psi} + R_{\psi v}\,\overrightarrow{D_v} &= 0 \\ R_{v\psi}\,\overrightarrow{D_\psi} + R_{vv}\,\overrightarrow{D_v} &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

ou bien

$$\begin{bmatrix} R_{\psi\psi} & R_{\psi v} \\ R_{v\psi} & R_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{D_\psi} \\ \overrightarrow{D_v} \end{bmatrix} = 0 \tag{37}$$

soit $\overrightarrow{D}$ le vecteur déformation de la structure défini par

$$\overrightarrow{D} = \{\overrightarrow{D_\psi}\,\overrightarrow{D_v}\} = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N, v_I, v_{II}, \ldots, v_E\} \tag{38}$$

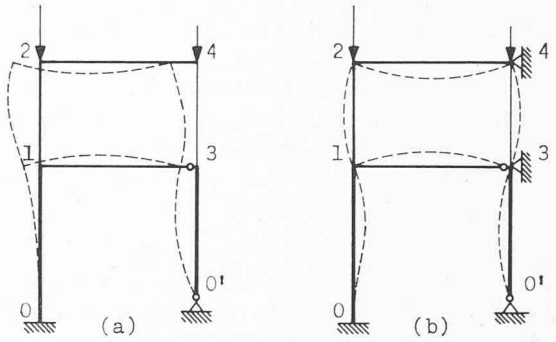


Fig. 11. — Cadre considéré pour la matrice $R$.

L'expression (37) peut alors se mettre sous la forme

$$R\,\overrightarrow{D} = 0 \tag{39}$$

où $R$ est une matrice de dimension $M \times M$ appelée matrice de rigidité du cadre ($M = N + E$).

Nous donnerons maintenant la matrice $R$ sous forme de tableau pour la construction représentée à la figure 11a qui comporte un étage de hauteur variable et un étage de hauteur constante. Comme cette construction comprend quatre nœuds en dehors des appuis et deux étages, nous avons six variables indépendantes : $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$, $\psi_4$, $v_I$, $v_{II}$.

Sur la première ligne, nous inscrivons les inconnues, c'est-à-dire les rotations des nœuds $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$, $\psi_4$, puis les déplacements des étages $v_I$ et $v_{II}$ en commençant toujours par l'étage inférieur.

Sur la première colonne du tableau, nous inscrivons successivement les nœuds, puis les étages dans l'ordre déjà considéré.

D'abord nous avons écrit les formules exprimant l'équilibre des nœuds puis les relations exprimant l'équilibre des traverses. On peut remarquer dans ce tableau que l'on a une disposition symétrique par rapport à la diagonale principale.

TABLEAU 1

*Matrice de rigidité du cadre représenté à la figure 11a*

| | $\psi_1$ | $\psi_2$ | $\psi_3$ | $\psi_4$ | $v_I$ | $v_{II}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $K_{11}$ | $K_{21}\ C_{21}$ | 0 | 0 | $D_{12}-D_{10}$ | $-D_{21}$ |
| 2 | $K_{12}\ C_{12}$ | $K_{22}$ | 0 | $K_{42}\ C_{42}$ | $D_{12}$ | $-D_{21}$ |
| 3 | 0 | 0 | $K_{33}$ | $K_{43}\ C_{43}$ | $D_{34}-D_{30}'$ | $-D_{43}$ |
| 4 | 0 | $K_{24}\ C_{24}$ | $K_{34}\ C_{34}$ | $K_{44}$ | $D_{34}$ | $-D_{43}$ |
| I | $D_{12}-D_{10}$ | $D_{21}$ | $D_{34}-D_{30}'$ | $D_{43}$ | $(G_{10}+G_{12}+$ $+G_{34}+G_{30}')$ | $-G_{21}-G_{43}$ |
| II | $-D_{12}$ | $-D_{21}$ | $-D_{34}$ | $-D_{43}$ | $-G_{12}-G_{34}$ | $G_{21}+G_{43}$ |

Dans lequel :

$$K_{11} = K_{10} + K_{13'} + K_{12}\,; \qquad K_{33} = K_{30'} + K_{34}\,;$$
$$K_{22} = K_{21} + K_{24}\,; \qquad K_{44} = K_{42} + K_{43}.$$

Il y aura lieu d'établir un tableau analogue au tableau 1 pour chaque construction étudiée. En pratique, il n'est pas

nécessaire d'établir toute la théorie dans chaque exemple, mais il est possible de remplir directement le tableau à l'aide de ce que nous avons dit sur les sous-matrices $R_{\psi\psi}$, $R_{\psi v}$, $R_{v\psi}$ et $R_{vv}$. Cette tâche est encore facilitée si l'on se souvient que les sous-matrices $R_{\psi\psi}$ et $R_{vv}$ sont symétriques et que la sous-matrice $R_{v\psi}$ est la transposée de $R_{\psi v}$.

### 4.5 *Charge critique du cadre*

La relation (39) se compose d'un système d'équations linéaires dont les inconnues sont des rotations et des déplacements qui prennent naissance par suite du déplacement fortuit du cadre par rapport à son état d'équilibre fondamental. Ces équations sont satisfaites en prenant :

$$\psi_i = 0 \; (i = 1 \text{ à } N) \text{ et } v_e = 0 \; (e = I \text{ à } E) \qquad (40)$$

Ceci indique que sous la charge considérée, il n'existe aucune autre forme d'équilibre dans le voisinage de la forme d'équilibre fondamental. Donc, le cadre est stable.

La forme d'équilibre après flambage ne devient possible que si les équations du système (39) comportent pour $\psi_i$ ($i = 1$ à $N$) et $v_e$ ($e = I$ à $E$) des solutions différentes de zéro, ce qui exige que le déterminant de ce système d'équations soit nul. En annulant ce déterminant, on obtient l'équation de stabilité :

$$|R| = \Delta = 0 \qquad (41)$$

*Marche à suivre pour le calcul de la charge critique*

1. On commence le calcul avec une valeur initiale de $\lambda = \lambda_0$ qui est plus petite que la valeur critique $\lambda_{cr}$ cherchée.

2. On évalue la charge axiale dans chacune des barres, en utilisant pour les charges nodales les relations (2).

3. Ensuite, on détermine les coefficients $K$, $C$, $D$ et $G$ relatifs à chaque barre compte tenu des types des liaisons aux extrémités comme cela est indiqué dans le paragraphe 4.1. On écrit les sous-matrices $R_{\psi\psi}$ et au besoin $R_{\psi v}$, $R_{v\psi}$ et $R_{vv}$, comme cela est décrit aux paragraphes 4.2 et 4.3. On calcule ensuite le déterminant $\Delta$.

4. Puis, $\lambda$ sera augmenté par étapes de $\delta_1$ et le calcul indiqué ci-dessus est répété jusqu'à ce que l'on arrive à des valeurs $\lambda = \lambda_{inf}$ et $\lambda = \lambda_{sup}$ différentes de la valeur $\delta_1$, de sorte que

pour $\lambda_{inf}$, $\Delta$ est positif,

pour $\lambda_{sup}$, $\Delta$ est négatif.

Ceci indique que la charge critique du cadre, définie par $\lambda = \lambda_{cr}$, se situe entre $\lambda_{inf}$ et $\lambda_{sup}$ (fig. 12).

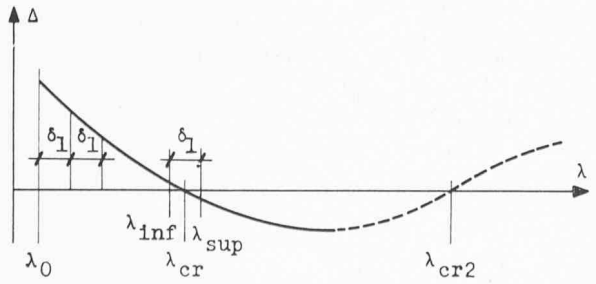


Fig. 12. — Courbe $\lambda - \Delta$ d'un cadre.

5. On continue les calculs au-delà de la valeur $\lambda_{inf}$ avec des accroissements réduits $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$ (avec $\delta_n < \ldots < \delta_2 < \delta_1$) pour améliorer l'exactitude dans la détermination de la charge critique.

6. On trouve ainsi les valeurs raffinées de $\lambda_{inf}$ et $\lambda_{sup}$ différentes de $\delta_n$. $\lambda_{cr}$ est alors pris égal à $(\lambda_{inf} + \lambda_{sup})/2$.

### 4.6 *Systèmes sans déplacements des nœuds*

Dans de nombreux cas pratiques, les déformations des cadres sont limitées aux rotations des nœuds. On est, par exemple, en présence d'un tel cas lorsque toutes les charges horizontales d'un cadre sont transmises par des planchers intermédiaires rigides à tous les étages à des voiles massifs d'extrémité ou à des pans en treillis placés dans les façades ou à des bâtiments voisins (voir fig. 1b, 1d, 1f et fig. 11b).

On obtient une simplification notable du calcul de la charge critique de ces cadres, parce que tous les déplacements $v_e$ ($e = I$ à $E$) des étages et toutes les équations correspondantes du système (36) disparaissent alors. La relation (39) s'écrit alors :

$$R_{\psi\psi} D_\psi = 0 \qquad (42)$$

et la condition de stabilité devient :

$$\Delta = |R_{\psi\psi}| = 0 \qquad (43)$$

Ces systèmes sont donc particulièrement simples à calculer.

A titre d'exemple, nous donnerons, ci-après, la matrice $R_{\psi\psi}$ pour le cadre représenté à la figure 11b. On constate que c'est le même cadre montré sur la figure 11a avec les déplacements des nœuds empêchés.

TABLEAU 2

*Matrice de rigidité du cadre représenté à la figure 11b*

| | $\psi_1$ | $\psi_2$ | $\psi_3$ | $\psi_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $K_{11}$ | $K_{21}$ $C_{21}$ | 0 | 0 |
| 2 | $K_{12}$ $C_{12}$ | $K_{22}$ | 0 | $K_{42}$ $C_{42}$ |
| 3 | 0 | 0 | $K_{33}$ | $K_{43}$ $C_{43}$ |
| 4 | 0 | $K_{24}$ $C_{24}$ | $K_{34}$ $C_{34}$ | $K_{44}$ |

### 4.7 *Simplifications dans les cas particuliers*

Nous allons indiquer les simplifications des calculs provenant de la symétrie du système considéré.

#### 4.7.1 *Flambage antimétrique*

Si les déplacements transversaux des nœuds ne sont pas empêchés par des liaisons extérieures, alors, les systèmes symétriques et symétriquement chargés périssent par flambage antimétrique.

Dans ce cas, les déformations complémentaires qui naissent à la charge critique sont antimétriques. Cette caractéristique permet de limiter les calculs à la moitié du cadre seulement.

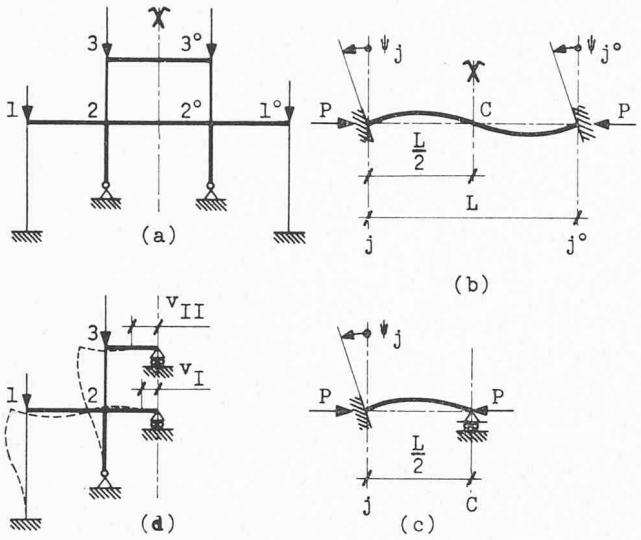


Fig. 13. — Flambage antimétrique d'un cadre dont l'axe de symétrie passe par le milieu d'une travée.

4.7.1a *L'axe de symétrie passe par le milieu d'une travée* (fig. 13a)

Puisque aussi bien le déplacement vertical et le moment dans la section $C$ sont nuls, figure 13b, on peut couper le système au point $C$ et remplacer l'action de la partie droite du système, sur la partie gauche, par un appui articulé déplaçable horizontalement (fig. 13c).

Le cadre représenté à la figure 13a se calcule donc exactement comme celui indiqué à la figure 13d. Les inconnues sont $\psi_1$, $\psi_3$, $\psi_2$, $v_I$ et $v_{II}$.

4.7.1b *L'axe de symétrie coïncide avec l'axe d'une colonne* (fig. 15a)

Deux cadres identiques sous des charges identiques auront des déformées semblables (voir fig. 14a et 14b). Les colonnes adjacentes peuvent donc être superposées et liées ensemble sans modifier la répartition intérieure des contraintes et des déformations. Les cadres montrés aux figures 14a et 14b et celui montré à la figure 14c auront les mêmes déformations et en particulier, ils auront la même charge critique.

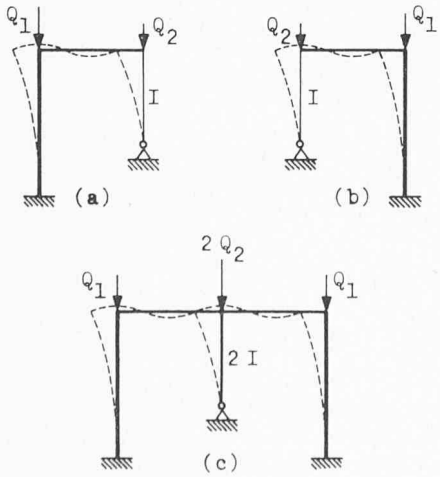


Fig. 14. — Flambage de cadres semblables.

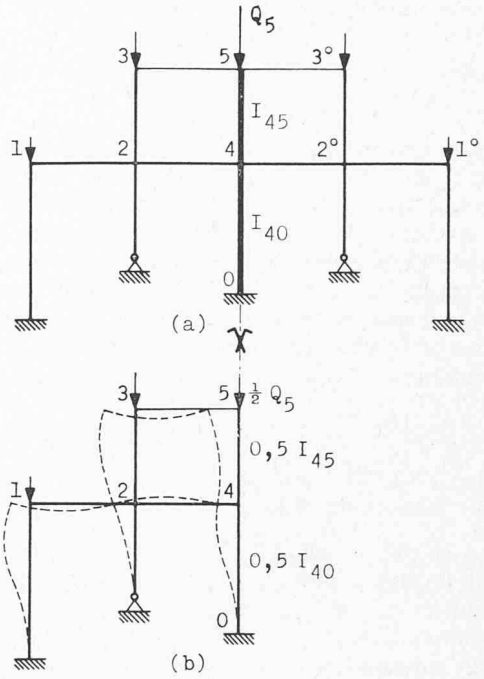


Fig. 15. — Flambage antimétrique d'un cadre dont l'axe de symétrie coïncide avec l'axe d'une colonne.

Le cadre représenté à la figure 15a se calcule donc exactement comme celui indiqué à la figure 15b où la moitié seulement des valeurs réelles de la rigidité et de la charge axiale des colonnes centrales, données à la figure 15a, entre en ligne de compte.

4.7.2 *Flambage symétrique*

Dans les systèmes symétriques et symétriquement chargés dont les déplacements transversaux des nœuds sont empêchés, les déformées complémentaires sont en général symétriques. Cette caractéristique permet de limiter les calculs et d'introduire les valeurs des angles de la moitié du portique seulement.

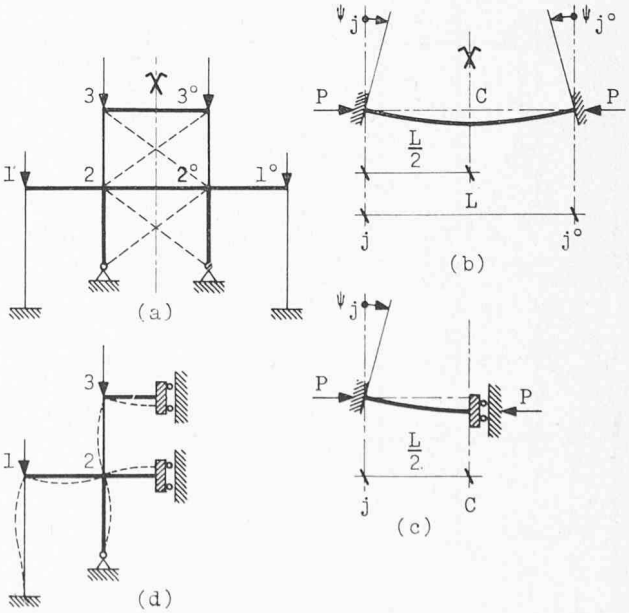


Fig. 16. — Flambage symétrique d'un cadre dont l'axe de symétrie passe par le milieu d'une travée.

On rencontre deux cas :

4.7.2a *L'axe de symétrie passe par le milieu d'une travée* (fig. 16a)

L'angle de rotation et le déplacement horizontal de la section $C$ qui se trouve sur l'axe de symétrie sont nuls. En plus, à cause de la symétrie, l'effort tranchant dans cette barre est nul. On peut couper le système au point $C$ et remplacer l'action de la partie droite du système, sur la partie gauche, par un appui déplaçable verticalement et encastré comme le montre la figure 16c. Le cadre représenté sur la figure 16a se calcule donc exactement comme celui indiqué à la figure 16d. Les inconnues sont $\psi_1$, $\psi_2$ et $\psi_3$.

4.7.2b *L'axe de symétrie coïncide avec l'axe d'une colonne* (fig. 17a)

Dans ce cas, la déformée complémentaire, correspondant à la plus petite charge critique, est antimétrique comme le montre la figure 17b. Par un raisonnement analogue à celui donné dans le paragraphe 4.7.1b, on constate que les inconnues qui interviennent dans le calcul de charge critique sont $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$, $\psi_4$ et $\psi_5$.

Notons que la déformée symétrique représentée à la figure 17c, avec les rotations nulles des nœuds situés sur la ligne de symétrie, correspond à une charge critique plus élevée que celle correspondant à la déformée antimétrique.

## 5. Exemples numériques

*Exemple 1.* Nous commençons par une application numérique relative à une construction élémentaire. Etudions la stabilité du portique simple symétrique et symétriquement chargé représenté à la figure 18a pour des valeurs numériques $L_c = 12{,}00$ m ; $L_p = 10{,}00$ m ; $I_c = I_p = 18\,260$ cm$^4$, $E = 2100$ t/cm$^2$ ; $Q = 100$ t. Comme le déplacement de la traverse est empêché, il nous

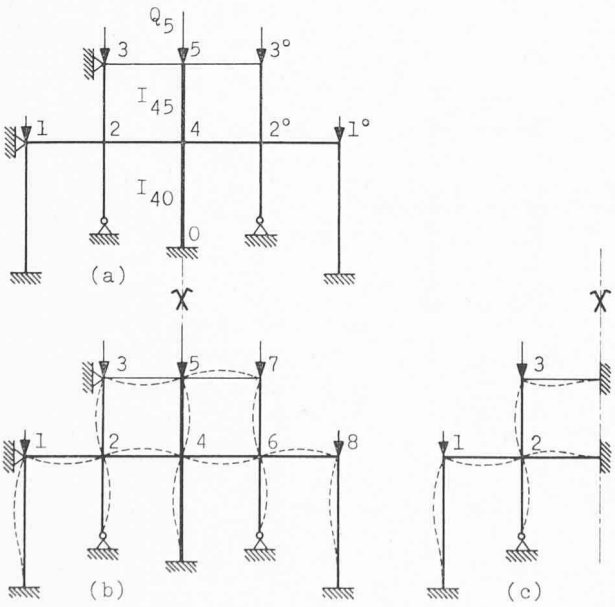


Fig. 17. — Flambage antimétrique et symétrique d'un cadre dont les déplacements des nœuds sont empêchés et dont l'axe de symétrie coïncide avec l'axe d'une colonne.

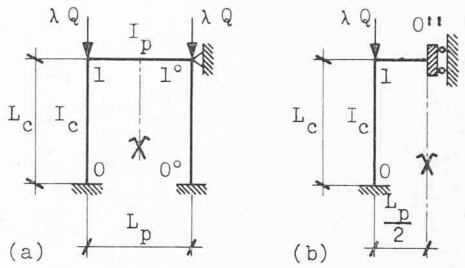


Fig. 18. — Portique simple étudié dans l'exemple 1.

suffit d'étudier le portique représenté à la figure 18b, dont le nœud 0″ ne peut pas tourner mais peut subir un délacement vertical. Le nombre d'inconnues est égal à un : à savoir la rotation $\psi_1$.

La condition de stabilité est donnée par la relation :

$$\Delta = K_{11} = 0$$

ou bien

$$K_{10} + K_{10''} = 0$$

On a d'après les relations (27) :

$$K_{10''} = \frac{E\,I_{10''}}{L_{10''}} = \frac{2\,E\,I_p}{L_p}$$

et la condition de stabilité se simplifie comme suit :

$$\frac{E\,I_c}{L}\,S_{10} + \frac{2\,E\,I_p}{L_p} = 0 \rightarrow S_{10} +$$

$$+\,2\,\frac{I_p\,L_c}{I_c\,L_p} = 0 \rightarrow \Delta = S_{10} + 2{,}4 = 0$$

Le tableau suivant représente le calcul du déterminant $\Delta$, pour des valeurs croissantes de $\varphi$ :

| $\varphi$ | $S_{10}$ | $\Delta$ |
|---|---|---|
| 5,08 | − 2,3274 | + 0,0726 |
| 5,09 | − 2,3830 | + 0,0170 |
| 5,10 | − 2,4394 | − 0,0394 |

Donc, la valeur critique du paramètre $\varphi = \varphi_{cr} = 5{,}095$.

Cette valeur correspond à celle donnée par le tableau du livre de Bleich [8]. La valeur critique du paramètre de charge $\lambda$ est

$$\lambda_{cr} = \frac{\varphi^2_{cr}}{Q}\,\frac{E\,I_c}{L^2_c} = 6{,}91$$

*Exemple 2.* Considérons maintenant la même construction que précédemment, mais pour laquelle le déplacement transversal des nœuds est permis (fig. 19a). Dans ce cas, c'est le flambage antimétrique qui intervient et d'après ce que nous avons vu au paragraphe 4.7.1, il nous suffit d'étudier la construction représentée à la figure 19b dont l'appui articulé 0′ est déplaçable horizontalement.

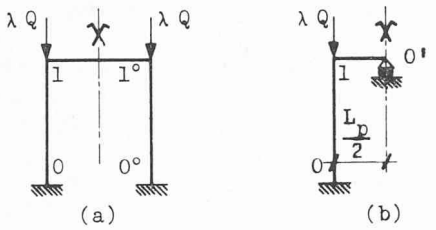


Fig. 19. — Portique simple étudié dans l'exemple 2.

Le nombre d'inconnues est égal à deux : $\psi_1$, $v_I$. Nous avons comme condition de stabilité :

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & -D_{10} \\ -D_{10} & G_{10} \end{vmatrix} = (K_{10} + K_{10'})\, G_{10} - D^2_{10} = 0$$

où

$$K_{10'} = 3\,\frac{E\,I_{10'}}{L_{10'}}$$

Après quelques simplifications, la condition de stabilité s'écrit :

$$\Delta = (S_{10} + 7{,}2)\,[2\,S_{10}(1 + C_{10}) - \varphi^2_{10}] - [S_{10}(1 + C_{10})]^2 = 0$$

Le tableau suivant représente le calcul du déterminant $\Delta$, pour des valeurs croissantes de $\varphi$ :

| $\varphi$ | $S_{10} + 7{,}2$ | $x = S_{10}(1 + C_{10})$ | $2x - \varphi^2$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|
| 2,70 | 10,1179 | 5,2297 | 3,1694 | 4,7180 |
| 2,75 | 10,0723 | 5,1991 | 2,8357 | 1,5314 |
| 2,80 | 10,0254 | 5,1679 | 2,4958 | − 1,6858 |
| 2,76 | 10,0630 | 5,1929 | 2,7682 | 0,8902 |
| 2,77 | 10,0537 | 5,1867 | 2,7005 | 0,2481 |
| 2,28 | 10,0443 | 5,1804 | 2,6324 | − 0,3959 |

D'où on obtient $\varphi_{cr} = 2{,}775$.

Ce résultat correspond exactement à celui donné par le tableau du livre de Bleich [8]. La valeur critique du paramètre de charge $\lambda$ est :

$$\lambda_{cr} = \frac{\varphi^2_{cr}\, E\, I_c}{Q\;\; L^2_c} = 2{,}056.$$

*Exemple 3.* Soit à calculer la charge critique du cadre à deux panneaux représenté à la figure 20a pour des valeurs numériques $L_c = 16{,}00$ m ; $L_p = 20{,}00$ m ; $I_c = I_p = 18\,260^4$ cm ; $E = 2100$ t/cm² ; $Q = 10$ t.

Nous avons ici un cadre symétrique et symétriquement chargé dont le nombre des panneaux est pair. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 4.7.1b, il nous suffit d'étudier le cadre représenté à la figure 20b. Les inconnues intervenant dans la condition de stabilité sont : $\psi_1$, $\psi_2$, $v_I$.

La condition de stabilité est donnée par la relation :

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{21}\,C_{21} & -D_{10'} \\ K_{12}\,C_{12} & K_{22} & -D_{20'} \\ -D_{10'} & -D_{20'} & G_{10'} + G_{20'} \end{vmatrix} = 0$$

où

$$K_{11} = K_{10'} + K_{12}\,; \quad K_{22} = K_{20'} + K_{21}$$

et

$$K_{12} = K_{21} = 4\,\frac{E\,I_p}{L_p}\,; \quad \varphi_{10'} = \varphi_{20'}$$

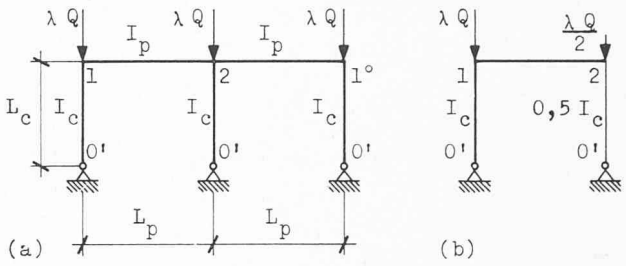


Fig. 20. — Cadre à deux panneaux étudié dans l'exemple 3.

Le tableau suivant donne les valeurs de $\Delta$ pour des valeurs croissantes de $\lambda$ :

| $\lambda$ | $\Delta$ |
|---|---|
| 4,00 | 0,4148 |
| 5,00 | 0,2775 |
| 6,00 | 0,1481 |
| 7,00 | 0,0267 |
| 8,00 | − 0,0865 |
| 7,20 | 0,0034 |
| 7,40 | − 0,0196 |
| 7,25 | − 0,0024 |

D'où $\lambda_{cr} = 7{,}23$.

Cette valeur correspond à celle donnée dans la référence [6].

*Exemple 4.* Soit à étudier le portique multiple [7] représenté à la figure 21a, pour les valeurs numériques $I = 0{,}150$ ; $L = 12$ ; $E = 2000$ ; $Q = 2$ ; $L = L_c = 1{,}5\ L_p$.

Ici nous avons une construction symétrique, symétriquement chargée dont le nombre des travées est pair. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 4.7.1b, nous sommes ramenés à étudier la construction représentée à la figure 21b. Cette dernière est elle-même une construction symétrique et symétriquement chargée dont le nombre des travées est impair. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 4.7.1a, nous pouvons nous limiter à l'étude de la construction représentée à la figure 21c.

Ainsi, le nombre d'inconnues est réduit à quatre ($\psi_1$, $\psi_2$, $v_I$, $v_{II}$) au lieu de huit nécessaires pour le cadre représenté à la figure 21a.

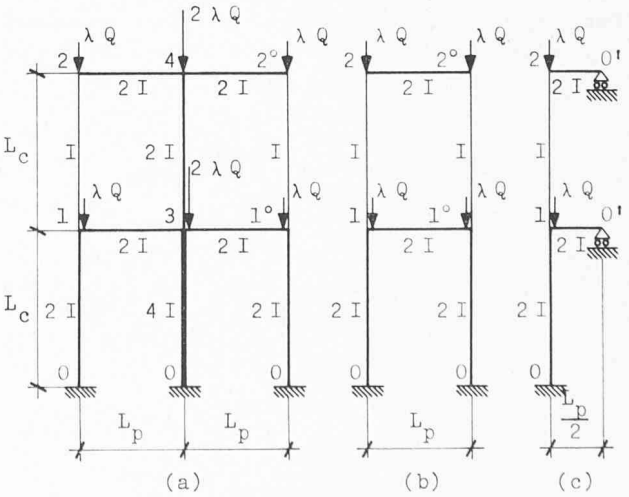


Fig. 21. — Portique multiple étudié dans l'exemple 4.

La condition de stabilité est donnée par la relation :

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{21}\,C_{21} & D_{12}-D_{10} & -D_{21} \\ K_{12}\,C_{12} & K_{22} & D_{12} & -D_{21} \\ D_{12}-D_{10} & D_{21} & G_{10}+G_{12} & -G_{21} \\ -D_{12} & -D_{21} & -G_{12} & G_{21} \end{vmatrix} = 0$$

où

$$K_{11} = K_{10} + K_{10'} + K_{12}\,; \qquad K_{22} = K_{21} + K_{20'}$$

On a également :

$$\varphi_{10} = \varphi_{12} = \varphi = \sqrt{\frac{\lambda\,Q\,L^2}{E\,I}}\,; \quad K_{10'} = K_{20'} = 18\,\frac{E\,I}{L}$$

Le tableau suivant donne les valeurs de $\Delta$ pour des valeurs croissantes de $\lambda$ :

| $\lambda$ | $\Delta$ |
|---|---|
| 4,00 | 0,8633 |
| 5,00 | 0,4908 |
| 6,00 | 0,2192 |
| 7,00 | 0,0435 |
| 8,00 | − 0,0418 |
| 7,20 | 0,0195 |
| 7,40 | − 0,0012 |
| 7,25 | 0,0139 |
| 7,30 | 0,0086 |
| 7,35 | 0,0036 |
| 7,40 | − 0,0012 |

D'où $\lambda_{cr} = 7{,}3875$

et la charge critique $= \lambda_{cr}\,Q = 14{,}775$

La valeur donnée dans la référence précitée est égale à 14,7723. Dans cette référence, le problème a été étudié par la méthode d'énergie et on a dû déterminer trois fois les valeurs propres des matrices d'ordre 8.

*Exemple 5.* En employant les résultats des paragraphes 4.1 à 4.5, on arrive à résoudre facilement divers problèmes des colonnes isolées. Prenons, par exemple, les cas représentés à la figure 22a. C'est une barre encastrée à son extrémité inférieure et articulée à son extrémité supérieure. Les déplacements transversaux des deux extrémités sont empêchés. La colonne a une inertie constante $2I$ entre les nœuds 0 et 1 et une inertie constante $I$ entre les nœuds 1 et 2.

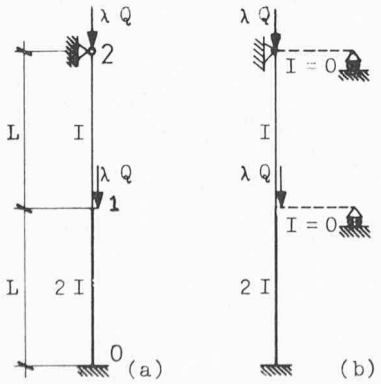


Fig. 22. — Colonne étudiée dans l'exemple 5.

Remarquons d'abord que cette colonne peut être considérée comme un cas limite du cadre représenté à la figure 22b, quand le moment d'inertie des poutres tend vers zéro.

On reconnaît tout de suite que les inconnues intervenant dans la condition de stabilité sont $\psi_1$ et $v_I$. La condition de stabilité est donnée par la relation :

$$\Delta = \begin{vmatrix} (K_{10}+K_{12'}) & (D_{12'}-D_{10}) \\ (D_{12'}-D_{10}) & (G_{10}+G_{12'}) \end{vmatrix} = 0$$

On a également :

$$\varphi_{10} = \varphi_{12'} = \varphi = \sqrt{\frac{\lambda\,Q\,L^2}{E\,I}}$$

Après quelques simplifications la condition de stabilité s'écrit :

$$\Delta = [2\,S_{10} + S_{12'}]\;[4\,S_{10}\,(1 + C_{10}) + S_{12'} - 3\,\varphi^2] - \\ -[S_{12'} - 2\,S_{10}\,(1 + C_{10})]^2 = 0$$

Le tableau suivant donne les valeurs de $\Delta$ pour des valeurs croissantes de $\lambda$ :

| $\varphi$ | $\Delta$ |
|---|---|
| 2,00 | 28,8845 |
| 2,20 | − 4,3270 |
| 2,17 | + 0,7018 |
| 2,18 | − 0,9747 |

D'où

$$\varphi_{cr} = 2{,}175.$$

Pour des valeurs numériques $L = 8{,}00$ m ; $I = 18\,260\,\text{cm}^4$ ; $E = 2100$ t/cm², la charge critique de la colonne est égale à 283,5 t.

On constate d'après les exemples qui précèdent, que la mise en équations du problème, c'est-à-dire l'établissement du tableau donnant le déterminant $\Delta$, est facile. Le seul travail matériel qui puisse être important est l'évaluation de ce déterminant pour des valeurs croissantes de $\lambda$ qui est d'ailleurs répétative en nature. Dans les exemples étudiés jusqu'à maintenant, nous avons volontairement choisi des cadres très simples afin de ne pas surcharger inutilement les calculs. Naturellement, dans la pratique, il n'en est pas toujours ainsi mais lorsqu'on se trouve en présence d'un système comportant un grand nombre d'inconnues, on peut alors avoir recours à un ordinateur pour déterminer $\lambda_{cr}$.

Dans ce qui suit, nous donnons le calcul de charge critique de deux cadres dimensionnés ailleurs [9, 10] l'un d'après les normes allemandes, l'autre d'après les normes françaises.

*Exemple 6.* Considérons l'ossature à une seule travée et plusieurs étages (fig. 23a) soumis à des charges croissantes [9]. Les profils adoptés pour les barres et les forces axiales dans les colonnes, correspondant à la valeur de $\lambda = 1$, sont indiqués dans les tableaux suivants :

| Poutre | Profil |
|---|---|
| 1-1 | I 45 |
| 2-2 | I 45 |
| 3-3 | I 45 |
| 4-4 | I 42½ |
| 5-5 | I 38 |
| 6-6 | I 30 |

| Colonne | Profil | $P\ (=\lambda P_s)$ pour $\lambda=1$ |
|---|---|---|
| 0-1 | 2 I 32 | 77,4 t |
| 1-2 | 2 I 32 | 60,9 |
| 2-3 | 2 I 32 | 44,4 |
| 3-4 | 2 I 28 | 27,9 |
| 4-5 | 2 I 28 | 13,5 |
| 5-6 | 2 I 28 | 3,2 |

On a ici un cadre symétrique et symétriquement chargé dont l'axe de symétrie passe par le milieu d'une travée. Si l'on se réfère au paragraphe 4.7.1a, on constate qu'il est suffisant d'étudier le cadre représenté à la figure 23b. Les douze inconnues intervenant dans la condition de stabilité sont $\psi_i\ (i = 1$ à $6)$ ; $v_e\ (e =$ I à VI). Le tableau suivant donne les valeurs de $\Delta$ pour des valeurs croissantes de $\lambda$, obtenues à l'aide d'un ordinateur.

| $\lambda$ | $\Delta$ |
|---|---|
| 9,00 | 1,0418 |
| 17,00 | 0,1752 |
| 25,00 | − 0,0149 |
| 21,00 | 0,0349 |
| 22,00 | 0,0161 |
| 23,00 | 0,0021 |
| 24,00 | − 0,0081 |
| 23,20 | − 0,0003 |

D'où

$$\lambda_{cr} = 23{,}18.$$

*Exemple 7.* Le cadre représenté à la figure 24 fait partie de l'ossature métallique d'un immeuble d'habitation à étages [10]. Il comporte 11 étages (9 étages au-dessus du rez-de-chaussée et du sous-sol) de deux travées égales. La hauteur de chaque étage est de 3 m et la largeur de chaque travée est de 6 m. Les profils adoptés pour les barres et les forces axiales dans les colonnes, correspondant à la valeur de $\lambda = 1$, sont donnés dans les tableaux ci-après. Rappelons que les profils des colonnes intermédiaires ont été choisis par nous, en suivant les règles adoptées dans la référence précitée.

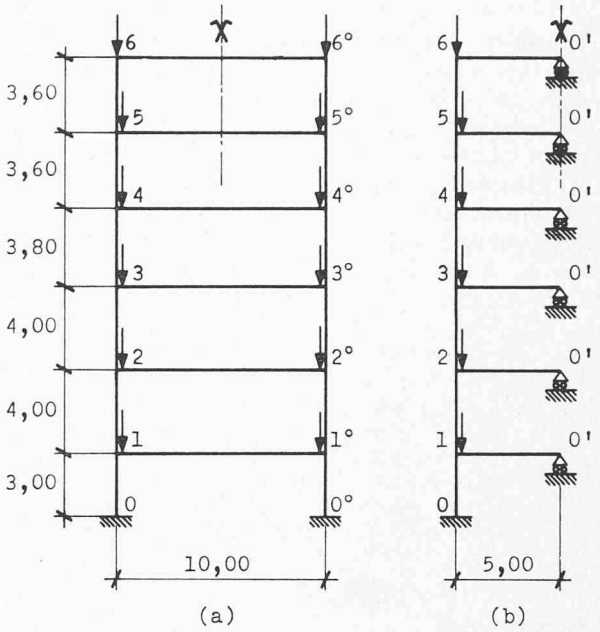


Fig. 23. — Cadre étudié dans l'exemple 6.

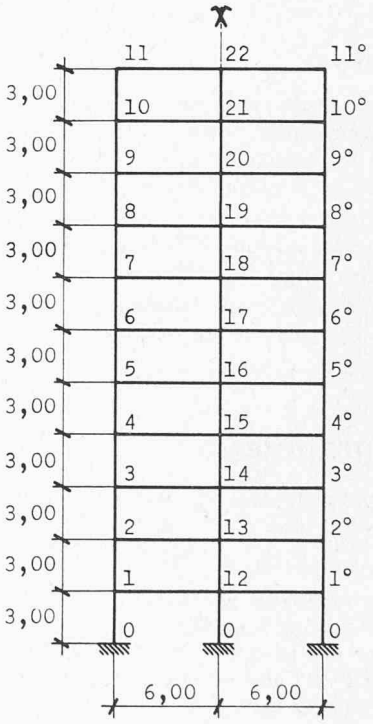


Fig. 24. — Cadre étudié dans l'exemple 7.

*Poutres*

| Poutre | Profil |
|---|---|
| 1-12 | IPN 360 |
| 2-13 | IPN 360 |
| 3-14 | IAP 360 M* |
| 4-15 | IAP 360 M |
| 5-16 | IAP 360 M |
| 6-17 | IPN 300 |
| 7-18 | IPN 300 |
| 8-19 | IAP 300 M |
| 9-20 | IAP 300 M |
| 10-21 | IAP 250 C* |
| 11-22 | IAP 250 |

*Colonnes extérieures*

| Colonne | Profil | $P\ (=\lambda P_s)$ pour $\lambda=1$ |
|---|---|---|
| 0-1 | HE 32 | 117,79 t |
| 1-2 | HE 32 | 107,38 |
| 2-3 | HE 32 | 99,97 |
| 3-4 | HE 28 | 86,56 |
| 4-5 | HE 28 | 76,15 |
| 5-6 | HE 24 | 66,74 |
| 6-7 | HE 24 | 55,17 |
| 7-8 | HE 20 | 44,43 |
| 8-9 | HE 20 | 33,53 |
| 9-10 | HE 14 | 22,46 |
| 10-11 | HE 14 | 11,23 |

*Colonnes intérieures*

| Colonne | Profil | $P\ (=\lambda P_s)$ pour $\lambda = 1$ |
|---|---|---|
| 0-12 | HE 36 | 145,92 t |
| 12-13 | HE 36 | 133,28 |
| 13-14 | HE 36 | 120,54 |
| 14-15 | HE 32 | 107,90 |
| 15-16 | HE 32 | 95,26 |
| 16-17 | HE 28 | 82,58 |
| 17-18 | HE 28 | 69,48 |
| 18-19 | HE 24 | 56,16 |
| 19-20 | HE 24 | 42,52 |
| 20-21 | HE 20 | 28,56 |
| 21-22 | HE 20 | 14,28 |

* C — série courante.
* M — série mince.

Le cadre est symétrique et symétriquement sollicité ; l'axe de symétrie coïncide avec l'axe des colonnes intermédiaires. Le paragraphe 4.7.1b montre qu'il est possible d'étudier seulement la moitié du cadre. Le nombre d'inconnues intervenant dans la condition de stabilité est égal à 33. Elles sont $\psi_i$ ($i = 1$ à 22) ; $v_e$ ($e =$ I à XI).

Le tableau suivant présente les valeurs de $\Delta$ pour des valeurs croissantes de $\lambda$, obtenues à l'aide d'un ordinateur.

| $\lambda$ | $\Delta$ |
|---|---|
| 9,00 | 956,4850 |
| 13,00 | 0,1890 |
| 14,00 | − 0,4029 |
| 13,20 | 0,0759 |
| 13,40 | − 0,0668 |
| 13,25 | 0,0417 |
| 13,30 | 0,0000 |

d'où $\lambda_{cr} = 13{,}30$.

Deux minutes suffisent à l'ordinateur pour faire ce calcul.

## 6. Conclusions

Dans cet article, nous avons présenté une méthode, simple et rapide, pour calculer la charge critique élastique des cadres rectangulaires plans. Pour commencer, nous avons clairement exprimé les relations existant entre les forces et les déformations qui conduisent à l'établissement de la matrice de rigidité. Puis nous avons indiqué le processus mathématique, qui devient un travail de routine, pour évaluer la charge critique. La méthode est bien adaptée aux possibilités des machines électroniques. Nous basant sur cette méthode, nous avons préparé un programme qui permet d'évaluer $P_{cr}^{el}$ des cadres allant jusqu'à quinze étages et deux travées. En introduisant cette valeur dans la formule de Rankine modifiée (1), on obtient la charge portante du cadre. Cette formule simple ne tient cependant pas suffisamment compte du phénomène complexe de stabilité élasto-plastique des cadres. Donc, pour étudier des cadres non usuels ou pour vérifier des projets définitifs, on utilisera des méthodes plus précises [1, 2, 3].

*Remerciements*

*Les auteurs remercient tous les membres de l'ICOM, en particulier M. R. Dutoit, professeur de construction métallique à l'Ecole technique supérieure de Genève, qui a aidé à la rédaction de cet article, M. M. Fiaux, qui a préparé les dessins, et Mlle C. Dubois, qui a tapé le texte.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Plastic Design of Multi-Story Frames*. Lehigh University, Summer 1965.

[2] VINNAKOTA S. : *Flambage des cadres dans le domaine élasto-plastique*. Thèse EPFL, 1967.

[3] PARIKH B. P. : *Elastic-Plastic Analysis and Design of Unbraced Multi-Story Frames*. Thèse Lehigh University, 1966.

[4] MERCHANT W. : *The Failure Load of Rigidly Jointed Frame Works as Influenced by Stability*. Structural Engineer, 32, p. 185, 1954.

[5] LIVESLEY R. K. et CHANDLER D. B. : *Stability Functions for Structural Frameworks*. Manchester University Press, 1956.

[6] BADOUX J. C., JACCOUD J. P., WÜST et DUTOIT R. : *Stabilité des Constructions*. 1969.

[7] DUPUIS G. : *Contribution à l'étude de la stabilité élastique*. Thèse EPFL, 1967.

[8] BLEICH F. : *Buckling Strength of Metal Structures*. Mac Graw-Hill Book, Co., 1952.

# Bibliographie

**Pratique du PERT. Méthode de contrôle des délais et des coûts,** par *P. Sicard*, ingénieur E.C.P. 2e édition, Paris, Dunod, 1970. — Un volume 14×22 cm, VIII - 129 pages, 42 figures. Prix : broché, 21 F.

Dans la recherche de l'organisation la plus efficace, c'est-à-dire la plus rapide et la plus sûre, pour élaborer et contrôler des programmes d'études ou de réalisation, la méthode PERT est celle qui, par ses preuves éclatantes aux Etats-Unis, a remporté le plus grand succès.

Dans son ouvrage, P. Sicard tente de mettre en lumière les difficultés rencontrées par les néophytes et de donner les moyens de les résoudre. Evitant les aspects mathématiques susceptibles de dérouter certains lecteurs, c'est dans un langage courant qu'il traite les divers paliers de mise en pratique que l'utilisateur franchira dans l'élaboration, puis le contrôle d'un programme ; il en verra d'abord l'aspect délais et en viendra naturellement à l'aspect coût dont l'utilisation complexe sera résolue avec les ordinateurs. Il démystifie une méthode dont les aspects concrets et utiles seront facilement accessibles et qui offre à ceux qui la pratique des possibilités considérables d'utilisation au fur et à mesure de leur expérience. A signaler que, d'après cet exposé, la réalisation d'une usine très complexe et la réorganisation d'une société de construction ont été programmées, de même que des programmes administratifs et financiers dans l'optique d'une orientation nationale vers les méthodes type P.P.B.S. (Planning Programming Budgeting System).

Cet ouvrage intéressera tous ceux qui ont à résoudre des problèmes d'organisation et de programmes : industriels, ingénieurs, architectes. Traitant les problèmes d'actualité de façon simple, cet ouvrage s'adresse aussi aux professeurs et étudiants des Facultés et des grandes écoles.

**Nouveaux procédés de mesure en hydrologie. Méthodes de base de l'électrohydrométrie,** par *H. Andreae*, professeur habil., docteur ès sciences naturelles, ancien directeur de la section hydrologie et directeur de l'Institut hydrologique à la Faculté des sciences de l'Université Humboldt de Berlin. Paris, Dunod, 1970. — Un volume 16×24 cm, XVIII - 901 pages, 67 figures. Prix : broché, 44 F.

Le présent ouvrage, qui a déjà fait l'objet de plusieurs éditions en langue allemande, expose les problèmes fondamentaux de l'hydrologie et de l'économie de l'eau et donne une description des nouveaux procédés de mesure en tenant compte des découvertes les plus récentes de l'électricité, de la télémécanique et de l'électronique. Ces procédés ont été mis au point par l'auteur lui-même qui s'est vu décerner la médaille Humboldt pour les services rendus par ses nombreux travaux.

Les possibilités d'automatisation de ces mesures, grâce à l'emploi de méthodes électriques de télémesure et de procédés de transmission sans fil, sont, notamment, mises en évidence. Ce sont les bases d'une nouvelle science, l'électrohydrométrie, qui sont présentées dans cette étude.

Ce livre contient de plus de nouvelles définitions sur l'hydrologie et traite également de problèmes généraux et de leurs solutions.

Il représente un instrument de travail utile pour les hydrologues, les géologues, les géophysiciens, les géographes, les météorologues, les spécialistes d'économie des eaux, d'économie rurale et forestière, les architectes industriels.