Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 98 (1972)

Heft: 10

Artikel: Calcul des ponts biais à poutres multipes sans entretoises par la méthode des éléments finis

Autor: Jirousék, Jaroslav

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-71546

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

COMMUNICATION DE LA CHAIRE DE STATIQUE ET DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX DE L'EPFL

Calcul des ponts biais à poutres multiples sans entretoises par la méthode des éléments finis

par J. JIROUŠEK, Dr sc. techn., ing. SIA[1]

Dotée pendant très longtemps de moyens relativement modestes, la Chaire de statique et de résistance des matériaux de l'Ecole polytechnique de Lausanne s'est consacrée essentiellement à sa tâche prioritaire, l'enseignement, laissant par la force des choses la recherche au second plan. Bénéficiant maintenant de possibilités plus étendues, elle a eu le bonheur de pouvoir s'attacher M. J. Jiroušek qui, après avoir enseigné dans plusieurs universités étrangères, lui apporte le concours de ses connaissances et de sa compétence, qui sont grandes.

Nous sommes heureux de présenter ici cette publication ; si elle représente pour son auteur la suite d'un travail commencé ailleurs, elle est pour notre chaire le témoignage d'une activité que nous espérons promise à de nouveaux développements.

Professeur M.-H. DERRON.

Introduction

Le pont à poutres multiples sans entretoises est formé par un système de poutres préfabriquées placées l'une à côté de l'autre et liées le long de la portée (voir, par exemple, fig. 1). L'obliquité de l'ouvrage en plan peut être obtenue par un décalage des extrémités des poutres. La liaison entre les poutres est réalisée par le remplissage des logements (shear key) aménagés le plus souvent dans la partie supérieure des joints (fig. 2). De plus, dans certains cas, l'ouvrage peut être aussi précontraint latéralement. Si la continuité ainsi obtenue est suffisante, on peut calculer approximativement l'ouvrage comme une dalle orthotrope. Par contre, si la précontrainte latérale est faible ou inexistante, les déformations de l'ouvrage et le retrait peuvent entraîner un décollement des clavettes de remplissage des joints. La rigidité transversale, et par conséquent aussi la possibilité de transmission des moments transversaux disparaissent. On peut alors considérer que les poutres sont liées le long de la portée par des charnières longitudinales sans frottement. Cette hypothèse, très généralement admise en pratique, a été adoptée par exemple aux Etats-Unis par le « Highway Research Bord » (voir le récent rapport n° 83 [2]). C'est également ce que nous ferons dans l'étude qui va suivre.

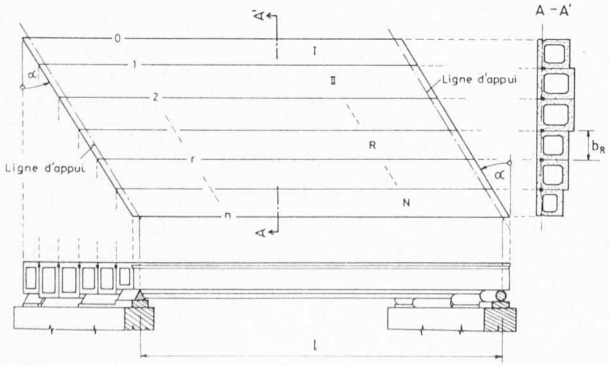

Fig. 1. — Pont biais à poutres multiples.

Les méthodes de calcul des ponts multiples à charnières longitudinales sans frottement peuvent être réparties en trois catégories principales. La première, la plus fréquente, est la *théorie de la plaque articulée* (voir par exemple [20], [25] ... [3]) ; elle comprend toutes les méthodes qui analysent l'ouvrage approximativement comme un continuum sans rigidité transversale de flexion. La seconde catégorie comprend les *méthodes des déformations compatibles* (voir par exemple [1], [4], [12], [14] ...) ; elles analysent le système des poutres en se basant sur les principes généraux de la méthode des forces. La troisième catégorie, celle des *méthodes d'équilibre des joints* (voir [9], [10] ...), adopte au contraire les principes généraux de la méthode des déformations.

[1] Chargé de cours, premier assistant à la chaire de statique et de résistance des matériaux de l'EPFL.

[2] National Cooperative Highway Research program Report 83 (1970).

[3] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin de l'article.

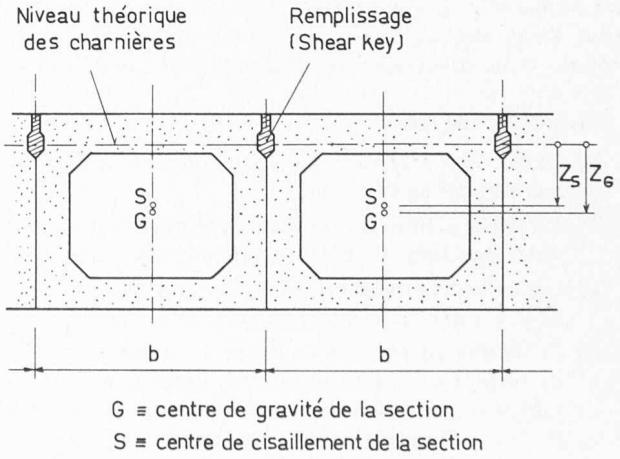

Fig. 2. — Géométrie de la section ; charnières fictives formées par le remplissage des joints.

A cause des complications mathématiques, les méthodes connues se limitent presque en totalité à des ponts rectangulaires. De plus, on suppose aussi presque toujours que toutes les poutres ont la même section. D'après ce que nous savons, les travaux concernant les ponts biais se limitent à ceux (voir [9], [10] et [16]) qui ne traitent que le cas où les charnières entre les poutres sont au niveau des centres de cisaillement des sections. Ils ont, néanmoins, clairement démontré l'effet non négligeable du biais sur l'interaction des poutres du pont.

Le but de la présente étude est de montrer les possibilités d'application de la méthode des éléments finis au calcul des ponts biais à poutres multiples. Vu l'utilisation croissante des ordinateurs dans la pratique, on peut envisager que l'élaboration d'un programme standard de calcul des ponts biais (en général avec des poutres de sections inégales) permettrait de résoudre la majorité des problèmes.

Afin d'obtenir une solution suffisamment simple, il a fallu formuler certaines hypothèses simplificatrices. Celles-ci sont en l'occurrence toujours très bien satisfaites pour les poutres-caissons, mais le sont en général beaucoup moins pour les poutres à section ouverte. La méthode de calcul développée dans ce travail s'applique donc essentiellement aux ponts à poutres de section fermée.

La technique de calcul par éléments finis utilisée ici se base sur la subdivision en plan de chaque poutre en une série de macro-éléments trapézoïdaux et sur les fonctions de déplacement de ces éléments. Ces fonctions, exprimées par rapport aux paramètres nodaux des angles de l'élément, assurent aussi bien la compatibilité des déformations des éléments de la même poutre, que celle des poutres elles-mêmes aux joints. Partant du théorème du minimum de l'énergie potentielle, on développe la matrice de rigidité de l'élément liant les forces nodales aux déplacements nodaux. Ceux-ci sont ensuite calculés à partir des conditions d'équilibre aux nœuds de l'assemblage.

1re partie : Théorie

1. Formulation du problème et hypothèses de base

Considérons un pont biais à poutres multiples sans entretoises (fig. 1). Les poutres peuvent être de section différente mais constante le long de la portée. L'ouvrage n'est pas précontraint latéralement, ou cette précontrainte est négligeable. Il s'agit d'étudier l'interaction des poutres sous l'effet des charges verticales et du tassement des appuis, et de développer une méthode pratique de calcul.

Hypothèses de base :

a) les sections transversales des poutres possèdent un axe vertical de symétrie ;

b) les liaisons entre les poutres sont équivalentes à des charnières longitudinales travaillant sans frottement ;

c) toutes les charnières liant les poutres entre elles se trouvent dans le même plan horizontal (fig. 2) ;

d) l'obliquité en plan de l'ouvrage n'est pas excessive, de sorte que les dimensions des sections biaises des poutres, parallèlement aux lignes d'appui, sont petites vis-à-vis de la longueur des poutres ;

e) la section transversale des poutres est indéformable dans son plan ;

f) les appuis sont constitués de façon à ne pas entraver le gauchissement des sections d'appui.

D'autres hypothèses auxiliaires seront formulées au cours du développement de la méthode de calcul.

2. Efforts internes des poutres et énergie potentielle de déformation

Considérons une poutre de l'ouvrage (voir par exemple la figure 3, où G désigne le centre de gravité de la section et S son centre de torsion). Dans le cas particulier où S se confond avec G et où les charnières entre les poutres se trouvent au niveau des centres de torsion et si les sections ne se gauchissent pas, les charges verticales appliquées sur l'ouvrage n'engendrent qu'une flexion verticale et une torsion des poutres autour de S. Alors, les points du plan horizontal passant par les charnières ne se déplacent pas dans ce plan ($u = v = 0$) et les forces d'interaction d'une poutre sur l'autre, par l'intermédiaire des charnières, sont toutes verticales. Par contre, dans le cas général où ces conditions simplificatrices ne sont pas réalisées, les points du plan passant par les charnières subissent des déplacements horizontaux et les forces d'interaction ont, en plus des composantes verticales, des composantes horizontales latérales et longitudinales (respectivement perpendiculaires et parallèles aux axes des poutres). Ainsi, les poutres sont en général soumises non seulement à la flexion verticale et à la torsion, mais aussi à la flexion horizontale et aux efforts normaux.

La figure 3 montre les efforts internes de la section transversale d'une poutre dans ce cas général. On désigne par M_y, M_z les moments fléchissants, par T le moment de torsion, par Q_y, Q_z les efforts tranchants et par N l'effort normal. Les composantes des déplacements selon les directions du système global d'axes x, y, z sont respectivement u, v et w (fig. 3). De plus, ψ désigne la rotation autour de l'axe de la poutre.

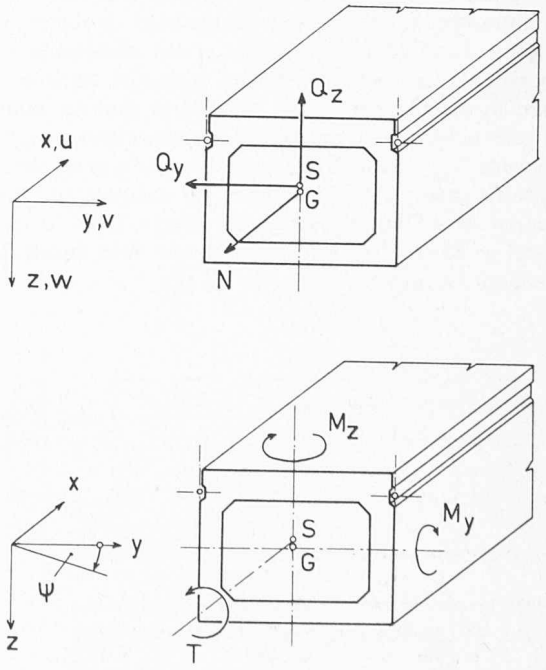

Fig. 3. — Composantes des déplacements (u, v, w, ψ) et efforts internes d'une poutre du pont.

Avec les conventions de la figure 3, les moments de flexion, le moment de torsion et l'effort normal s'expriment en fonction des déformations par

$$M_y = -EI_y \frac{\mathrm{d}w_S}{\mathrm{d}x^2}, \tag{1a}$$

$$M_z = -EI_z \frac{\mathrm{d}^2 v_S}{\mathrm{d}x^2}, \tag{1b}$$

$$T = GJ \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} - EC \frac{\mathrm{d}^3\psi}{\mathrm{d}x^3}, \tag{1c}$$

$$N = EA \frac{\mathrm{d}u_G}{\mathrm{d}x}. \tag{1d}$$

D'autre part, le bimoment dû aux contraintes normales de torsion non uniforme (torsion fléchie) vaut

$$B = -EC \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}. \tag{1e}$$

Dans ces relations,

I_y, I_z = moment d'inertie de la section par rapport à l'axe principal parallèle respectivement à y et z et passant par G [cm^4] ;

J = moment de rigidité de torsion uniforme (Saint-Venant) [cm^4] ;

C = moment d'inertie sectorielle [cm^6] ;

A = aire de la section [cm^2] ;

w_S, v_S = déplacements latéraux w et v du centre de torsion de la section ;

u_G = déplacement longitudinal u du centre de gravité de la section.

En négligeant l'effet des contraintes tangentielles dues à la flexion, ainsi que celles dues à la torsion fléchie, l'énergie potentielle des efforts internes (énergie potentielle de déformation) de la poutre s'écrit :

$$U_i = \frac{1}{2}\int_0^l \left[M_y \left(-\frac{\mathrm{d}^2 w_S}{\mathrm{d}x^2}\right) + M_z \left(-\frac{\mathrm{d}^2 v_S}{\mathrm{d}x^2}\right) + \right.$$

$$\left. + T_S \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right) + B \left(-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\right) + N \left(\frac{\mathrm{d}u_G}{\mathrm{d}x}\right) \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \left[EI_y \left(-\frac{\mathrm{d}^2 w_S}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 + EI_z \left(-\frac{\mathrm{d}^2 v_S}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + GJ \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + EC \left(-\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 + EA \left(\frac{\mathrm{d}u_G}{\mathrm{d}x}\right)^2 \right] \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Dans cette expression, $T_S = GJ \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$ est la partie du moment de torsion selon Saint-Venant, tandis que la torsion fléchie s'exprime en fonction du bimoment B.

3. Hypothèses simplificatrices

Avant de développer notre méthode de calcul, nous formulerons encore deux hypothèses simplificatrices, tirées de l'analyse détaillée des propriétés des ouvrages en question :

1. On a vu au paragraphe précédent que, dans le cas général, les charges verticales engendrent aussi une flexion horizontale des poutres. Cette flexion provoque le long des poutres des déplacements horizontaux $v_S = v_S(x)$, différents d'une poutre à l'autre. Mais, puisqu'on suppose en même temps que les sections transversales des poutres restent indéformables dans leur plan (les éléments de l'ouvrage travaillent comme des poutres et non pas à la manière d'une ossature plissée), on doit admettre que dans le plan horizontal passant par les axes des charnières, les déplacements v de toutes les poutres doivent être égaux. Puisque l'assemblage des poutres est toujours très rigide dans ce plan, il est logique d'admettre que *les déplacements v au niveau des charnières sont négligeables vis-à-vis des déplacements verticaux w*. Il en résulte (voir la figure 4) *que le déplacement horizontal v_S du centre de rotation de n'importe quelle poutre est dû uniquement à sa distorsion ψ et s'exprime simplement sous la forme*

$$v_S = -z_S \psi. \tag{3}$$

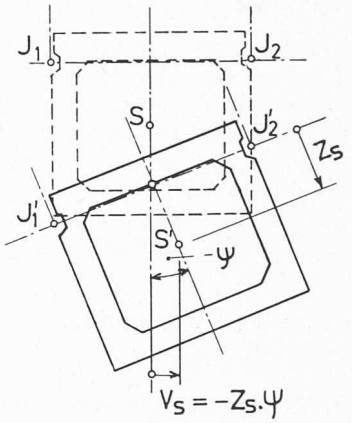

Fig. 4. — Relation entre le déplacement latéral v_s et la rotation ψ de la section.

2. La solution se simplifie considérablement si l'on admet que *les charnières n'empêchent pas les fibres adjacentes de deux poutres voisines de glisser longitudinalement l'une par rapport à l'autre*. (Ce glissement correspond à la différence de déformations dues à l'effet simultané de la flexion et du gauchissement). Ceci implique que l'on peut supprimer le dernier terme de l'équation (2), puisque *les efforts normaux des poutres seront dorénavant nuls*. La différence des déplacements longitudinaux des fibres adjacentes, due à la flexion, est très petite, et tant qu'il ne s'agit pas de sections ouvertes, il en est de même pour l'effet du gauchissement. La confrontation des résultats numériques donnés plus loin (2e partie, problème 3) montre que la possibilité de glissement longitudinal ne se manifeste pratiquement pas et que cette hypothèse simplificatrice peut être adoptée avec confiance pour l'analyse des ouvrages à partir de poutres à section pleine ou fermée auxquelles est consacrée cette étude. Elle serait, en revanche, beaucoup moins satisfaisante pour les systèmes de poutres à section ouverte, dont le gauchissement est beaucoup plus important.

4. Subdivision de l'ouvrage en macro-éléments et introduction des fonctions de déplacements

Pour analyser l'ouvrage par la méthode des éléments finis, on le remplace par un assemblage de macro-éléments

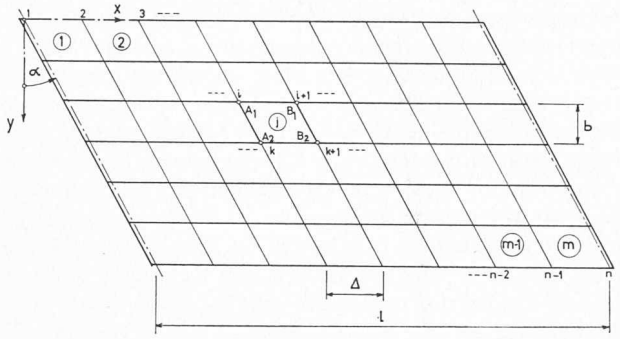

Fig. 5. — Assemblage d'éléments finis.

selon la figure 5. Chaque poutre est, en général, subdivisée dans le plan en une série de M macro-éléments trapézoïdaux de longueur

$$\Delta = \frac{l}{M}.$$

On utilisera deux systèmes d'axes dans le plan (voir fig. 5 et 6) : le système dit « global » formé des axes x, y orthogonaux, et le système dit « local » formé par les axes biais $\bar{x}$, η, liés à un élément particulier. Le plan des deux systèmes correspond à celui des axes des charnières liant les poutres (voir la figure 2).

D'après la figure 6, les relations entre les coordonnées globales du système et les coordonnées locales d'un élément s'expriment par

$$x = x_0 + \bar{x} + b\eta . \operatorname{tg} \alpha,$$
$$y = y_0 + b\eta.$$

On admettra que le déplacement vertical au niveau des charnières ($z = 0$) s'exprime :

$$w(\bar{x}, \eta) = (1-\eta)\, w_1(\bar{x}) + \eta w_2(\bar{x}), \tag{4}$$

où $w_1(\bar{x})$, $w_2(\bar{x})$ sont les déplacements verticaux des charnières entre les nœuds A_1, B_1 respectivement A_2, B_2. Pour exprimer les dérivées de $w(\bar{x}, \eta)$ par rapport à x et y, on écrit :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\mathfrak{J}\left(\frac{w, y}{\bar{x}, \eta}\right)}{\mathfrak{J}\left(\frac{x, y}{\bar{x}, \eta}\right)}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\mathfrak{J}\left(\frac{x, w}{\bar{x}, \eta}\right)}{\mathfrak{J}\left(\frac{x, y}{\bar{x}, \eta}\right)},$$

où $\mathfrak{J}(\ldots)$ sont les jacobiens de transformation. En désignant pour simplifier

$$\frac{d}{d\bar{x}}(\ldots) = (\ldots)'$$

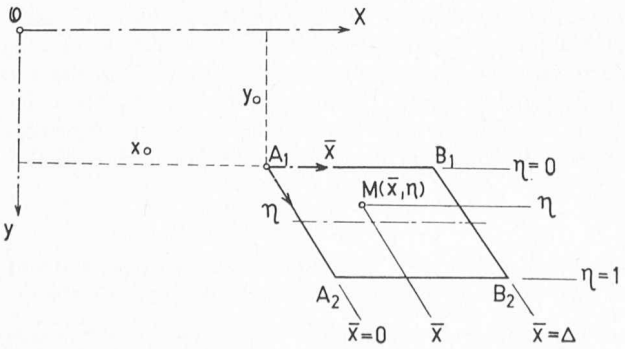

Fig. 6. — Système d'axes « global » et système « local ».

on trouve

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (1-\eta)\, w_1' + \eta w_2', \tag{4a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{b}(w_1 - w_2) - \operatorname{tg}\alpha\, [(1-\eta)\, w_1' + \eta w_2']. \tag{4b}$$

Pour $\eta = 1/2$ on en tire

$$w_S = (w)_{\eta=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2), \tag{5a}$$

$$\varphi = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{\eta=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(w_1' + w_2'), \tag{5b}$$

$$\psi = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\eta=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{b}(w_1 - w_2) - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\,(w_1' + w_2'), \tag{5c}$$

et avec (3) on a encore

$$v_S = \frac{z_S}{b}(w_1 - w_2) + \frac{1}{2} z_S \operatorname{tg}\alpha\,(w_1' + w_2'). \tag{5d}$$

Soit maintenant pour $i = 1, 2$ les fonctions de déplacement des charnières pour un élément

$$w_i = w_i(\bar{x}) = \mathbf{B}\mathbf{w}_i, \tag{6}$$

où

$$\mathbf{B} = [f_1(\bar{x}) \quad f_2(\bar{x}) \quad f_3(\bar{x}) \quad f_4(\bar{x})] \tag{6a}$$

est la matrice de quatre fonctions

$$\left.\begin{aligned} f_1(\bar{x}) &= \frac{1}{\Delta^3}(\Delta^3 - 3\,\bar{x}^2\Delta + 2\,\bar{x}^3), \\ f_2(\bar{x}) &= \frac{1}{\Delta^2}(\bar{x}\Delta^2 - 2\,\bar{x}^2\Delta + \bar{x}^3), \\ f_3(\bar{x}) &= \frac{1}{\Delta^3}(3\,\bar{x}^2\Delta - 2\,\bar{x}^3), \\ f_4(\bar{x}) &= \frac{1}{\Delta^2}(-\bar{x}^2\Delta + \bar{x}^3), \end{aligned}\right\} \tag{6b}$$

et

$$\mathbf{w}_i = \begin{Bmatrix} w_{A_i} \\ \varphi_{A_i} \\ w_{B_i} \\ \varphi_{B_i} \end{Bmatrix} \tag{6c}$$

est le sous-vecteur de quatre déplacements nodaux généralisés.

Les fonctions $f(\bar{x})$ ont été choisies afin de satisfaire aux conditions

$f_1(0) = 1$	$f_2(0) = 0$	$f_3(0) = 0$	$f_4(0) = 0$
$f_1'(0) - 0$	$f_2'(0) = 1$	$f_3'(0) = 0$	$f_4'(0) = 0$
$f_1(\Delta) = 0$	$f_2(\Delta) = 0$	$f_3(\Delta) = 1$	$f_4(\Delta) = 0$
$f_1'(\Delta) = 0$	$f_2'(\Delta) = 0$	$f_3'(\Delta) = 0$	$f_4'(\Delta) = 1$

En même temps, les paramètres du nœud (égaux respectivement au déplacement w et à la rotation φ de la charnière en ce point) seront toujours communs à tous les éléments autour du même nœud. Ainsi, les fonctions de déplacement (6) assureront automatiquement, aussi bien la continuité des déplacements w_S, v_S et des pentes ψ, φ entre les macro-éléments de la même poutre, que la compatibilité des déplacements w entre les poutres de l'ouvrage.

Notons toutefois (voir (5d)) qu'on ne peut pas assurer automatiquement la continuité des pentes $\frac{dv_S}{dx}$ entre les éléments dès que le pont n'est plus rectangulaire ($\operatorname{tg}\alpha \neq 0$). La conséquence de cette imperfection, qui d'ailleurs ne peut intervenir que si $z_S \neq 0$, est toutefois minime. Dans la deuxième partie (problème 5), nous démontrerons que l'interaction des poutres n'est que très peu influencée par la position z_S des charnières et par conséquent aussi par la flexion horizontale des poutres, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de rechercher une très grande précision.

5. Matrice de rigidité du macro-élément

Soient **S** le vecteur des forces nodales généralisées (figure 7) et **w** le vecteur des déplacements nodaux associés d'un élément :

$$\mathbf{S} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{S}_1 \\ \hdashline \mathbf{S}_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} Z_{A_1} \\ M_{A_1} \\ Z_{B_1} \\ M_{B_1} \\ \hdashline Z_{A_2} \\ M_{A_2} \\ Z_{B_2} \\ M_{B_2} \end{array} \right\}, \quad \mathbf{w} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{w}_1 \\ \hdashline \mathbf{w}_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} w_{A_1} \\ \varphi_{A_1} \\ w_{B_1} \\ \varphi_{B_1} \\ \hdashline w_{A_2} \\ \varphi_{A_2} \\ w_{B_2} \\ \varphi_{B_2} \end{array} \right\}. \tag{7a, b}$$

On cherche la relation

$$\mathbf{S} = \mathbf{k}\mathbf{w}\,, \tag{8}$$

où **k** est la matrice de rigidité d'ordre 8×8.

Soit U_i l'énergie potentielle de déformation de l'élément correspondant aux déformations données par les équations (4), (5) et (6). Soit U_e l'énergie potentielle des efforts externes concentrés aux angles du même élément et représentés par le vecteur des forces nodales. La somme

$$U = U_i + U_e$$

représente l'énergie potentielle totale de l'élément. Si l'élément est en équilibre, on sait que, selon le théorème du minimum de l'énergie potentielle, la variation d'énergie potentielle totale correspondant à une variation infinitésimale de ses déformations compatible avec les liaisons est nulle

$$\delta U = \delta\,(U_i + U_e) = 0\,.$$

Pour une série de fonctions de déplacement approchées (voir (4)-(6)) et caractérisées par un vecteur **w** de déplacements nodaux, la meilleure solution sera celle qui donne le minimum de U par rapport à ces déplacements considérés comme variables. On doit, par conséquent, poser

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\,(U_i + U_e) = 0\,, \tag{9}$$

où la dérivation partielle s'opère par rapport au vecteur défini par (7b).

Pour exprimer l'énergie potentielle de déformation (voir (2), où selon les hypothèses adoptées on néglige l'effet de N), on introduira le vecteur

$$\mathbf{m} = \left\{ \begin{array}{c} M_y \\ T_s \\ M_z \\ B \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} EI_y & & & \\ & GJ & & \\ & & EI_z & \\ & & & EC \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} -w_s'' \\ \psi' \\ -v_s'' \\ -\psi'' \end{array} \right\} = \mathbf{D}\mathbf{c}\,. \tag{10}$$

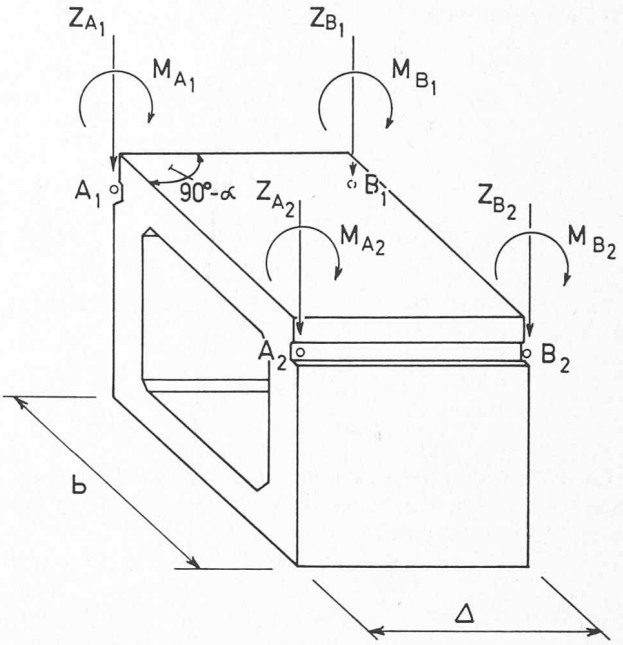

Fig. 7. — Elément fini et ses efforts nodaux.

En utilisant les équations (5), (6) et (7b)

$$\mathbf{c} = \left\{ \begin{array}{c} -w'' \\ \psi' \\ -v_s'' \\ -\psi'' \end{array} \right\} =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} -\frac{1}{2}\mathbf{B}'' & -\frac{1}{2}\mathbf{B}'' \\ -\frac{1}{b}\mathbf{B}' - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\,\mathbf{B}'' & \frac{1}{b}\mathbf{B}' - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\,\mathbf{B}'' \\ -\frac{z_s}{b}\mathbf{B}'' - \frac{z_s}{2}\operatorname{tg}\alpha\,\mathbf{B}''' & \frac{z_s}{b}\mathbf{B}'' - \frac{z_s}{2}\operatorname{tg}\alpha\,\mathbf{B}''' \\ \frac{1}{b}\mathbf{B}'' + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\,\mathbf{B}''' & -\frac{1}{b}\mathbf{B}'' + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\,\mathbf{B}''' \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{w}_1 \\ \hdashline \mathbf{w}_2 \end{array} \right\} =$$

$$= \mathbf{C}\mathbf{w}\,, \tag{11}$$

de sorte que

$$U_i = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta} \mathbf{c}^T\mathbf{m}\,\mathrm{d}\bar{x} = \frac{1}{2}\,\mathbf{w}^T \int_0^{\Delta} \mathbf{C}^T\mathbf{D}\,\mathbf{C}\,\mathrm{d}\bar{x}\cdot\mathbf{w}$$

(l'indice T signifie que la matrice doit être transposée). L'énergie potentielle des efforts extérieurs étant

$$U_e = -\,\mathbf{w}^T\mathbf{S}\,,$$

l'énergie potentielle totale vaut

$$U = U_i + U_e = \frac{1}{2}\,\mathbf{w}^T \int_0^{\Delta} \mathbf{C}^T\mathbf{D}\,\mathbf{C}\,\mathrm{d}\bar{x}\cdot\mathbf{w} - \mathbf{w}^T\mathbf{S}\,.$$

Par dérivation (voir (9)),

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{w}} = \int_0^{\Delta} \mathbf{C}^T \mathbf{D}\, \mathbf{C}\, \mathrm{d}\bar{x} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{S} = 0\,,$$

d'où

$$\mathbf{S} = \int_0^{\Delta} \mathbf{C}^T \mathbf{D}\, \mathbf{C}\, \mathrm{d}\bar{x} \cdot \mathbf{w}\,.$$

Compte tenu de (8), la matrice de rigidité de l'élément est donc

$$\mathbf{k} = \int_0^{\Delta} \mathbf{C}^T \mathbf{D}\, \mathbf{C}\, \mathrm{d}\bar{x}\,. \tag{12}$$

La matrice de rigidité $\mathbf{k}$ obtenue selon (12) est donnée dans les tableaux 1 et 2. Pour des raisons pratiques, on l'exprime sous la forme

$$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}} + \Delta\mathbf{k}\,, \tag{13}$$

où $\bar{\mathbf{k}}$ (tableau 1) est la matrice fondamentale représentant uniquement l'effet de la flexion verticale et de la torsion de Saint-Venant et $\Delta\mathbf{k}$ (tableau 2) est la matrice complémentaire représentant la correction due à l'effet de la flexion horizontale et de la torsion fléchie.

6. Matrice de rigidité de l'assemblage

Une fois connue la matrice de rigidité d'un macro-élément, l'établissement de la matrice de rigidité de l'assemblage n'est plus qu'une question de routine. Toutefois, pour que même un lecteur moins au courant de la méthode des éléments finis puisse suivre le texte sans difficulté, il paraît opportun de décrire brièvement le procédé.

Avant d'établir la matrice de rigidité de l'assemblage d'éléments finis, il faut passer (fig. 5) de la notation locale des nœuds (A_1, B_1, A_2, B_2) à la notation globale (1, 2 ... n) et numéroter également les éléments (①, ②... (m)). En remplaçant pour chaque élément la notation locale par la notation globale (c'est-à-dire en remplaçant par exemple pour l'élément (j) de la figure 5 les déplacements locaux w_{A_1}, φ_{A_1}, w_{B_1} ... par les déplacements w_i, φ_i, w_{i+1} ... de l'assemblage) on établit automatiquement la continuité entre les éléments.

Définissons sur l'assemblage deux vecteurs

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{Bmatrix}, \tag{14a, b}$$

qui soient respectivement le vecteur des forces nodales et le vecteur des déplacements nodaux. Leurs éléments sont les sous-vecteurs

$$\mathbf{P}_i = \begin{Bmatrix} P_i \\ M_i \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix}, \tag{14c, d}$$

où P_i et M_i sont les forces nodales équivalentes. Elles remplacent dans le calcul les véritables forces extérieures, qui peuvent être par exemple réparties. Les nœuds d'appui mis à part, on peut les obtenir au moyen des fonctions de déplacement (4) et (6) en exprimant l'égalité de leur travail virtuel et celui de la charge donnée.

On cherche maintenant la relation

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{r}\,, \tag{15}$$

où $\mathbf{K}$ est la matrice de rigidité de l'assemblage ; on l'obtiendra en assemblant les matrices de rigidité $(\mathbf{k})_j = \mathbf{k}$ des éléments. A cet effet, on écrira pour un élément (j) quelconque (voir la figure 5) la relation (8) sous la forme

$$(\mathbf{S})_j = (\mathbf{k})_j\,(\mathbf{w})_j = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_i \\ \mathbf{S}_{i+1} \\ \mathbf{S}_k \\ \mathbf{S}_{k+1} \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} & \mathbf{k}_{14} \\ & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} & \mathbf{k}_{24} \\ & & \mathbf{k}_{33} & \mathbf{k}_{34} \\ \text{Symétrie} & & & \mathbf{k}_{44} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{r}_{i+1} \\ \mathbf{r}_k \\ \mathbf{r}_{k+1} \end{Bmatrix}, \tag{16}$$

où les éléments $\mathbf{k}_{11}$, $\mathbf{k}_{12}$ ... de la matrice de rigidité $(\mathbf{k})_j$ sont des sous-matrices d'ordre 2×2. Pour l'assemblage d'éléments, la relation (15) s'écrira par analogie :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \mathbf{K}_{1n} \\ & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \mathbf{K}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{Symétrie} & & & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{Bmatrix}, \tag{17}$$

où les éléments $\mathbf{K}_{11}$, $\mathbf{K}_{12}$ ... de la matrice de rigidité de l'assemblage sont de nouveau des sous-matrices d'ordre 2×2. On obtiendra la matrice $\mathbf{K}$ en considérant à tour de rôle la contribution $\mathbf{K}_j$ de chaque élément (j). Ainsi la contribution de l'élément (j) de la figure 5 est par exemple

$$\mathbf{K}_j = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 \cdots i & i+1 \cdots k & k+1 \cdots n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} & \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} & \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} & \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} & \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \\ & \ddots \; \vdots & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \cdots \mathbf{k}_{13} & \mathbf{k}_{14} \cdots \mathbf{0} \\ & & \mathbf{k}_{22} \cdots \mathbf{k}_{23} & \mathbf{k}_{24} \cdots \mathbf{0} \\ & & \ddots \; \vdots & \vdots \\ & & \mathbf{k}_{33} & \mathbf{k}_{34} \cdots \mathbf{0} \\ \text{Symétrie} & & & \mathbf{k}_{44} \cdots \mathbf{0} \\ & & & \ddots \; \vdots \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ i+1 \\ \vdots \\ k \\ k+1 \\ \vdots \\ n \end{array}$$

et la matrice de rigidité totale est par conséquent

$$\underline{\underline{\mathbf{K} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{K}_j\,.}} \tag{18}$$

Notons que cette façon de former la matrice $\mathbf{K}$ revient à satisfaire à chaque nœud de l'assemblage la condition statique

$$\sum_j (\mathbf{S}_i)_j = \mathbf{P}_i\,,$$

où la somme concerne les quatre éléments autour du nœud i.

TABLEAU 1

Matrice de rigidité fondamentale — Effet de la flexion verticale et de la torsion pure

$\overline{\mathbf{k}} = EI_y.$

a_1+a_3	a_5+a_7	$-a_1-a_3$	a_5+a_7	a_1-a_3	$a_5-a_7+a_9$	$-a_1+a_3$	$a_5-a_7-a_9$
	$a_2-a_4+2a_8$	$-a_5-a_7$	$-a_6-a_8$	$a_5-a_7-a_9$	$-a_2+2a_8$	$-a_5+a_7+a_9$	$-a_4+a_6+a_8$
		a_1+a_3	$-a_5-a_7$	$-a_1+a_3$	$-a_5+a_7-a_9$	a_1-a_3	$-a_5+a_7+a_9$
			$a_2+a_4+2a_8$	$a_5-a_7+a_9$	$a_4+a_6+a_8$	$-a_5+a_7-a_9$	$-a_2+2a_8$
				a_1+a_3	a_5+a_7	$-a_1-a_3$	a_5+a_7
	Symétrie				$a_2+a_4+2a_8$	$-a_5-a_7$	$-a_6+a_8$
						a_1+a_3	$-a_5-a_7$
							$a_2-a_4+2a_8$

$$a_1 = \frac{3}{\Delta^3}\left(1 + \frac{GJ}{EI_y}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\right) \qquad a^4 = \frac{1}{2\,b}\,\frac{GJ}{EI_y}\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad a_7 = \frac{1}{10\,b^2}\,\frac{GJ}{EI_y}$$

$$a_2 = \frac{2\Delta}{15\,b^2}\,\frac{GJ}{EI_y} \qquad a_5 = \frac{3}{2\Delta^2}\left(1 + \frac{GJ}{EI_y}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\right) \qquad a_8 = \frac{1}{2\Delta}\left(1 + \frac{GJ}{EI_y}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\right)$$

$$a_3 = \frac{6}{5\,b^2\Delta}\,\frac{GJ}{EI_y} \qquad a_6 = \frac{\Delta}{30\,b^2}\,\frac{GJ}{EI_y} \qquad a_9 = \frac{1}{b\Delta}\,\frac{GJ}{EI_y}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

TABLEAU 2

Matrice de rigidité complémentaire — Effet de la flexion horizontale et de la torsion fléchie

$\Delta\mathbf{k} = E(I_z z_s^2 + C)$

b_1+b_3	$b_5-b_7+b_9$	$-b_1-b_3$	$b_5+b_7+b_9$	$-b_1+b_3$	$-b_5+b_7+b_9$	b_1-b_3	$-b_5-b_7+b_9$
	$b_2+b_4-2b_8$	$-b_5+b_7-b_9$	b_4+b_6	$-b_5-b_7+b_9$	$-b_2+b_4$	$b_5+b_7-b_9$	$b_4-b_6-2b_8$
		b_1+b_3	$-b_5-b_7-b_9$	b_1-b_3	$b_5-b_7-b_9$	$-b_1+b_3$	$b_5+b_7-b_9$
			$b_2+b_4+2b_8$	$-b_5+b_7+b_9$	$b_4-b_6+2b_8$	$b_5-b_7-b_9$	$-b_2+b_4$
				b_1+b_3	$b_5+b_7+b_9$	$-b_1-b_3$	$b_5-b_7+b_9$
	Symétrie				$b_2+b_4+2b_8$	$-b_5-b_7-b_9$	b_4+b_6
						b_1+b_3	$-b_5+b_7-b_9$
							$b_2+b_4-2b_8$

$$b_1 = \frac{12}{b^2\Delta^3} \qquad b_4 = \frac{9}{\Delta^3}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha \qquad b_7 = \frac{6}{b\Delta^3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$b_2 = \frac{4}{b^2\Delta} \qquad b_5 = \frac{6}{b^2\Delta^2} \qquad b_8 = \frac{3}{b\Delta^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$b_3 = \frac{36}{\Delta^5}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha \qquad b_6 = \frac{2}{b^2\Delta} \qquad b_9 = \frac{18}{\Delta^4}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$$

La matrice de rigidité donnée par (18) est singulière et comme telle ne possède pas de matrice inverse. Ceci est dû au fait qu'il est impossible de résoudre le système d'équations (15) sans prescrire un nombre minimum de déplacements empêchant l'assemblage de se déplacer à la façon de solides rigides, puisque les déplacements w_i et les rotations φ_i ne peuvent pas être uniquement déterminés par les conditions d'équilibre. Le système d'équations (15) doit, par conséquent, être encore modifié conformément aux conditions d'appui. Sur un nœud d'appui simple l, on peut poser par exemple

$$w_l = \overline{w}_l \,,$$

où $\overline{w}_l$ est soit nul, soit égal au tassement d'appui donné. En cas d'encastrement, on aurait de manière analogue

$$\mathbf{r}_l = \begin{Bmatrix} w_l \\ \varphi_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{w}_l \\ \overline{\varphi}_l \end{Bmatrix} .$$

Les valeurs ci-dessus peuvent être introduites dans le système (15), tout en éliminant les équations correspondantes devenues superflues, ce qui revient à réduire l'ordre de la matrice **K** et des vecteurs **P** et **r**.

Pour éviter de devoir procéder à la réorganisation complète de la matrice **K** et des vecteurs **P** et **r** dans la mémoire de l'ordinateur, la pratique courante consiste à multiplier sur la diagonale de **K** le coefficient correspondant à w_l ou φ_l par un très grand nombre (mettons 10^{12}) tout en remplaçant en (15) l'élément correspondant du vecteur **P** par le même grand nombre multiplié par $\overline{w}_l$ ou $\overline{\varphi}_l$ prescrit. Cette opération a pour conséquence de remplacer dans (15) l'équation superflue par une autre exprimant pratiquement l'égalité $w_l = \overline{w}_l$ ou $\varphi_l = \overline{\varphi}_l$. La résolution du système d'équations ainsi modifié

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{P} \tag{19}$$

est le vecteur **r** complet des déplacements nodaux, y compris les déplacements et (ou) les rotations prescrits aux appuis.

7. Calcul des efforts internes

Soit **n** le vecteur des efforts internes aux extrémités $\overline{x} = 0$ et $\overline{x} = \Delta$ de l'élément :

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} M_{yA} \\ M_{zA} \\ B_A \\ T_{SA} \\ T_{fA} \\ Q_{zA} \\ - - - \\ M_{yB} \\ M_{zB} \\ B_B \\ T_{SB} \\ T_{fB} \\ Q_{zB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EI_y\, w_s'' \;(0) \\ -EI_z\, v_s'' \;(0) \\ -EC\, \psi'' \;(0) \\ GJ\, \psi' \;(0) \\ -EC\, \psi''' \;(0) \\ -Z_{A_1} - Z_{A_2} \\ - - - - - - \\ -EI_y\, w_s'' \;(\Delta) \\ -EI_z\, v_s'' \;(\Delta) \\ -EC\, \psi'' \;(\Delta) \\ GJ\, \psi' \;(\Delta) \\ -EC\, \psi''' \;(\Delta) \\ Z_{B_1} + Z_{B_2} \end{Bmatrix} , \tag{20}$$

où T_s et T_f sont respectivement les parties du moment de torsion T dues à la torsion de Saint-Venant et à la torsion fléchie.

Pour exprimer les déformations w_s, v_s, ψ et leurs dérivées par rapport à $\overline{x}$ on utilisera les relations (5) et (6). Pour les forces nodales Z, compte tenu des équations (7) et (8), on se servira directement des lignes correspondantes de la matrice de rigidité $\mathbf{k} = \overline{\mathbf{k}} + \Delta\mathbf{k}$ donnée aux tableaux 1 et 2. On exprimera ainsi le vecteur **n** en fonction des paramètres nodaux aux angles de l'élément sous la forme

$$\mathbf{n} = \mathbf{F}\mathbf{w} \,, \tag{21}$$

où **F** est la matrice de coefficients d'ordre 12×8 (voir tableau 3) et **w** le vecteur de huit déplacements nodaux défini par l'équation (7b).

En examinant l'équation (20), on se rend compte que le vecteur **n** ne contient pas l'effort tranchant Q_y. Son absence est due au fait que les hypothèses simplificatrices adoptées au paragraphe 3 rendent impossible la détermination des réactions horizontales entre les poutres au niveau des charnières de liaison. De façon générale, on a

$$Q_y = \frac{\mathrm{d}\, M_z}{\mathrm{d}x} - m_z \,,$$

où $m_z = m_z(x)$ représente une charge répartie, constituée par des couples horizontaux [tm/m] qui s'obtiennent comme une des composantes de l'effet de la transmission des interactions des poutres sur l'axe de torsion. Notons que les valeurs de Q_y sont très faibles et pratiquement sans importance.

En appliquant à tour de rôle la relation (21) aux éléments d'une poutre du pont, on constate, en général, une légère oscillation des efforts obtenus respectivement à l'extrémité droite de l'élément $(\overline{j})$ et à l'extrémité gauche de l'élément $(\overline{j+1})$ (et ceci même en l'absence des charges isolées qui pourraient justifier une certaine discontinuité). Cette petite imperfection est propre à la méthode habituelle des éléments finis, et pratiquement peu importante. Notons qu'une meilleure approximation serait obtenue en prenant les moyennes arithmétiques des valeurs de gauche et de droite.

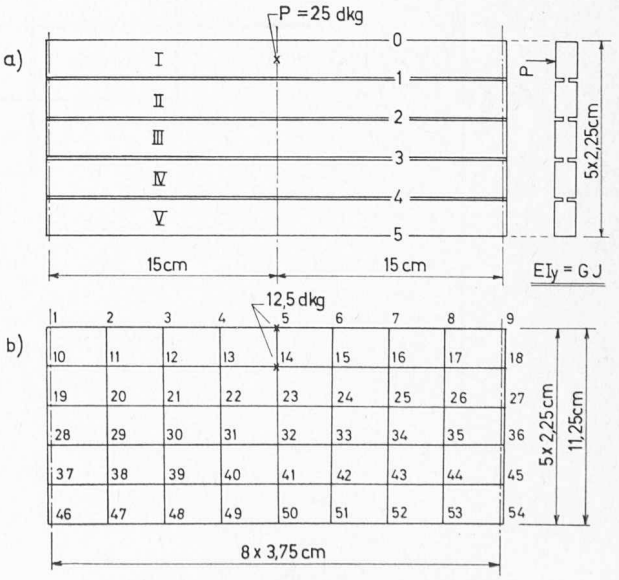

Fig. 8. — *a)* Modèle du pont rectangulaire de l'essai de Kopecky [14].
b) Assemblage d'éléments finis ($M = 8$) pour l'analyse numérique du même ouvrage.

Deuxième partie: Analyse numérique et applications

Pour faciliter le calcul pratique des ponts biais à poutres multiples sans entretoises, nous avons élaboré un programme standard en langage FORTRAN pour l'ordinateur (programme PBPMSE). Ce programme, basé sur la théorie développée dans la première partie de ce travail, calcule pour le pont donné, avec les charges et les tassements d'appui choisis, les déplacements (w, φ) et les efforts internes (M_y, M_z, B, T_S, T_f, Q_z) dans les poutres de l'ouvrage. Le nombre d'éléments par poutre $M = l : \Delta$ peut être choisi en fonction de la précision voulue. Nous n'entrerons pas dans les détails, puisque ce programme, qui sera mis plus tard à la disposition des clients du centre de calcul de l'EPFL, fera l'objet d'une publication ultérieure.

Dans le texte qui suit, on donne les résultats de quelques-uns des nombreux problèmes résolus à l'aide du programme PBPMSE. Les trois premiers ont été choisis pour vérifier la théorie, en confrontant nos résultats avec ceux de la littérature connue. Les autres exemples nous ont permis d'étudier quelques questions intéressant la pratique.

TABLEAU 3

Matrice **F** *pour le calcul des efforts internes aux extrémités des éléments*

F =

1	2	3	4	5	6	7	8	
c_1	$2c_2$	$-c_1$	c_2	c_1	$2c_2$	$-c_1$	c_2	1
$-z_s$ fois la ligne 3								2
$-d_1+d_3$	$-2d_2+d_4$	d_1-d_3	$-d_2+d_4$	d_1+d_3	$2d_2+d_4$	$-d_1-d_3$	d_2+d_4	3
e_1	$2e_2-e_3$	$-e_1$	e_2	e_1	$2e_2+e_3$	$-e_1$	e_2	4
f_1	f_2	$-f_1$	f_2	$-f_1$	$-f_2$	f_1	$-f_2$	5
$-2a_1-2b_3$	$-2a_5+a_9$ $+2b_7-2b_9$	$2a_1+2b_3$	$-2a_5-a_9$ $-2b_7-2b_9$	$-2a_1-2b_3$	$-2a_5-a_9$ $-2b_7-2b_9$	$2a_1+2b_3$	$-2a_5+a_9$ $+2b_7-2b_9$	6
$-c_1$	$-c_2$	c_1	$-2c_2$	$-c_1$	$-c_2$	c_1	$-2c_2$	7
$-z_s$ fois la ligne 9								8
d_1+d_3	d_2+d_4	$-d_1-d_3$	$2d_2+d_4$	$-d_1+d_3$	$-d_2+d_4$	d_1-d_3	$-2d_2+d_4$	9
$-e_1$	$-e_2$	e_1	$-2e_2-e_3$	$-e_1$	$-e_2$	e_1	$-2e_2+e_3$	10
comme la ligne 5								11
comme la ligne 6								12

Coefficients a_1, a_5, a_9, ... voir tableau 1

Coefficients b_3, b_7, b_9, ... voir tableau 2

$$c_1 = \frac{3\,EI_y}{\Delta^2} \qquad c_2 = \frac{EI_y}{\Delta}$$

$$d_1 = \frac{6\,EI_z}{b\Delta^2} \qquad d_2 = \frac{2\,EI_z}{b\Delta} \qquad d_3 = \frac{6\,EI_z}{\Delta^3}\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad d_4 = \frac{3\,EI_z}{\Delta^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$e_1 = \frac{3\,GJ}{\Delta^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad e_2 = \frac{GJ}{\Delta}\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad e_3 = \frac{GJ}{b}$$

$$f_1 = \frac{12\,EC}{b\Delta^3} \qquad f_2 = \frac{6\,EC}{b\Delta^2}$$

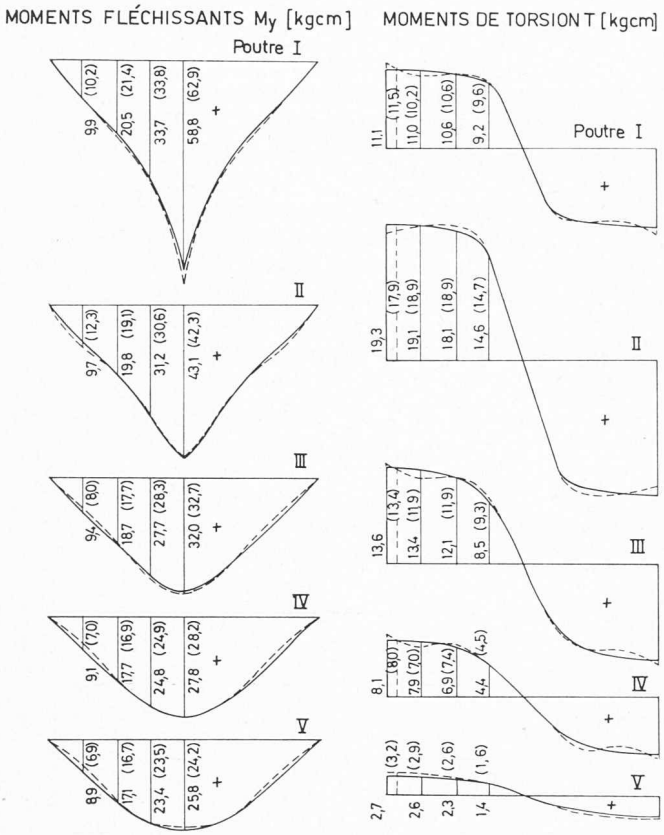

Fig. 9. — Confrontation des résultats du calcul du pont de la figure 8 avec les résultats expérimentaux obtenus sur le modèle (valeurs entre parenthèses et diagrammes en traitillé).

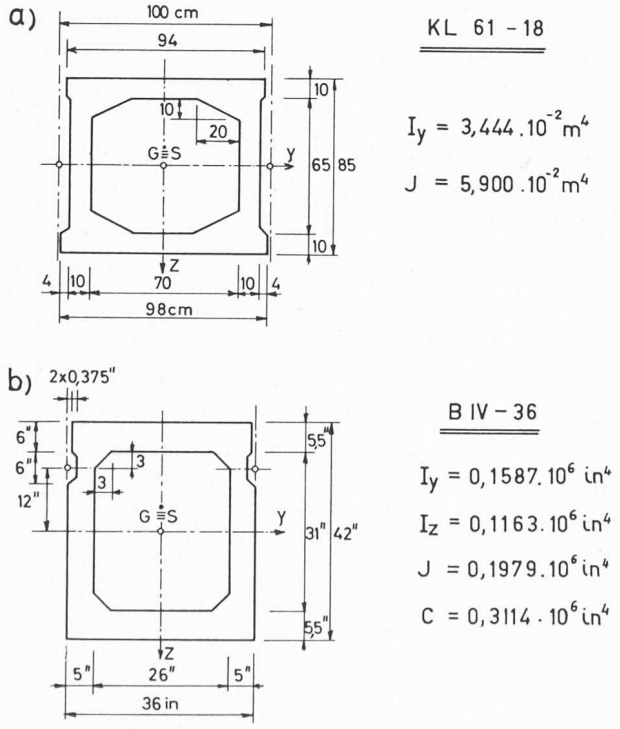

Fig. 10. — Quelques exemples réels de poutres-caissons préfabriquées.

a) KL 61-18 (Tchécoslovaquie) pour les portées jusqu'à 20 m ;

b) B IV-36 (Etats-Unis) pour les portées jusqu'à 88 ft.

Problème 1 : Confrontation des calculs avec l'expérience

Pour la première vérification de la théorie, nous avons choisi le modèle d'un pont rectangulaire à cinq poutres (figure 8a) qui a fait l'objet d'une étude expérimentale de J. Kopecky [14]. Le modèle était réalisé en résine polyester durcie (extroplex) et les charnières étaient représentées par des encoches minces, fraisées dans la plaque compacte du matériau.

Pour les dimensions de la section transversale des poutres et les qualités physiques du matériau (E, G), la référence [14] donne $EI_y = GJ$. Les charnières étant à mi-hauteur des sections, on a $z_S = 0$ et les inerties I_z n'interviennent pas (voir le tableau 2). De plus, si l'on néglige pour les sections pleines le petit effet de la torsion non uniforme ($C = 0$), la matrice de rigidité supplémentaire $\Delta\mathbf{k}$ est nulle. Ainsi, pour le cas envisagé, la matrice de rigidité $\mathbf{k}$ des éléments sera représentée uniquement par la matrice fondamentale $\overline{\mathbf{k}}$ du tableau 1.

Le calcul du modèle a été exécuté pour deux réseaux différents d'éléments finis : celui de la figure 8b ($M = 8$), et le réseau deux fois plus fin ($M = 16$). Excepté dans la région voisine de la charge concentrée P (fig. 8a), les deux calculs conduisent à des résultats peu différents. La figure 9 montre que les résultats du second calcul ($M = 16$) concordent bien avec les valeurs expérimentales.

On remarquera, sur la figure 9, que sous la charge concentrée P, le diagramme des moments fléchissants présente une pointe très aiguë qui, probablement, influence considérablement la répartition des moments entre les poutres du pont. Ce fait devrait être pris en considération dans le calcul d'un pont réel, où de vraies charges concentrées n'existent pas. Remplacer une charge répartie par des charges isolées pourrait conduire à des résultats assez différents.

Problème 2 : Confrontation avec d'autres méthodes de calcul

Comme seconde vérification de notre méthode, nous avons choisi le pont biais de la figure 11a, formé de sept poutres-caissons préfabriquées de type KL 61-18 (fig. 10a), soumis à une charge uniformément répartie $p = 1$ t/m².

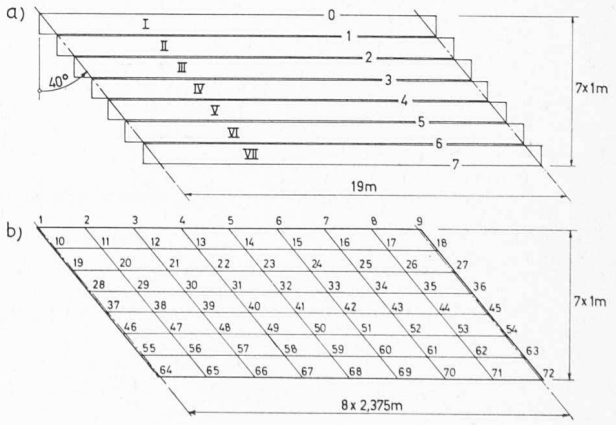

Fig. 11. — *a)* Pont biais formé de sept poutres-caissons KL 61-18.

b) Assemblage d'éléments finis ($M = 8$) pour l'analyse numérique de l'ouvrage.

TABLEAU 4

Pont biais constitué par sept poutres-caissons KL 61-18

Confrontation des résultats de différentes méthodes de calcul pour la charge répartie $p = 1\ t/m^2$

Flèches w [cm] au milieu des poutres

Méth. \ R	I	II	III	IV	V	VI	VII
Kop. [16]	1,51	1,55	1,57	1,58	1,57	1,55	1,51
El. finis	1,509	1,548	1,568	1,574	1,568	1,548	1,509

Moments fléchissants M_y [tm] aux quarts de la portée des poutres

$\frac{x}{l} \rightarrow$	0			0,25			0,50			0,75			1,00		
$R \downarrow$	Jir. [9]	Kop. [16]	El. finis	Jir. [9]	Kop. [16]	El. finis	Jir. [9]	Kop. [16]	El. finis	Jir. [9]	Kop. [16]	El. finis	Jir. [9]	Kop. [16]	El. finis
I	−7,08	−8,48	−8,45	15,37	15,59	15,23	31,41	31,64	31,55	29,57	29,02	29,56	−4,91	−7,67	−4,28
II	−5,37	−6,30	−5,78	18,32	18,10	18,25	32,53	32,30	32,69	27,07	26,77	27,19	−2,94	−4,79	−2,73
III	−3,81	−5,00	−3,89	20,59	20,44	20,60	33,13	32,96	33,29	24,52	24,39	24,84	−2,30	−4,05	−2,06
IV	−2,76	−4,23	−2,96	22,50	22,39	22,68	33,33	33,20	33,48	22,50	22,39	22,68	−2,76	−4,23	−2,96
V	−2,30	−4,05	−2,06	24,52	24,39	24,84	33,13	32,96	33,29	20,59	20,44	20,60	−3,81	−5,00	−3,89
VI	−2,94	−4,79	−2,73	27,07	26,77	27,19	32,53	32,30	32,69	18,32	18,10	18,25	−5,37	−6,30	−5,78
VII	−4,91	−7,67	−4,28	29,57	29,02	29,56	31,41	31,64	31,55	15,37	15,59	15,23	−7,08	−8,48	−8,45
Σ	−29,17	−40,52	−30,15	157,94	156,70	158,35	227,47	227,00	228,54	157,94	156,70	158,35	−29,17	−40,52	−30,15

Ce problème a déjà été résolu par d'autres méthodes approchées (voir [9] et [16]), dont les résultats sont confrontés avec les nôtres dans le tableau 4 (pour $M = 16$). On remarquera que nos résultats concordent, en général, très bien avec les deux autres solutions approchées.

Notons que les deux méthodes [9] et [16] considèrent, à priori, que les charnières entre les poutres se trouvent au niveau des centres de rotation S (ce qui est approximativement vrai pour les poutres-caissons KL 61-18) et négligent le petit effet de la torsion fléchie. Dans l'application de notre méthode, qui est plus générale, nous avons par conséquent posé $z_S = 0$ et $C = 0$. On verra plus loin l'influence de ces approximations.

Problème 3: Vérification des hypothèses simplificatrices

Les deux problèmes précédents concernaient des ponts avec charnières au niveau des centres de rotation. Dans ces cas, l'influence des hypothèses simplificatrices, énoncées au paragraphe 3 de la première partie de ce travail, n'apparaissait pas, puisque les poutres ne fléchissaient que dans le plan vertical et le fait que leurs sections étaient pratiquement symétriques par rapport au plan $z = z_s$ imposait des déplacements longitudinaux u automatiquement nuls au niveau des charnières.

Pour vérifier la validité de ces hypothèses simplificatrices, nous avons étudié le pont rectangulaire de la figure 12a, constitué par dix poutres-caissons américaines de type B IV-36. Selon la figure 10b, la position théorique des charnières se trouve à peu près à douze pouces au-dessus des centres de rotation. Les inerties I_y, I_z et le moment d'inertie sectorielle C sont donnés dans la même figure. Etant donné que la conversion des unités américaines en cm (1″ = 1 in = 2,54001 cm) donnerait des chiffres peu commodes pour le calcul, nous avons conservé les unités originales, les pouces.

Comme charge du pont, nous avons considéré la charge linéaire $p = p_1 \sin \pi \dfrac{x}{l}$ appliquée successivement :

a) sur la bordure extérieure (indice 0) de la poutre I ;

b) au milieu de la largeur de la poutre I.

La raison de ce choix est que pour une charge sinusoïdale, on trouve relativement facilement la solution exacte du problème (voir [12]). Les équations sont applicables uniquement pour des ponts rectangulaires à poutres de même section. Pour faciliter leur application, nous les avons programmées.

Le tableau 5 résume les résultats des deux calculs, la solution exacte et le calcul approché par notre méthode ($M = 16$). En accord avec les hypothèses simplificatrices du paragraphe 3, les résultats du calcul exact confirment que les déplacements latéraux v des charnières sont vraiment très petits vis-à-vis des déplacements verticaux w. Sous premier cas de charge, ce rapport est par exemple 19 : 10888 pour la première poutre, et 19 : 4477 pour la dernière poutre du pont. D'autre part, le calcul des contraintes normales confirme la très faible influence des efforts normaux. Ainsi, par exemple, alors que dans la poutre I le moment fléchissant $M_{y\,\max}$ engendre la contrainte

$$\sigma_{M_y\,\max} = \frac{M_{y\,\max}}{I_y}\,\frac{h}{2} = \frac{15\,950\,p_1}{158\,700}\,21 = 2{,}111\,p_1\,,$$

la contribution de l'effort normal est

$$\sigma_{N\,\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{13\,p_1}{710} = 0{,}018\,p_1\,,$$

ce qui ne représente que 0,85 % de $\sigma_{M_y\,\max}$. Ajoutons que les résultats de notre méthode (déformations, efforts internes) concordent très bien avec les résultats du calcul exact. Ainsi, les hypothèses simplificatrices adoptées se trouvent pleinement justifiées.

Notons encore au sujet des contraintes normales que, en plus de celles dues aux moments M_y et aux efforts normaux N, d'autres contraintes normales viendront s'ajouter, qui seront dues aux moments M_z et aux bimoments B. Par notre méthode, on trouve (toujours pour la même section et le même cas de charge)

$$\sigma_{M_z\,\max} = \frac{M_{z\,\max}}{I_z}\,\frac{b}{2} = \frac{540\,p_1}{116\,300}\,18 = 0{,}084\,p_1\,.$$

Avec $|B|_{\max} = 45\,p_1$ et $|\omega|_{\max} = 36$ in² (où $|\omega|_{\max}$ est la valeur absolue de la coordonnée sectorielle aux angles de la section)

$$\sigma_{|B|_{\max}} = \frac{|B|_{\max}}{C}\,|\omega|_{\max} = \frac{45}{311\,400}\,36 = 0{,}005\,p_1$$

Les contraintes σ dues aux bimoments B sont donc pratiquement sans importance.

Problème 4: Influence de la position des charnières

Dans le cas d'un véritable pont à poutres-caissons préfabriquées et assemblées par le remplissage des joints (« shear key »), il régnera probablement toujours une certaine imprécision quant à la position exacte des charnières par lesquelles on remplace approximativement l'effet d'une telle jonction. Il est intéressant de savoir dans quelle mesure la position des charnières influence l'interaction des poutres.

Nous avons examiné les deux ponts (rectangulaire et biais) de la figure 12 et avons exécuté le calcul de chacun d'eux pour deux positions z_S différentes des charnières :

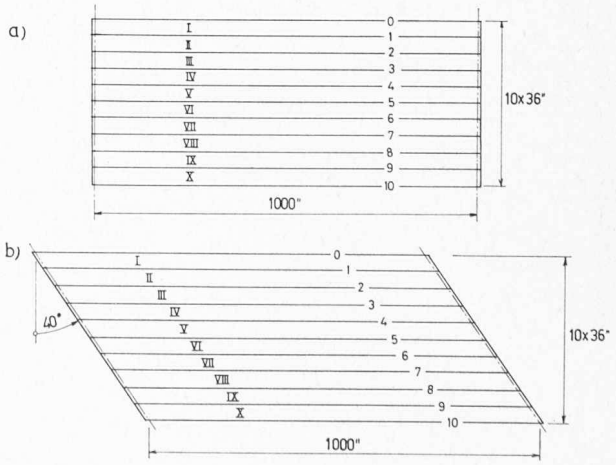

Fig. 12. — Pont rectangulaire et pont biais formés de dix poutres-caissons B IV-36. Dimensions en pouces (1″ = 1 pouce = 2,54 cm).

TABLEAU 5

Confrontation des résultats — pont rectangulaire formé de dix poutres-caissons B-IV 36

Charge linéaire $p = p_1 \sin \pi \frac{x}{l}$ sur le bord extérieur de la poutre I

r	$Ew : p_1$ $(x = l/2)$		$Ev : p_1$ $(x = l/2, z = 0)$	
	Exact	El. finis	Exact	El. finis
0	10 888	10 890		
1	9 485	9 489		
2	8 307	8 311		
3	7 326	7 329		
4	6 518	6 521		
5	5 864	5 866	19	0
6	5 349	5 351		
7	4 961	4 963		
8	4 690	4 691		
9	4 530	4 531		
10	4 477	4 478		

R	$10^5 M_y : p_1 l^2$ $(x = l/2)$		$10^5 M_z : p_1 l^2$ $(x = l/2)$		$10^5 T : p_1 l^2$ $(x = l)$		$10^3 Q_z : p_1 l$ $(x = 0)$		$10^3 N : p_1 l$ $(x = l/2)$	
	Exact	El. finis	Exact	El. finis	Exact	El. finis	Exact	El. finis	Exact	El. finis
I	1 595	1 601	56	54	1 054	1 052	51	51	13	
II	1 393	1 398	47	45	885	885	44	43	6	
III	1 224	1 228	40	38	738	737	38	38	0	
IV	1 084	1 088	33	31	607	607	34	34	−3	
V	969	973	27	25	491	491	30	30	−5	0
VI	878	881	22	20	387	387	27	27	−6	
VII	807	810	17	15	292	292	25	25	−5	
VIII	756	758	13	10	204	204	24	24	−3	
IX	722	724	8	6	120	120	23	23	0	
X	705	707	4	2	40	40	22	22	4	

Charge linéaire $p = p_1 \sin \pi \frac{x}{l}$ sur l'axe de la poutre I

r	$Ew : p_1$ $(x = l/2)$		$Ev : p_1$ $(x = l/2, z = 0)$	
	Exact	El. finis	Exact	El. finis
0	10 187	10 190		
1	9 542	9 545		
2	8 357	8 360		
3	7 369	7 372		
4	6 557	6 559		
5	5 899	5 901	19	0
6	5 381	5 383		
7	4 991	4 992		
8	4 717	4 719		
9	4 556	4 558		
10	4 503	4 505		

R	$10^5 M_y : p_1 l^2$ $(x = l/2)$		$10^5 M_z : p_1 l^2$ $(x = l/2)$		$10^5 T : p_1 l^2$ $(x = l)$		$10^3 Q_z : p_1 l$ $(x = 0)$		$10^3 N : p_1 l$ $(x = l/2)$	
	Exact	El. finis	Exact	El. finis	Exact	El. finis	Exact	El. finis	Exact	El. finis
I	1 544	1 550	27	25	485	484	49	50	10	
II	1 401	1 406	48	46	890	890	44	44	6	
III	1 231	1 236	40	38	742	742	39	38	1	
IV	1 090	1 094	33	31	611	611	34	34	−3	
V	975	979	27	25	494	494	30	30	−5	0
VI	883	886	22	20	389	389	28	28	−5	
VII	812	815	17	15	294	294	25	25	−5	
VIII	760	763	13	10	205	205	24	24	−3	
IX	726	729	8	6	121	121	23	23	0	
X	709	712	4	2	40	40	22	22	3	

a) $z_S = 12$ in (charnières près de la surface supérieure des poutres d'après la figure 10b) ;

b) $z_S = 0$ (charnières au niveau du centre de torsion des poutres).

La poutre I a été soumise à un groupe de trois charges concentrées : $P_1 = 0{,}25\,Q$, $P_2 = 0{,}50\,Q$ et $P_3 = 0{,}25\,Q$ appliquées respectivement aux $^7/_{16}$, $^8/_{16}$ et $^9/_{16}$ de la portée. (Leur effet correspond approximativement à une charge Q uniformément répartie sur un tronçon central de $^1/_8$ de la portée. Notons toutefois que les charges nodales équivalentes à une telle charge répartie, au sens des travaux virtuels, comprendraient encore des couples nodaux de forces. Mais la différence pratique n'est pas très grande.)

Les résultats du calcul pour les deux positions des charnières sont résumés dans le tableau 6. $\left(\text{Le calcul a été exécuté avec les éléments finis de longueur } \Delta = \frac{l}{16}\right)$. Pour le niveau inférieur des charnières, les flèches de la poutre chargée et des poutres voisines accusent une légère augmentation, tandis que pour les poutres situées près de l'autre bord du pont, les flèches ont une légère tendance à diminuer. Les différences ne sont pas toujours apparentes avec le nombre de décimales choisi. En ce qui concerne les efforts internes, on constate sur la poutre chargée (respectivement sur la poutre voisine) une légère augmentation des moments fléchissants, ceci au profit des poutres plus éloignées où la différence reste toutefois trop petite pour être mise en évidence avec le nombre de décimales utilisé. Les moments de torsion T restent pratiquement inchangés. Il est, par contre, naturel que la position des charnières influence fortement les moments de flexion M_z. Mais, comme on l'a déjà vu dans le problème 3, vis-à-vis des moments M_y, leur contribution aux contraintes normales σ n'est pas très importante.

Problème 5 : Influence du biais sur l'interaction des poutres

Une opinion assez répandue en pratique admet que l'effet du biais sur l'interaction des poutres du pont est négligeable. Ceci dit, on applique les mêmes coefficients de répartition transversale pour un pont biais que pour un ouvrage rectangulaire. Pour vérifier dans quelle mesure se justifie cette simplification, nous avons considéré les deux ponts de la figure 12a, b qui correspondent respectivement aux angles d'obliquité $\alpha = 0°$ et $\alpha = 40°$.

Dans un premier cas, nous avons supposé une charge uniforme p appliquée simultanément sur toutes les poutres du pont. Dans un pont rectangulaire, elle provoque dans toutes les poutres les mêmes moments fléchissants avec maximum $M_{y\,\max} = 0{,}125\,pl^2$. Les moments de torsion T sont nuls. Dans un pont biais, les moments de flexion M_y engendrés par la même charge sont plus petits, mais il apparaît des moments de torsion T. En analysant les diagrammes de M_y de la figure 13, où nous avons porté les résultats de notre calcul $\left(\text{pour } M = \frac{l}{\Delta} = 16\right)$, on constate que les valeurs maxima des moments fléchissants ont diminué d'environ 21 %.

En pratique, la charge uniforme qui pourra être prise en considération pour la répartition transversale des effets dus à l'interaction des poutres sera le plus souvent le poids propre du tablier. Par contre, le poids propre des poutres sera porté indépendamment par chacune d'elles, étant donné que le remplissage des joints ne s'effectue qu'après la mise en place des poutres. Notons toutefois que chaque poutre isolée bénéficiera de l'effet favorable du biais, qui se manifestera par une certaine diminution des moments fléchissants (à peu près 18 % dans le cas envisagé). Ceci est dû au fait que l'effet du biais des appuis équivaut, dans une certaine mesure, à un encastrement partiel. Pour ce qui est des surcharges, notons, par exemple, que les

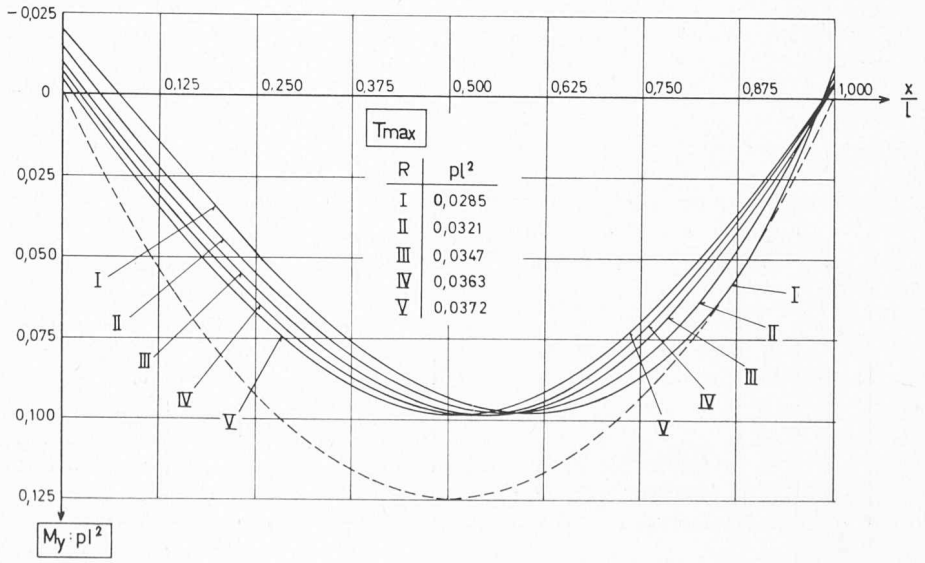

Fig. 13. — Diagrammes des moments fléchissants M_y et les valeurs maxima des moments de torsion T pour les cinq premières poutres du pont biais de la figure 12 *b*. Poutres-caissons B IV-36, charge uniformément répartie p par unité de longueur de chaque poutre. En traitillé : effet de la même charge sur un pont rectangulaire.

TABLEAU 6

Influence de la position z_s des charnières sur l'interaction des poutres. Pont rectangulaire et pont biais de la figure 12. Poutre I chargée par un groupe de trois forces concentrées : $P = {}^1/_4\,Q$, $P_2 = {}^1/_2\,Q$ et $P_3 = {}^1/_4\,Q$, appliquées respectivement à ${}^7/_{16}$, ${}^8/_{16}$ et ${}^9/_{16}$ de la portée

Pont rectangulaire ($\alpha = 0$)

R	$10^5 Elw_{(l/2)} : Q$		$M_{y(l/2)} : Ql$		$M_{z(l/2)} : Ql$		$T_{max} : Ql$	
	$z_s = 12''$	$z_s = 0$	$z_s = 12''$	$z_s = 0$	$z_s = 12''$	$z_s = 0$	$z_s = 12''$	$z_s = 0$
I	0,2014	0,2016	0,0442	0,0444	0,0015	0	0,0080	0,0080
II	0,1815	0,1816	0,0365	0,0365	0,0023	0	0,0149	0,0149
III	0,1583	0,1584	0,0290	0,0289	0,0014	0	0,0128	0,0128
IV	0,1395	0,1395	0,0242	0,0242	0,0010	0	0,0109	0,0109
V	0,1244	0,1244	0,0209	0,0209	0,0007	0	0,0090	0,0090
VI	0,1124	0,1123	0,0185	0,0184	0,0005	0	0,0072	0,0072
VII	0,1032	0,1031	0,0167	0,0167	0,0004	0	0,0055	0,0055
VIII	0,0964	0,0964	0,0155	0,0155	0,0002	0	0,0039	0,0039
IX	0,0921	0,0920	0,0147	0,0147	0,0001	0	0,0023	0,0023
X	0,0899	0,0898	0,0143	0,0143	0,0000	0	0,0008	0,0008

Pont biais ($\alpha = 40°$)

R	$10^5 Elw_{(l/2)} : Q$		$M_{y(l/2)} : Ql$		$M_{z(l/2)} : Ql$		$T_{max} : Ql$	
	$z_s = 12''$	$z_s = 0$	$z_s = 12''$	$z_s = 0$	$z_s = 12''$	$z_s = 0$	$z_s = 12''$	$z_s = 0$
I	0,1802	0,1804	0,0408	0,0410	0,0012	0	0,0146	0,0146
II	0,1576	0,1577	0,0325	0,0326	0,0021	0	0,0200	0,0200
III	0,1309	0,1310	0,0241	0,0241	0,0010	0	0,0165	0,0166
IV	0,1086	0,1087	0,0187	0,0188	0,0007	0	0,0134	0,0135
V	0,0905	0,0905	0,0150	0,0150	0,0004	0	0,0108	0,0108
VI	0,0760	0,0760	0,0123	0,0123	0,0003	0	0,0086	0,0087
VII	0,0646	0,0646	0,0102	0,0102	0,0002	0	0,0067	0,0067
VIII	0,0559	0,0559	0,0087	0,0087	0,0001	0	0,0052	0,0052
IX	0,0494	0,0494	0,0075	0,0075	0,0001	0	0,0038	0,0038
X	0,0446	0,0446	0,0066	0,0066	0,0000	0	0,0026	0,0026

normes françaises pour les ponts routiers prévoient comme surcharge du type A une charge uniformément répartie. Vis-à-vis d'un ouvrage rectangulaire, celle-ci bénéficierait donc pleinement de la réduction des moments de flexion M_y (21 % dans notre cas).

Un second cas de charge a été envisagé sous la forme de charges Q constituées par des charges linéaires $p = Q : \Delta l$ réparties uniformément sur les petits tronçons $\Delta l = l : 16$. Nous les avons appliquées à tour de rôle au milieu des joints $r = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5. Notons que par la combinaison de telles charges, nous pouvons exprimer par exemple l'effet des roues d'un véhicule roulant sur le pont. Les résultats du calcul, qui a été exécuté avec des éléments finis de longueur $\Delta = l : 16$, sont résumés dans le tableau 7. En plus des moments fléchissants au milieu de la portée, nous avons confronté les valeurs approchées des moments maxima $M_{y\,max}$ et les maxima des valeurs absolues des moments de torsion $|T|_{max}$. On constate que, vis-à-vis du pont rectangulaire, les moments fléchissants du pont biais sont beaucoup plus petits et les moments de torsion plus grands.

Notons encore que sur un pont biais, la position longitudinale la plus défavorable d'une charge Q (pour engendrer les plus grands moments possibles $M_{y\,max\,max}$) ne se trouve, en général, pas au milieu de la portée. En procédant par tâtonnements, nous avons trouvé par exemple que, si la charge Q se déplace le long du bord extérieur (indice 0) de la poutre I, le moment $M_{y\,max\,max}$ apparaît quand la charge se trouve à peu près à ${}^1/_{16}\,l$ à gauche du centre. Le moment $M_{y\,max\,max}$ ainsi obtenu vaut $488.10^{-4}\,Ql$ (contre $484.10^{-4}\,Ql$ pour la charge au milieu de portée). La différence n'est donc pas très importante.

Problème 6: Effet du tassement des appuis

Comme dernière application, nous avons étudié l'effet du tassement d'appui sur le pont biais de la figure 12b. Nous avons supposé que l'angle gauche de l'extrémité gauche du pont ($x = 0$, $y = 0$) a subi une dénivellation égale à $l/1000$. Ainsi, l'extrémité gauche du bord extérieur de la poutre I est descendue de $l : 1000$, tandis que l'extrémité gauche du bord intérieur (attachée par le joint 1 à la poutre II) est restée en place. Pour obtenir l'effet de ce tassement, il suffit de substituer au déplacement nodal du nœud 1 la valeur $w_1 = l : 1000$.

Le calcul a été exécuté avec des éléments finis de longueur $\Delta = l : 16$. Les résultats (moments de flexion M_y et moments de torsion T) sont représentés dans les figures 14 et 15. Quant aux moments fléchissants, on remarquera que le tassement affecte essentiellement la région autour du nœud 1, tandis qu'ailleurs ces moments restent relative-

TABLEAU 7

Influence du biais sur l'interaction des poutres
Dix poutres-caissons B IV-36 de portée $l = 1000$ in. Charge $Q = p \cdot \Delta l$ répartie sur $^1/_{16}$ de la portée et appliquée au centre du joint $r = 0, 1, 2 \ldots$

$10^4 \cdot M_y : Ql$ au centre de la potrée

Poutre	Charge Q appliquée sur le joint r											
	$r = 0$		1		2		3		4		5	
	$\alpha = 0°$	40°	0°	40°	0°	40°	0°	40°	0°	40°	0°	40°
I	525	484	443	406	326	277	266	212	225	169	197	137
II	362	308	407	371	384	345	285	239	237	187	204	151
III	290	229	302	255	367	328	355	315	264	218	222	172
IV	242	180	249	197	273	227	346	305	340	299	254	208
V	209	144	213	158	228	177	258	212	336	295	334	293
VI	184	117	188	129	198	145	218	168	252	206	334	293
VII	167	98	170	108	178	121	192	140	216	166	254	208
VIII	155	83	157	92	164	104	176	120	194	142	222	172
IX	147	71	149	80	155	91	166	106	182	125	204	151
X	143	62	145	70	151	81	161	94	176	113	197	137

$10^4 \cdot M_{y\,\max} : Ql$

I	525	484	443	406	326	299	266	234	225	193	197	163
II	362	341	407	371	384	345	285	256	237	205	204	171
III	290	263	302	276	367	328	355	315	264	234	222	189
IV	242	204	249	219	273	244	346	305	340	299	254	224
V	209	177	213	182	228	196	258	228	336	295	334	293
VI	184	150	188	154	198	165	218	185	252	222	334	293
VII	167	130	170	133	178	143	192	158	216	183	254	224
VIII	155	116	157	120	164	127	176	141	194	160	222	189
IX	147	106	149	110	155	118	166	129	182	147	204	171
X	143	102	145	106	151	113	161	125	176	140	197	163

$10^4 \cdot |T|_{\max} : Ql$

I	170	240	24	111	15	71	11	59	10	50	9	43
II	149	199	149	202	46	112	34	82	29	70	27	61
III	128	164	129	168	130	175	60	119	48	92	45	81
IV	109	133	109	138	110	145	112	154	69	126	63	102
V	90	107	90	111	92	118	94	127	96	143	81	134
VI	72	85	72	89	74	95	76	104	78	114	81	134
VII	55	69	55	70	56	75	58	82	60	92	63	102
VIII	39	53	39	53	40	58	41	64	43	71	45	81
IX	23	39	23	39	24	43	24	47	26	54	27	61
X	8	25	8	27	8	29	8	33	9	38	9	43

ment faibles. Par contre, les moments de torsion sont assez élevés et presque constants sur la totalité de la poutre I. La torsion des autres poutres est peu importante.

Conclusion

Le présent travail propose une solution approchée du calcul des ponts biais à poutres multiples sans entretoises. Il se base sur quelques hypothèses simplificatrices qui sont, en règle générale, bien remplies pour les ponts à poutres de section pleine ou fermée (poutres-caissons). Le calcul par éléments finis se fonde sur le théorème du minimum de l'énergie potentielle et sur la méthode des déformations.

Les fonctions de déplacement choisies pour les éléments finis comprennent tous les modes rigides de déplacement et sont susceptibles de donner toutes les déformations correspondant à une valeur constante des efforts internes. Elles assurent aussi automatiquement la continuité des déplacements entre les poutres et la continuité des déplacements et des rotations entre les éléments de la même poutre. Dans le cas d'un pont biais, cette continuité n'est toutefois pas complète pour les dérivées des déplacements horizontaux v. Cette petite imperfection n'intervient d'ailleurs que si les charnières entre les poutres se trouvent au-delà du niveau des centres de rotation des sections. Etant donné la faible influence du niveau des charnières sur les résultats, son effet est minime.

Mis à part cette petite imperfection, notre modèle est donc du type « conforme ». Comme l'a montré De Veubeke [1], un tel modèle est plus rigide et son énergie de déformation est plus petite que la valeur exacte. Partant dans le cas d'un ouvrage rectangulaire (où la continuité est parfaite), notre solution converge vers la solution exacte de la construction idéalisée, qui obéit aux hypothèses simplificatrices admises.

[1] Voir, par exemple, « Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Methods. Stress Analysis », J. Wiley and Sons Ltd, Londres 1965.

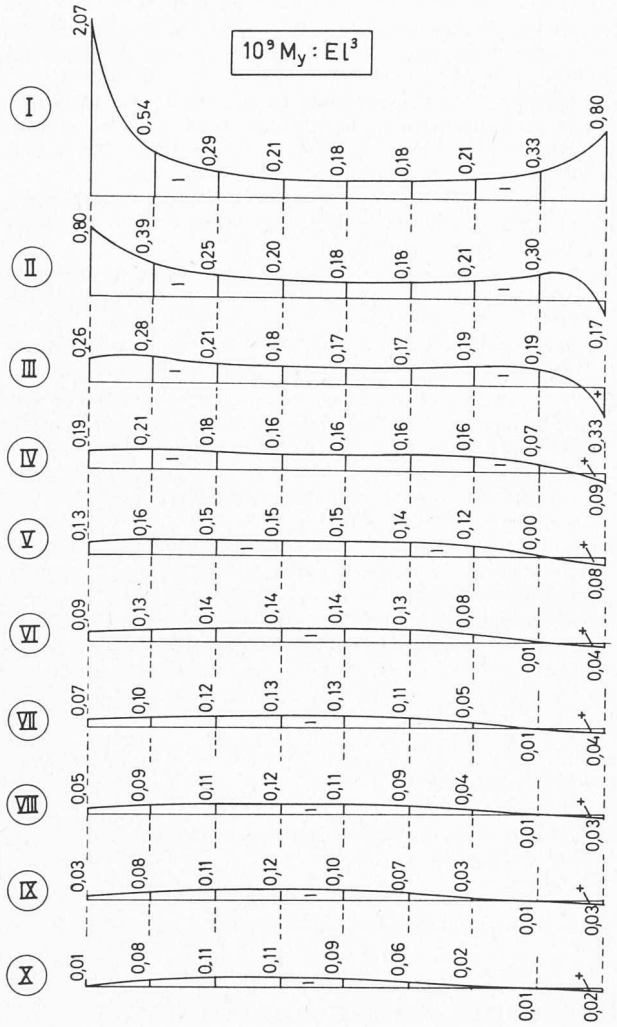

Fig. 14. — Effet du tassement $w_1 = \frac{1}{1000} l$ de l'angle supérieur gauche du pont biais de la figure 12 *b* (dix poutres-caissons B IV-36 de portée $l = 1000$ in). Diagrammes des moments fléchissants.

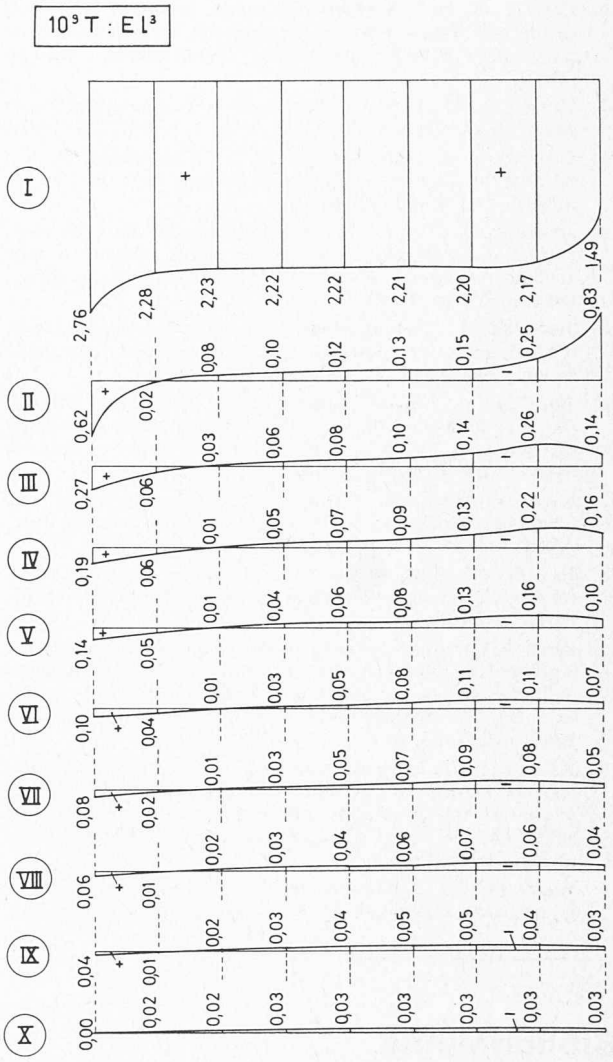

Fig. 15. — Effet du tassement $w_1 = \frac{1}{1000} l$ de l'angle supérieur gauche du pont biais de la figure 12 *b* (dix poutres-caissons B IV-36 de portée $l = 1000$ in). Diagrammes des moments de torsion.

Dans le cas d'un ouvrage biais, le problème de la convergence est plus compliqué. On peut montrer que, dans la mesure où l'on diminue la longueur des éléments et où chaque élément s'approche de l'état de contrainte constant, la petite discontinuité des dérivées des déplacements horizontaux v diminue et disparaît à la limite. Par conséquent, la solution converge. Notons toutefois que le calcul d'un ouvrage biais ne converge vraisemblablement que vers des valeurs très proches de la solution exacte, et ceci pour la raison suivante: l'adoption de la fonction de déplacement sous la forme donnée par l'équation (4) signifie que dans la bande limitée par les bords longitudinaux d'une poutre, le déplacement vertical w est linéaire le long des droites parallèles aux lignes d'appui. Dans le cas d'un pont biais, ceci revient à l'hypothèse des « sections biaises rigides ». Or, cette hypothèse n'est exacte qu'au droit des appuis. Ailleurs elle n'est valable qu'approximativement, à moins que les poutres-caissons ne soient dotées de diaphragmes rigides parallèles aux lignes d'appui.

Nous prévoyons d'étudier encore expérimentalement sur modèles réduits toutes nos hypothèses de travail ; nous avons de bonnes raisons de penser que ce contrôle confirmera la validité de la méthode proposée.

Bibliographie

1. Arya, A. S., Khachaturian, N., and Siess, C. P. : *Lateral Distribution of Concentrated Loads on Multibeam Highway Bridges*. Civil Eng. Studies Struct. Res. Series Rep. 213, Univ. of Illinois (1960).
2. Arya, A. S., Lohtia, R. P. : *Distribution of Wheel Loads on Multibeam Highway Bridges*. Indian Conc. Jour., 38, nº 4, p. 127-135 (1964).
3. Arya, A. S., Lohtia, R. P. : *Distribution of Wheel Loads on Multibeam Highway Bridges*. Indian Conc. Jour., 39, nº 4, p. 146-151 (1965).
4. Brilla, J. : *Statické riešenie žaluziových dôsák* (Calcul statique des dalles articulées). Stavebnícky časopis Slovenské Akadémie Vied Bratislava, 1963, nº 1-2.
5. Búci, B. : *Statický výpočet montovaných mostov s klbovým spojením prefabrikátov v priečnom smere* (Calcul statique des ponts assemblés par une liaison transversale articulée entre les éléments préfabriqués). Inženýrské stavby, 1963, nº 2, Bratislava.

6. CEJTLIN, S. Ju. : *O sovmestnoj rabote panelnych perekrytij* (traité sur l'interaction des éléments de toitures formés de panneaux). Sbornik statej VII, Gosstrojizdat, Moscou (1957).
7. CUSENS, A. R., PAMA, R. P. : *Design of Concrete Multibeam Bridge Decks*. Proc. ASCE, 91, nº ST5, p. 255-278 (1965).
8. DUBERG, J. E., KHACHATURIAN, N., FRADINGER, R. E. : *Method for Analysis of Multibeam Bridges*. Proc. ASCE, 86, nº ST7, p. 109-138 (1960).
9. JIROUŠEK, J. : *Statické vyšetřování šikmých mostních žaluziových desek* (Analyse statique des ponts obliques à dalle articulée). Sborník Vysokého Učení Technického Brno, 1966, nº 2-3, p. 219-253.
10. JIROUŠEK, J. : *Řešení šikmých mostních žaluziových desek* (Calcul des ponts obliques à dalle articulée). Inženýrské stavby, 1967, nº 2, Bratislava.
11. JIROUŠEK, J. : *Some contributions to the Finite Element Methods of Stress Analysis*. 10th Science Week University of Damascus, Part 4, p. 21-76, Supreme Council of Sciences Syrian Arab Republic (1970).
12. KHACHATURIAN, N., ROBINSON, A. R., POOL, R. B. : *Multibeam Bridges with Elements of Channel Section*. Proc. ASCE, 93, nº ST6, p. 161-187 (1967).
13. KLIMEŠ, M. : *Montované silniční mosty* (Ponts routiers formés d'éléments préfabriqués), Inženýrské stavby, 1967, nº 12, Bratislava.
14. KOPECKÝ, J. : *Statické vyšetřováni montovaných pravoúhlých desek-poloroštů s kloubovým spojením* (Analyse statique des dalles articulées rectangulaires formées d'éléments préfabriqués), Stavebnícky časopis Slovenské Akadémie Vied Bratislava, 1965, nº 6.
15. KOPECKÝ, J. : *Výpočet provoúhlých mostních poloroštů metodou rozdělovacích čísel* (Calcul des ponts rectangulaires à poutres multiples sans entretoises par la méthode des coefficients de répartition), Sborník Vysokého Učení Technického Brno, 1965, nº 3.
16. KOPECKÝ, J. : *Statické řešení šikmých poloroštů mostního typu* (Calcul statique des ponts obliques à poutres multiples sans entretoises). Sborník Vysokého Učení Technického Brno, 1968, nº 2.
17. KRAJČÍ, L., SMRČINA, M. : *Spolupôsobenie nosníkov montovaných mostov* (Interaction entre les poutres préfabriquées des ponts), Inženýrské stavby, 1962, nº 5, Bratislava.
18. KŘÍSTEK, V. : *Výpočet spolupůsobení komůrkových nosníků montovaných mostů* (Calcul de l'interaction entre les poutres-caissons des ponts). Inženýrské stavby, 1962, nº 7, Bratislava.
19. NASSER, K. W. : *Design Procedure for Lateral Load Distribution in Multibeam Bridges*. Prestressed Conc. Inst. Jour., 10, nº 4, p. 53-68 (1965).
20. PAMA, R. P., CUSENS, A. R. : *Edge Beam Stiffening of Multibeam Bridges*. Proc. ASCE, 93, nº ST2, p. 141-161 (1967).
21. POOL, R. B. : *An Investigation of Joint Forces in Multibeam Bridges*. Unpubl. Ph.D. thesis, Univ. of Illinois (1963).
22. POOL, R. B., et al. : *Analysis of Multibeam Bridges with Beam Elements of Slab and Box Section*. Eng. Exp. Sta. Bull. 483, Univ. of Illinois (1965).
23. ULICKIJ, B. E. : *Prostranstvennyi rascet bezdiafragmennych strojenij mostov* (Calcul des ponts sans diaphragmes). Avtotransizdat, Moscou (1963).
24. VÍTEK, J. : *Spolupůsobení nosníků montovaných mostů* (Interaction entre les poutres préfabriquées des ponts). Inženýrské stavby 1961, nº 12, Bratislava.
25. WATANABE, E. : *Study of Load Distribution in Multibeam Highway Bridges*, Unpubl. M.S. thesis, Iowa State Univ. (1968).

Adresse de l'auteur :
Dr J. Jiroušek,
Chaire de statistique et de résistance des matériaux, EPFL
Avenue Dapples 23
1006 Lausanne

Bibliographie

The science of rock mechanics. Part 1: The strength properties of rocks, par *W. Dreyer*, Dr-Ing. Professeur à l'Université technique de Clausthal. « Series on Rock and Soil Mechanics », Volume 1 (1972), No 2, janvier 1972. Trans. Tech. Publications. P.O. Box 9787, Bay Village, Ohio 44140 (USA) ; D-3392 Clausthal — Zellerfeld, Adolf-Ey-Str. 5 (Germany). — Un volume 15×21 cm, VIII - 501 pages, 137 figures, 86 tableaux, 200 références. Prix : relié, 25 dollars US. (International Standard Book Number (ISBN) : O-87849-002-7.) (Library of Congress Catalog Card Number : 78-149276.)

Ce volume est le premier d'une série de cinq consacrée à la « Science de la mécanique des roches ». Il traite plus particulièrement des propriétés de résistance des roches.

Après avoir exposé quelques généralités sur les caractéristiques mécaniques des minéraux (déformations, constantes élastiques), l'auteur aborde la mécanique des roches proprement dite, aux points de vue à la fois théorique et pratique.

Il montre en particulier quels sont les procédés de détermination des caractéristiques des roches sur échantillons et donne des valeurs numériques de ces caractéristiques pour différents types de roches. Il décrit également les méthodes d'essai *in situ*, en tenant compte des progrès les plus récents réalisés dans ce domaine. Quelques chapitres de son livre sont aussi consacrés aux essais sur modèle en mécanique des roches.

Signalons, pour les lecteurs que la question intéresse, les titres des quatre autres volumes formant ce traité : Bins and Bunkers for Handling Bulk Materials. — Engineering Geology and its Application in Civil Engineering Projects. — State-of-Stress Measurements in Rock Masses. — Slope Stability in Soil and Loose Rock.

Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Conférences

L'Institut de la construction métallique nous prie d'annoncer les conférences suivantes :

Le *mercredi 17 mai 1972, à 14 h. 15*, à la salle de conférence de l'Institut de la technique des transports, 9, ch. des Délices, Lausanne : *Behavior of Steel Frames Under Cyclically Applied Lateral Loads*, par le professeur LE-WU LU, de l'Université Lehigh à Bethlehem (Pennsylvanie).

Le *lundi 5 juin 1972, à 10 h. 15*, en salle B 304 : *Accidents constatés sur les ponts existants*, par M. ED. REY, adjoint du Service fédéral des routes et des digues.

Le *mercredi 7 juin 1972, à 10 h. 15*, à la salle de conférence l'ITEP, 9, ch. des Délices : *Problèmes relatifs à la construction en bois et en particulier en bois collé*, par M. G. KAEMPF, Holzbau AG, à Rupperswil.

Congrès

XXVe Congrès international CEBEDEAU

Liège et Gand, 16-19 mai 1972

Le programme comprend des conférences, discussions et visites d'étude, sous les thèmes EAU - AIR - CORROSION, entre autres :