

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 98 (1972)  
**Heft:** 12

**Artikel:** Le mécanique aléatoire de Georges Dedeabant et Philippe Wehrlé  
**Autor:** Baatard, François / Magnin, Simone  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-71549>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 22.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Communication de la Chaire de la mécanique de la turbulence  
de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne et du groupe de travail EPFL-ISM**

**La mécanique aléatoire de Georges Dedebant et Philippe Wehrlé<sup>1</sup>**

par le professeur FRANÇOIS BAATARD, D<sup>r</sup> ès sc. techn., et SIMONE MAGNIN, lic. ès sc. math., assistante

(Suite et fin)

**Chapitre VII — L'onde aléatoire**

36. *Analyse spectrale de l'oscillateur aléatoire stationnaire.*

Dans le cas stationnaire, la densité de probabilité conjuguée des fonctions  $X, \dot{X}, \Omega$  obéissant à l'équation :

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = 0$$

est de la forme :  $R\left(\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}, \omega\right)$  où  $u = \dot{x}$ .

La densité de probabilité conjuguée de  $B, C$  et  $\Omega$  où  $B$  et  $C$  vérifient :

$$\begin{cases} B \sin \Omega t - C \cos \Omega t = X \\ \Omega (B \cos \Omega t - C \sin \Omega t) = U \end{cases}$$

vaut alors :

$$\begin{vmatrix} \sin \omega t & \cos \omega t \cdot \omega \\ -\cos \omega t & \sin \omega t \cdot \omega \end{vmatrix} R\left(\frac{\omega^2 (b^2 + c^2)}{2}, \omega\right) = \omega R\left(\frac{\omega^2 (b^2 + c^2)}{2}, \omega\right)$$

En faisant un second changement de variables :

$$\begin{cases} B = A \cos \Phi \\ C = A \sin \Phi \end{cases}$$

la densité de probabilité conjuguée de  $A, \Phi$  et  $\Omega$  est de la forme :

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & -a \sin \varphi \\ \sin \varphi & a \cos \varphi \end{vmatrix} \omega R\left(\frac{\omega^2 a^2}{2}, \omega\right) = a \omega R\left(\frac{\omega^2 a^2}{2}, \omega\right)$$

cette densité de probabilité ne dépend pas de  $\varphi$ . Il en découle que  $\Phi$  est indépendante de  $A$  et de  $\Omega$  et que sa densité de probabilité est uniforme  $\left(= \frac{1}{2\pi}$  car  $\Phi$  prend ses valeurs entre 0 et  $2\pi$ ).

La densité de probabilité conjuguée de  $A$  et de  $\Omega$  vaut alors :

$$\int_0^{2\pi} \omega a R\left(\frac{\omega^2 a^2}{2}, \omega\right) d\varphi = 2\pi \omega a R\left(\frac{\omega^2 a^2}{2}, \omega\right)$$

<sup>1</sup> Voir *Bulletin technique de la Suisse romande* N° 4, du 19 février, et 9 du 29 avril 1972.

La densité de probabilité conjuguée de  $E = \frac{1}{2} A^2 \Omega^2$  et de  $\Omega$  vaut :

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} a\omega^2 & a^2\omega \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} 2\pi \omega a R(e, \omega) = \frac{2\pi}{\omega} R(e, \omega)$$

*Propriétés des moments. Connexion.*

Soit, donc, l'oscillateur aléatoire pris aux deux instants  $t_1$  et  $t_2$  et dont on va étudier connexion et moments.

$$X_1 = A \sin (\Omega t_1 - \Phi)$$

$$X_2 = A \sin (\Omega t_2 - \Phi)$$

où  $X$  est stationnaire.

Le moment  $\overline{X_1 X_2}$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \overline{X_1 X_2} &= \overline{A^2 \sin (\Omega t_1 - \Phi) \sin (\Omega t_2 - \Phi)} = \\ &= \frac{1}{2} \overline{A^2 \cos \Omega (t_2 - t_1)} - \frac{1}{2} \overline{A^2 \cos [\Omega (t_1 + t_2) - 2\Phi]} \end{aligned}$$

Calcul du dernier terme :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \overline{A^2 \cos [\Omega (t_1 + t_2) - 2\Phi]} = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} \cos [\omega (t_1 + t_2) - 2\varphi] a \omega R\left(\frac{\omega^2 a^2}{2}, \omega\right) d\varphi d\omega da = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ -\frac{a^2}{2} \sin [\omega (t_1 + t_2) - 2\varphi] \right]_0^{2\pi} d\omega da = 0 \end{aligned}$$

Il reste alors :  $\overline{X_1 X_2} = \frac{1}{2} \overline{A^2 \cos \Omega (t_2 - t_1)}$

Soient  $\overline{A^2(\omega)}$  la moyenne liée de  $A^2$  pour  $\Omega = \omega$  et  $\psi(\omega)$  la densité de probabilité de  $\Omega$ , alors, le moment rectangle  $\overline{X_1 X_2}$  vaut :

$$\begin{aligned} \overline{X_1 X_2} &= \frac{1}{2} \overline{A^2 \cos \Omega (t_2 - t_1)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \overline{A^2(\omega)} \cos \omega (t_2 - t_1) \psi(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Si  $t_2 = t_1$ ,  $\overline{X^2}$  a la valeur :

$$\overline{X^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \overline{A^2(\omega)} \psi(\omega) d\omega$$

Comme  $\overline{X_1} = \overline{X_2} = \overline{X} = 0$ , le coefficient de corrélation entre  $X_1$  et  $X_2$  vaut :

$$r(t_2 - t_1) = r(t) = \frac{\int_0^{\infty} \overline{A^2(\omega)} \cos \omega t \psi(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} \overline{A^2(\omega)} \psi(\omega) d\omega}$$

En posant :

$$f(\omega) = \frac{\overline{A^2(\omega)} \psi(\omega)}{\int_0^{\infty} \overline{A^2(\omega)} \psi(\omega) d\omega} = \frac{\overline{A^2(\omega)} \psi(\omega)}{\overline{A^2}}$$

$r$  prend la forme :

$$r(t) = \int_0^{\infty} f(\omega) \cos \omega t d\omega$$

c'est la forme de Khintchine qui n'est pas particulière à l'oscillateur stationnaire mais à toute fonction aléatoire analytique stationnaire.

La connaissance de la fonction de corrélation  $r(t)$  permet de calculer  $f(\omega)$ . Si l'on connaît  $\overline{A^2(\omega)}$  (et  $\overline{A^2}$ ), il est possible de calculer la densité de probabilité  $\psi(\omega)$  de  $\Omega$ .

La fonction de corrélation de  $X$  vaut  $r(t) = \frac{\overline{A^2 \cos \Omega t}}{\overline{A^2}}$

et il est facile de voir que la fonction de corrélation de  $\dot{X}$  vaut :

$$s(t) = \frac{\overline{A^2 \Omega^2 \cos \Omega t}}{\overline{A^2 \Omega^2}}$$

Comme l'énergie de l'oscillateur est :  $E = \frac{1}{2} A^2 \Omega^2$ ,  $s(t)$  peut s'écrire :

$$s(t) = \frac{\overline{E \cos \Omega t}}{\overline{E}}$$

$\overline{E(\omega)}$  est la moyenne liée de l'énergie pour  $\Omega = \omega$  et d'autre part  $\overline{\mathcal{F}(\omega)}$  est la fonction de répartition de  $\Omega$ . Elle peut être appelée fonction spectrale car elle détermine la répartition des fréquences dans le spectre qui peut être continu, de bandes ou de raies. La fonction  $s(t)$  vaut :

$$s(t) = \int_0^{\infty} \cos \omega t \frac{\overline{E(\omega)}}{\overline{E}} d\overline{\mathcal{F}(\omega)}$$

Si  $d\varphi(\omega) = \frac{\overline{E(\omega)}}{\overline{E}} d\overline{\mathcal{F}(\omega)}$

$$s(t) = \int_0^{\infty} \cos \omega t d\varphi(\omega)$$

On obtient à nouveau la relation de Khintchine.

La fonction  $\varphi$  n'est identique à la fonction spectrale  $\overline{\mathcal{F}(\omega)}$  que si  $\overline{E(\omega)} = \text{constante} = \overline{E}$ .

En connaissant  $s(t)$ ,  $\overline{E(\omega)}$  et  $\overline{E}$  on peut calculer  $d\varphi(\omega)$  et, en intégrant,  $\overline{\mathcal{F}(\omega)}$  la fonction de répartition de  $\Omega$  (résultat analogue à ci-dessus).

### 37. Onde aléatoire.

Dans le cas d'une fonction aléatoire analytique stationnaire  $X|_t$ , la fonction de corrélation correspondante peut s'écrire sous la forme :

$$r(h) = 1 - \frac{S_1^2 h^2}{S_0^2 2!} + \frac{S_2^2 h^4}{S_0^2 4!} - \frac{S_3^2 h^6}{S_0^2 6!} + \dots \quad (1)$$

où les  $S_i$  sont les écarts types de  $X^{(i)}|_t$ .

La fonction  $r(h)$  peut aussi s'écrire sous la forme de Khintchine :

$$r(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega h d\overline{\mathcal{F}(\omega)} \quad (2)$$

où  $\overline{\mathcal{F}(\omega)}$  est une fonction de répartition ; alors :

$r(h) = \overline{\cos \Omega h}$  et, en développant  $\overline{\cos \Omega h}$  :

$$r(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} \overline{\Omega^2} + \frac{h^4}{4!} \overline{\Omega^4} - \frac{h^6}{6!} \overline{\Omega^6} + \dots$$

Du point de vue physique, le développement de  $r(h)$  en fonction des  $S_i$  représente l'aspect corpusculaire (1) du corpuscule aléatoire, tandis que le développement de  $r(h) = \overline{\cos \Omega h}$  représente son aspect ondulatoire (2).

Il suffit qu'une fonction aléatoire stationnaire soit continue pour que sa fonction de corrélation puisse prendre la forme de Khintchine :

$$r(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega h d\overline{\mathcal{F}(\omega)}$$

où le spectre  $\overline{\mathcal{F}(\omega)}$  est une fonction de répartition.

Si le spectre est une fonction « en escalier »,  $r(h)$  vaudra :

$$r(h) = \sum_n a_n^2 \cos \omega_n h, \quad \sum_n a_n^2 = 1$$

les  $\omega_n$  sont les valeurs de  $\omega$  pour lesquelles  $\overline{\mathcal{F}(\omega)}$  fait un saut et les  $a_n^2$  représentent la valeur de ce saut (toujours positif car  $\overline{\mathcal{F}(\omega)}$  est une fonction croissante). Dans ce cas la fonction de corrélation  $r(h)$  est presque périodique. Elle sera périodique si les  $\omega_n$  sont des multiples entiers de la même pulsation fondamentale  $\omega_0$  :

$$r(h) = \sum_n a_n^2 \cos n \omega_0 h.$$

Si le spectre  $\overline{\mathcal{F}(\omega)}$  est dérivable,  $r(h)$  sera de la forme (Khintchine) :

$$r(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega h \varphi(\omega) d\omega$$

où  $d\overline{\mathcal{F}(\omega)} = \varphi(\omega) d\omega$ .

En général,  $\overline{\mathcal{F}(\omega)}$  sera la somme d'une fonction continue et d'une « fonction en escalier ».

38. Equation du son du corpuscule aléatoire.

L'une des formes les plus simples que puisse prendre l'équation d'énergie (§ 29) est :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Physiquement ce fait a lieu lorsqu'on fait subir à un corpuscule aléatoire dans l'état de Maxwell une « perturbation sonore », c'est-à-dire si on modifie  $\rho_o$  et  $k_o$  en chaque point de telle sorte que les dérivées d'espace soient négligeables par rapport aux dérivées du temps.

Si  $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ , alors  $k^{3/2} \cdot \rho^{-1} = k_o^{3/2} \cdot \rho_o^{-1} = \text{constante}$

dans tout l'espace.

Soit maintenant l'équation aux dérivées partielles du 2<sup>e</sup> ordre en  $\rho$  (voir § 24), conséquence de la double dérivabilité en moyenne quadratique des fonctions aléatoires  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\overline{X_i^2} \cdot \rho) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{X_i} \cdot \rho)$$

Les  $\overline{X_i}$  sont nuls dans l'équation de Maxwell, par suite l'équation se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\overline{X_i^2} \cdot \rho)$$

De plus, pour la loi de Maxwell :  $\overline{X_i^2} = k$ ,

d'où : 
$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (k\rho)$$

Le développement de Taylor de  $\rho k$  donne :

$$\rho k = \rho_o k_o + \frac{\partial(\rho k)}{\partial \rho} \Big|_{\rho = \rho_o} \cdot (\rho - \rho_o) + \dots$$

comme  $k^{3/2} \cdot \rho^{-1} = \text{cste} = a^{3/2}$ , cela peut s'écrire :

$$\rho k = \rho_o k_o + \frac{\partial(a \rho^{5/3})}{\partial \rho} \Big|_{\rho = \rho_o} \cdot (\rho - \rho_o) + \dots$$

$$\rho k = \rho_o k_o + \frac{5}{3} a \rho_o^{2/3} (\rho - \rho_o) + \dots$$

$$\rho k = \rho_o k_o + \frac{5}{3} k_o (\rho - \rho_o) + \dots$$

En remplaçant  $\rho k$  par sa valeur, l'équation  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} =$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (k\rho)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{5}{3} k_o \nabla^2 \rho \quad (\text{ou } \nabla^2 = \text{laplacien}).$$

C'est une equation d'onde : la vitesse de propagation de l'onde vaudra :

$$a_o = \sqrt{\frac{5 k_o}{3}}$$

Cette equation montre qu'une perturbation de densité, apportée dans un « étage de turbulence », se propage avec une vitesse correspondant au module d'énergie de l'étage.

L'hydrodynamique classique ignore ce fait, puisqu'elle ne connaît que les ondes sonores proprement dites, ces dernières ayant une vitesse d'un ordre de grandeur énormément plus grand que celui qu'il s'agit d'expliquer.

L'entropie d'un corpuscule aléatoire de densité  $\rho$  et de module  $k$  uniformes vaut :

$$S = \log(k^{3/2} \cdot \rho^{-1})$$

$$\text{ou } k = \frac{\overline{U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2}}{3}$$

Pour une loi de Maxwell  $k = \overline{U_1'^2} = \overline{U_2'^2} = \overline{U_3'^2} \cdot k^{3/2}$  représente alors le produit des incertitudes  $s_1 s_2 s_3$  sur les composantes de la vitesse aléatoire.

Comme la densité  $\rho$  est uniforme :

$$\sigma_1^2 = \overline{X_1'^2} \approx \iiint_{-l}^{+l} \rho x_1'^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{8}{3} \rho l^5 = \overline{X_1'^2} = \overline{X_3'^2}$$

( $\approx$  : proportionnel à)

de plus : la masse  $M = \iiint_{-l}^{+l} \rho dx_1 dx_2 dx_3 = 8 \rho l^3$

Alors le produit  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$  des incertitudes sur les composantes de la position est proportionnel à :  $M^{5/2} \cdot \rho^{-1}$ .

Cela signifie que l'entropie d'un corpuscule aléatoire est le logarithme du produit des incertitudes sur chaque couple positions-vitesses à une constante près.

39. Fonction aléatoire de deux paramètres.

Les coordonnées du corpuscule aléatoire n'étaient fonction que d'un seul paramètre certain  $t$  ; soit, maintenant, une grandeur aléatoire  $\Phi$  qui soit fonction aléatoire de  $t$  et d'un point de l'espace :  $\Phi$  constitue un champ aléatoire.

Si l'espace n'a qu'une dimension, la notion de champ aléatoire se ramène à celle de fonction aléatoire  $\Phi |_{x,t}$  dépendant de deux paramètres certains  $x$  et  $t$ .

Cette fonction  $\Phi |_{x,t}$  est dérivable en moyenne quadratique par rapport à  $x$  et à  $t$  s'il existe  $\frac{\partial \Phi |_{x,t}}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \Phi |_{x,t}}{\partial t}$  tels que :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{(\Phi |_{x+k,t} - \Phi |_{x,t} - \frac{\partial \Phi |_{x,t}}{\partial x} k)^2}}{k} \right) = 0 \text{ et que :}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{(\Phi |_{x,t+h} - \Phi |_{x,t} - \frac{\partial \Phi |_{x,t}}{\partial t} h)^2}}{h} \right) = 0$$

Dans le cas où  $\Phi |_{x,t}$  est stationnaire et analytique par rapport à ses deux paramètres, la fonction de corrélation correspondante pourra se mettre sous la forme :

$$r(h, k) = 1 - \frac{1}{2 \Phi'^2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)^2 k^2 + 2 \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} h k + \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right)^2 h^2 \right] + \dots$$

En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{h, k \rightarrow 0} \overline{(\Phi' |_{x+k, t+h} - \Phi' |_{x, t})^2} &= \\ &= \lim_{h, k \rightarrow 0} \overline{[(\Phi' |_{x+k, t+h} - \Phi' |_{x+k, t}) + (\Phi' |_{x+k, t} - \Phi' |_{x, t})]^2} \\ &= \lim_{h, k \rightarrow 0} \overline{(\Phi' |_{x+k, t+h} - \Phi' |_{x+k, t})^2 + (\Phi' |_{x+k, t} - \Phi' |_{x, t})^2 +} \\ &\quad + 2 \overline{(\Phi' |_{x+k, t+h} - \Phi' |_{x+k, t})(\Phi' |_{x+k, t} - \Phi' |_{x, t})} \end{aligned}$$

Par définition de la dérivée, cette expression devient :

$$\begin{aligned} &= \lim_{h, k \rightarrow 0} h^2 \left( \frac{\partial \Phi' |_{x+k, t}}{\partial t} \right)^2 + k^2 \left( \frac{\partial \Phi' |_{x, t}}{\partial x} \right)^2 + \\ &\quad + 2 h k \frac{\partial \Phi' |_{x+k, t}}{\partial t} \frac{\partial \Phi' |_{x, t}}{\partial x} = \\ &= \lim_{h, k \rightarrow 0} h^2 \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right)^2 + 2 h k \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + k^2 \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)^2 = \\ &= \lim_{h, k \rightarrow 0} \overline{(\Phi' |_{x+k, t+h} - \Phi' |_{x, t})^2} = \\ &= \lim_{h, k \rightarrow 0} 2 \overline{\Phi'^2} (1 - r(h, k)) \end{aligned}$$

D'où, finalement :

$$\begin{aligned} r(h, k) &= 1 - \frac{1}{2 \overline{\Phi'^2}} \left( \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)^2 k^2 + 2 \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} h k + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right)^2 h^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

La forme quadratique entre parenthèses est définie positive car elle vaut :

$$\left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \cdot k + \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \cdot h \right)^2$$

Comme dans le cas à un seul paramètre certain, les conditions de cohérence sont satisfaites à la limite par la fonction :  $r(h, k) = \cos(\omega h - \mu k)$  et la fonction de corrélation de la fonction analytique stationnaire la plus générale peut se mettre sous la forme :

$$r(h, k) = \cos(\Omega h - M k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega h - \mu k) d_{\omega, \mu} F(\omega, \mu)$$

où  $F(\omega, \mu)$  est une fonction de répartition. Cette forme est une extension de celle de Khintchine.

La fonction aléatoire la plus simple donnant une fonction de corrélation de cette forme est l'onde aléatoire, extension de l'oscillateur aléatoire :

$$\Phi |_{x, t} = A \cos(\Omega t - Mx + \Psi)$$

où  $A$  est une constante aléatoire d'espérance nulle,  $\Omega$ ,  $M$  des constantes aléatoires et  $\Psi$  une constante aléatoire de distribution uniforme.

Ces constantes sont toutes indépendantes deux à deux, sauf  $\Omega$  et  $M$  qui peuvent être corrélées.

Le moment  $\overline{\Phi \Phi_1} = \overline{\Phi |_{x, t} \Phi |_{x_1, t_1}}$  vaut alors :

$$\begin{aligned} \overline{\Phi \Phi_1} &= \overline{A^2 \cos(\Omega t - Mx + \Psi) \cos(\Omega t_1 - Mx_1 + \Psi)} = \\ &= \frac{A^2}{2} \overline{\cos[\Omega(t-t_1) - M(x-x_1)]} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{A^2}{2} \overline{\cos[\Omega(t+t_1) + M(x+x_1) + 2\Psi]} \\ &= \frac{A^2}{2} \overline{\cos[\Omega(t-t_1) - M(x-x_1)]} \end{aligned}$$

$$\text{Si } t = t_1 : \overline{\Phi \Phi_1} = \frac{A^2}{2} \overline{\cos M(x-x_1)}$$

$$\text{si } x = x_1 : \overline{\Phi \Phi_1} = \frac{A^2}{2} \overline{\cos \Omega(t-t_1)}$$

la connaissance de ces 2 moments ne permet évidemment pas de connaître  $\overline{\Phi \Phi_1}$  dans le cas où  $t$  et  $x$  sont quelconques.

Cas particulier où  $M = \mp \frac{\Omega}{c}$ ,  $c =$  constante certaine.

Dans ce cas :

$$r(h, k) = \overline{\cos \Omega \left( h \pm \frac{k}{c} \right)} = \overline{\cos \Omega \left[ (t-t_1) \pm \frac{x-x_1}{c} \right]}$$

où  $h = t-t_1$ ,  $k = x-x_1$ .

Etant donnés deux points  $x$  et  $x_1$ , si  $t$  et  $t_1$  sont tels que :

$$x_1 - x = \mp c(t_1 - t)$$

la fonction de corrélation vaut 1 ; les valeurs de la fonction aléatoire  $\Phi |_{x, t}$  en  $x$  et en  $x_1$  coïncident alors avec un

décalage de temps égal à  $\pm \frac{x_1 - x}{c}$

$\Phi$  est donc une fonction aléatoire de la combinaison  $(x \pm ct)$  : c'est une grandeur qui se propage par ondes.

La fonction de corrélation  $r(h, k) = \cos \Omega \left( h \pm \frac{k}{c} \right)$  est une onde : l'onde de corrélation, qui se propage avec la vitesse  $c$ .

$r(h, k)$  obéit à l'équation différentielle (éq. de d'Alembert) :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 r(h, k)}{\partial h^2} = \frac{\partial^2 r(h, k)}{\partial k^2}$$

car :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 r(h, k)}{\partial h^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \cos \Omega \left( h \pm \frac{k}{c} \right)}{\partial h^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \cos \Omega \left( h \pm \frac{k}{c} \right)}{\partial h^2} = \\ &= \frac{\partial^2 \cos \Omega \left( h \pm \frac{k}{c} \right)}{\partial k^2} = \frac{\partial^2 \cos \Omega \left( h \pm \frac{k}{c} \right)}{\partial k^2} = \frac{\partial^2 r(h, k)}{\partial k^2} \end{aligned}$$

Inversement la fonction  $r(h, k)$  ne peut valoir 1 (le cas où  $h = k = 0$  est exclu) que si  $\frac{k}{h} = \mp c$ . En effet, à cause des conditions de cohérence, il faut et il suffit, pour que  $r(h, k) = 1$ , que le terme du second ordre du développement de  $r(h, k)$  soit nul ; par conséquent :

$$\left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)^2 k^2 + 2 \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Phi'}{\partial x} h k + \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right)^2 h^2 = 0$$

dans le cas de l'onde aléatoire, cette expression prend la forme :

$$\overline{\Omega^2 h^2} - 2 \overline{\Omega M h k} + \overline{M^2 k^2} = 0 \quad (1)$$

Pour que cette équation puisse être vérifiée, il faut que  $\frac{\Omega M}{2} \cong \overline{\Omega^2 M^2}$ ; l'inégalité de Schwartz implique :  $\frac{\Omega M}{2} \leq \overline{\Omega^2 M^2}$ , alors :

$$\frac{\Omega M}{2} = \overline{\Omega^2 M^2}$$

Cela entraîne que  $\Omega$  et  $M$  sont proportionnels, soit :

$$M = \mp \frac{\Omega}{c} \quad c = \text{cste certaine.}$$

Alors l'expression (1) devient :  $\overline{\Omega^2 \left( h \pm \frac{k}{c} \right)^2}$  et elle n'est nulle que si  $\frac{k}{h} = \mp c$ .

En conclusion, la condition nécessaire et suffisante pour que  $r(h, k) = 1$  est que  $\frac{k}{h} = \mp c$  et que  $M = \mp \frac{\Omega}{c}$ .

*Remarque* : le nombre certain  $c$  peut être considéré comme un nombre aléatoire  $C$  de loi :

$$C = c \text{ avec probabilité } \alpha \\ C = -c \text{ avec probabilité } 1 - \alpha$$

La fonction de corrélation d'un champ admettant une onde de corrélation prend alors la forme :

$$r(h, k) = \alpha \cos \Omega \left( h + \frac{k}{c} \right) + (1 - \alpha) \cos \Omega \left( h - \frac{k}{c} \right)$$

En particulier si  $\alpha = \frac{1}{2}$  :

$$r(h, k) = \frac{1}{2} \left[ \overline{\cos \Omega \left( h + \frac{k}{c} \right)} + \overline{\cos \Omega \left( h - \frac{k}{c} \right)} \right] = \\ = \overline{\cos(\Omega h) \cos \left( \frac{\Omega k}{c} \right)} = 1 - \overline{\Omega^2} \frac{1}{2} \left( h^2 + \frac{k^2}{c^2} \right) + \dots$$

## Chapitre VIII — Moyennes de Lagrange et moyennes d'Euler attachées au corpuscule aléatoire

La mécanique aléatoire s'est donc révélée essentiellement comme une mécanique de la diffusion turbulente, qui s'identifie à la connexion d'un champ de probabilité.

Elle se concrétise entre autre sous forme d'une théorie de la viscosité, qui est la théorie de la diffusion de la quantité de mouvement, et d'une théorie de la conductibilité, qui est la théorie de la diffusion de l'énergie cinétique.

40. Rappel des règles de contraction des indices des densités de probabilité conjuguées.

*Notations* : une suite de lettres minuscules séparées par des virgules et mise entre parenthèses représentera la densité de probabilité conjuguée des variables aléatoires correspondantes.

Par exemple :  $(x_1, u_1, x_2, u_2)$

est la densité de probabilité conjuguée des variables aléatoires :

$$X|_{t_1}, U|_{t_1} = \dot{X}|_{t_1}, X|_{t_2}, U|_{t_2} = \dot{X}|_{t_2}.$$

Une densité de probabilité conjuguée conditionnelle (densité liée) s'écrira de la même façon en plaçant un point-virgule avant les variables qui sont données a priori.

Par exemple :  $(u_1, u_2; x_1)$

est la densité de probabilité conjuguée de  $U|_{t_1}$  et  $U|_{t_2}$  sachant que la variable aléatoire  $X|_{t_1}$  a pris la valeur certaine  $x_1$ .

A l'aide de ces notations :

1) le théorème des probabilités totales s'exprime sous la forme :

en sommant une densité par rapport à une de ses variables courantes, c'est-à-dire par rapport à une variable située avant le point-virgule, la densité obtenue ne contiendra plus cette variable.

Par exemple :

$$(u_1, u_2; x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_1, u_2, x_2; x_1) dx_2$$

ce que nous conviendrons d'écrire sous la forme :

$$(u_1, u_2; x_1) = (u_1, u_2, x_2; x_1) dx_2$$

Cette notation est alors analogue à celle du calcul tensoriel concernant la sommation par rapport aux indices muets.

2) le théorème des probabilités composées s'écrit : dans le quotient de deux densités, où les variables situées à droite du point-virgule sont les mêmes au dénominateur et au numérateur, toute variable figurant à gauche du point-virgule à la fois au dénominateur et au numérateur passe à droite du point-virgule dans la densité qui exprime le quotient.

Par exemple :

$$(u_1, u_2, x_2; x_1) = \frac{(u_1, u_2, x_1, x_2)}{(x_1)} \\ (u_1, u_2; x_1, x_2) = \frac{(u_1, u_2, x_2; x_1)}{(x_2; x_1)} = \frac{(u_1, u_2, x_1, x_2)}{(x_1, x_2)}$$

Connaissant la densité de probabilité conjuguée  $(x_1, x_2, u_1, u_2)$ , et à l'aide des opérations précédentes, il est possible de calculer toutes les densités (conjuguées, individuelles ou conditionnelles) se rapportant aux variables aléatoires  $X|_{t_1}, U|_{t_1}, X|_{t_2}, U|_{t_2}$ .

Alors toute relation existant entre les densités de probabilité dans un fluide peut s'obtenir par combinaison et itération des deux opérations qui viennent d'être décrites.

$$\text{Par exemple : } (u_1, u_2; x_1) = (u_1, u_2, x_2; x_1) dx_2 = \\ = (u_1, u_2; x_1, x_2) (x_2; x_1) dx_2 = \frac{(u_1, u_2, x_1, x_2) dx_2}{(u_1, u_2, x_1, x_2) dx_2 du_1 du_2}$$

L'analogie avec les chaînes de Markov est évidente.

41. Nature des diverses densités de probabilité dans un fluide.

Du point de vue physique, les densités de probabilité dans un fluide sont de trois natures différentes :

a) Les densités corpusculaires sont les densités conjuguées ou individuelles non liées.

Elles dérivent toutes par contraction de la densité :

$$(x_1, u_1, x_2, u_2)$$

$$\text{Ainsi : } (x_1, x_2) = (x_1, u_1, x_2, u_2) du_1 du_2$$

$$(x_1) = (x_1, u_1, x_2, u_2) du_1 du_2 dx_2, \text{ etc.}$$

b) Les densités de champ sont les densités liées correspondant à des valeurs fixées des coordonnées :

$$(u_1, u_2; x_1, x_2), (u_1; x_1), \text{ etc.}$$

Les densités de champ correspondent au point de vue d'Euler en hydrodynamique.

c) Les densités de « transition » ou de « passage » correspondent à la densité de probabilité d'une certaine transformation de l'état du corpuscule à un instant donné :

$$(x_2, u_2; x_1, u_1), (x_2; x_1), \text{ etc.}$$

Les densités de passage correspondent au point de vue de Lagrange en hydrodynamique.

*Propriétés des densités de probabilité de passage.*

La densité de probabilité de passage :  $(x_2; x_1)$  est la densité de probabilité de  $X|_{t_2}$  sachant que le corpuscule  $X|_{t_1}$  se trouvait en  $x_1$  à l'instant  $t_1$  (diffusion turbulente). Cette densité vaut :

$$(x_2; x_1) = \frac{(x_1, x_2)}{(x_1)}$$

La densité de probabilité de passage est largement utilisée dans les phénomènes de diffusion turbulente et dans toute question relevant des probabilités en chaîne.

*Signification hydrodynamique des densités de passage*

Dans un fluide « certain » la méthode de Lagrange considère la position  $x_2$  d'une particule à l'instant  $t_2$  comme une fonction certaine :  $x_2(x_1, t_1, t_2)$  de la position  $x_1$  occupée à l'instant  $t_1$  par la particule.

Comme le fluide « certain » est continu, la relation  $x_2 = x_2(x_1, t_1, t_2)$  est biunivoque entre  $x_1$  et  $x_2$ , de sorte que les paramètres  $x_1$  et  $t_1$  permettent de repérer et d'identifier sans ambiguïté la particule dont on parle.

Dans un fluide aléatoire, au contraire, à la particule située en  $x_1$  au temps  $t_1$  correspond, au temps  $t_2$ , non pas une particule mais un *sous-ensemble* de particules dont la coordonnée  $X_2$  est une fonction aléatoire  $X_2|x_1, t_1, t_2$  et qui se particularisera au sein des autres éléments du fluide par sa densité :

$$(x_2; x_1) = P(x_2; x_1, t_1, t_2)$$

tandis que la densité de l'ensemble des particules situées en  $x_2$  au temps  $t_2$  est :

$$(x_2) = \rho(x_2; t_2) = (x_2; x_1)(x_1) dx_1$$

La densité de probabilité de passage  $P$  permet donc de calculer l'évolution de la densité de probabilité et, par suite, de la densité du fluide turbulent entre l'instant  $t_1$  et l'instant  $t_2$ .

La correspondance  $x_2 \rightarrow x_1$  n'est pas univoque, traduisant ainsi la diffusion turbulente du fluide en lui-même, ce qui est une propriété essentielle des fluides naturels et que l'hydrodynamique classique ignore.

#### 42. Moyennes de Lagrange et calcul de la dispersion turbulente.

Soit d'abord une fonction certaine  $\psi$  de la variable aléatoire  $X$  et du temps  $t$ .  $\psi(X, t)$  est en fait attachée à l'élément fluide ayant la coordonnée  $X$  à l'instant  $t$ .

Au point  $x_1$ , à l'instant  $t_1$ , cette fonction a la valeur :

$$\psi(x_1, t_1) = \psi_1$$

Au temps  $t_2$ , les éléments fluides qui étaient concentrés en  $x_1$  à l'instant  $t_1$ , ont diffusé et possèdent une coordonnée aléatoire  $X_2$ .

La moyenne de Lagrange de  $\psi$  est : la moyenne de  $\psi$  prise sur ces éléments  $X_2$  qui émanent de  $x_1$ .

C'est donc :

$$\widehat{\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_2, t_2)(x_2; x_1) dx_2$$

où  $\widehat{\psi}$  est une fonction de  $x_1$ , de  $t_1$  et de  $t_2$ .

La variation  $\widehat{\psi} - \psi_1$  représente visiblement celle de  $\psi$  due à des actions extérieures, puisque tous les éléments du fluide ont été suivis dans leur diffusion.

Si, en particulier,  $\psi = X$ , on obtient la position du centre de gravité des éléments du fluide qui ont diffusé à partir de  $x_1$  :

$$\widehat{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(x_2; x_1) dx_2$$

Leur dispersion vaudra :

$$\widehat{X'^2} = \widehat{X^2} - \widehat{X}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_2 - \widehat{X})^2(x_2; x_1) dx_2$$

A nouveau : les éléments fluides aléatoires sont surtout caractérisés par les moments du premier et du deuxième ordre construits à partir des densités de probabilité conjuguées.

*Cas de l'espace généralisé positions-vitesses.*

Soit maintenant une fonction certaine de  $X, U, t$  :  $\psi(X, U, t)$ . La moyenne de Lagrange dans l'espace généralisé positions-vitesses est définie par l'intégrale :

$$\widetilde{\psi} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_2, u_2; x_1, u_1) \psi(x_2, u_2, t_2) dx_2 du_2$$

et  $\widetilde{\psi}$  est une fonction de  $x_1, u_1, t_1$  et  $t_2$ .

La moyenne de  $\widetilde{\psi}$  pour toutes les vitesses initiales  $u_1$  est la moyenne de Lagrange proprement dite :

$$\widehat{\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\psi}(u_1; x_1) du_1 = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_2, u_2, u_1; x_1) \psi du_1 du_2 dx_2$$

L'intérêt des moyennes de Lagrange réside dans le fait qu'elles permettent littéralement de suivre, en fonction de leur diffusion, les éléments du fluide.

*Moyennes d'Euler attachées au corpuscule aléatoire.*

Les moyennes d'Euler sont définies à partir des densités de champ. Elles ont déjà été largement utilisées dans la formation des équations aux valeurs probables d'un fluide turbulent sous forme de *moyennes liées en un point de l'espace*.

43. Développement des moyennes de Lagrange en fonction des moyennes d'Euler.

Les moyennes de Lagrange et les moyennes d'Euler sont du même ordre ; à cause de cela, leurs relations ne peuvent s'écrire que sous forme d'un développement.

La moyenne de Lagrange d'une fonction  $\psi$  de  $X, U, t$  est :

$$\overline{\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_2, u_2, t) \delta(x_2, u_2; x_1) dx_2 du_2$$

Si  $X|_t$  est analytique et si  $\psi$  est développable en série de Taylor :

$$\psi(X_2, U_2, t_2) = \psi(X_1, U_1, t_1) + (t_2 - t_1) \left. \frac{d\psi(X, U, t)}{dt} \right|_{t=t_1} + \frac{1}{2!} (t_2 - t_1)^2 \left. \frac{d^2 \psi(X, U, t)}{dt^2} \right|_{t=t_1} + \dots$$

Cela peut aussi s'écrire :

$$\psi(X_2, U_2, t_2) = e^{(t_2 - t_1) \frac{d}{dt}} \psi(X, U, t) \Big|_{t=t_1}$$

car l'opérateur  $e^{(t_2 - t_1) \frac{d}{dt}}$  se développe selon la série de Taylor :

$$e^{(t_2 - t_1) \frac{d}{dt}} = 1 + (t_2 - t_1) \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} (t_2 - t_1)^2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots$$

ce qui, appliqué à  $\psi(X, U, t)$  et pris à l'instant  $t = t_1$  donne bien  $\psi(X_2, U_2, t_2)$ .

Si l'on prend la moyenne du développement précédent pour un point initial donné  $x_1$  à l'instant  $t_1$ , on obtient :

$$\overline{\psi(X_2, U_2, t_2)} = \overline{\psi(X_1, U_1, t_1)} + (t_2 - t_1) \left. \overline{\frac{d\psi(X, U, t)}{dt}} \right|_{t=t_1} + \frac{(t_2 - t_1)^2}{2!} \left. \overline{\frac{d^2 \psi(X, U, t)}{dt^2}} \right|_{t=t_1} + \dots$$

Les  $\overline{\quad}$  sont les moyennes liées étant donné le point  $x_1$  ; comme les termes qui sont sous les barres sont des fonctions aléatoires prises au temps  $t_1$ , ce sont des moyennes d'Euler. Comme  $\psi(X_2, U_2, t_2)$  est une fonction aléatoire prise au temps  $t_2$ , on obtient une moyenne de Lagrange car il y a passage de l'instant  $t_1$  à l'instant  $t_2$ .<sup>1</sup>

Alors, de manière générale :

$$\overline{\frac{d^n \psi(X, U, t)}{dt^n}} \Big|_{t=t_1} = \overline{\frac{\partial^n \psi(X_2, U_2, t_2)}{dt_2^n}} \Big|_{t_2=t_1}$$

et, en particulier :

$$\overline{\frac{d\psi(X, U, t)}{dt}} \Big|_{t=t_1} = \overline{\frac{\partial \psi(X_2, U_2, t_2)}{\partial t_2}} \Big|_{t_2=t_1}$$

<sup>1</sup> Note : ce développement de la moyenne de Lagrange en fonction de la moyenne d'Euler n'est valable que dans le cas

d'une moyenne de Lagrange de la forme  $\overline{\psi(X_2, U_2, t_2)}$  où seul  $x_1$  est donné. Il n'est pas correct dans le cas d'une moyenne de Lagrange de la forme  $\overline{\psi(X_2, U_2, t_2)}$  où  $x_1$  et  $u_1$  sont donnés.

Application à l'interprétation physique du second membre de l'équation de transfert.

Elle s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \overline{\psi}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \overline{\psi U_i}) = \rho \overline{\dot{\psi}}$$

Si  $t = t_1$ , le second membre vaudra  $\rho \left. \frac{\partial \overline{\psi(X_2, U_2, t_2)}}{\partial t_2} \right|_{t_2=t_1}$

Si, à l'instant  $t_1$ , une particule ponctuelle est concentrée au point  $X_1$ , à l'instant infiniment voisin  $t_2$  elle aura diffusé autour du point moyen  $\overline{X_2}$ , parce que les microparticules qui la composent n'ont pas la même vitesse. De plus, les éléments qui composent une microparticule n'ont pas la même accélération : les points représentatifs ont diffusé dans l'espace des positions et des vitesses.

Les causes de la variation  $\left. \frac{\partial \overline{\psi(X_2, U_2, t_2)}}{\partial t_2} \right|_{t_2=t_1}$  ne peuvent provenir que d'agents extérieurs, car nous avons considéré toute la microparticule située en  $x_1$  à l'instant  $t_1$  et celle-ci uniquement.

44. Connexion cinématique et connexion géométrique.

Une fonction aléatoire de  $t$  et d'un point de l'espace constitue un champ aléatoire (voir l'exemple de l'onde) dont on peut définir la connexion cinématique.

Cette connexion cinématique est le moment rectangle, moyenne doublement liée :

$$\overline{\overline{\Phi \Phi_1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi, \varphi_1; x, t, x_1, t_1) \varphi \varphi_1 d\varphi d\varphi_1$$

La connexion cinématique est donnée expérimentalement par la méthode d'observation « en réseau » et qui consiste à placer des instruments enregistreurs et statistiques en des points fixes.

Soit, par exemple, des enregistrements obtenus en deux points  $O$  et  $O_1$ . Le moment rectangle  $\overline{\overline{\Phi \Phi_1}}$  s'estime par la somme des produits des valeurs successives de  $\Phi$  en  $O$  autour de l'instant  $t$ , par les valeurs successives de  $\Phi$  en  $O_1$  autour de l'instant  $t_1$  : c'est une « corrélation différée ».

Lorsque  $x_1 \rightarrow x$  et  $t_1 \rightarrow t$ ,  $(\varphi, \varphi_1; x, t, x_1, t_1) \rightarrow (\varphi; x, t)$  ; cela exprime le fait que, si l'on considère un seul instrument, celui placé en  $O$  par exemple, les moyennes  $\overline{\overline{\Phi}}$  ou  $\overline{\Phi^2}$  sont celles des valeurs de  $\Phi$ , ou de  $\Phi^2$  respectivement, autour de l'instant  $t$ . Elles sont alors identiques aux moyennes liées  $\overline{\Phi}$  et  $\overline{\Phi^2}$  (moyennes de  $\Phi$  et de  $\Phi^2$  étant donné le point  $x$ ).

La connexion cinématique comprend deux cas particuliers, soit que les points  $O$  et  $O_1$  sont confondus, ce qui est le cas de la connexion locale (ou connexion dans le temps), soit que les instants  $t$  et  $t_1$  sont confondus et la connexion cinématique devient alors la connexion géométrique dont le tenseur de Von Karman est un cas particulier.

45. Connexion stationnaire ; connexion homogène ; connexion isotrope.

Le tenseur de connexion cinématique est stationnaire s'il n'est fonction des instants  $t$  et  $t_1$  que par leur différence  $(t_1 - t)$ .



En ce cas, la *connexion géométrique* (obtenue pour  $t = t_1$ ) est *permanente* et la *connexion locale, stationnaire*.

La *connexion cinématique* est *homogène* lorsque son tenseur de connexion n'est fonction des points  $O$  et  $O_1$  que par les différences de leurs coordonnées :  $x_{1i} - x_i$ . La même propriété appartient ipso facto à la *connexion géométrique*. Quant à la connexion locale (que l'on obtient pour  $O = O_1$ ), elle est *uniforme* dans tout le fluide.

La *connexion cinématique* est dite *isotrope* quand son tenseur admet la symétrie de révolution autour de  $OO_1$  et reste invariant quand la distance  $OO_1 = r$  reste constante. Lorsqu'un tenseur de connexion géométrique est homogène et isotrope (tenseur de Von Karman), nous savons qu'il peut s'exprimer sous la forme :

$$\overline{U_i U_j} = a_{ij} = \frac{f(r) - g(r)}{r^2} (x_{1i} - x_i)(x_{1j} - x_j) + g(r) \delta_{ij},$$

$f(r)$  est le coefficient de corrélation entre les composantes des vecteurs  $U$  et  $U_1$  portées par la droite  $OO_1$  et  $g(r)$  le coefficient de corrélation entre les composantes normales à  $OO_1$ .

#### 46. Connexion physique du corpuscule.

La connexion cinématique est la connexion décrite du point de vue du *champ* : elle correspond au point de vue d'*Euler* en hydrodynamique. Mais, dans les applications, c'est la *connexion physique* qui intervient ; elle correspond au point de vue de *Lagrange*.

La connexion physique est la moyenne liée :

$$\widehat{\Phi \Phi_1} = \iint_{-\infty}^{+\infty} (\varphi, \varphi_1; x, t, t_1) \varphi \varphi_1 d\varphi d\varphi_1$$

$\Phi$  est la grandeur attachée au corpuscule  $X|_t$  à l'instant  $t$  au point  $O$  ( $x$  représente les coordonnées de  $O$ ),  $\Phi_1$  est la grandeur attachée au corpuscule  $X|_{t_1}$  à l'instant  $t_1$  au point  $O_1$ .

La connexion physique se distingue de la connexion cinématique par le fait que  $\Phi_1$  n'est plus une valeur attachée à un point fixe mais en un point *aléatoire* dont la position (incertaine) se déduit de  $O$ ,  $t$  et  $t_1$ . On peut dire qu'elle est la connexion entre les valeurs successives de  $\Phi$ , attachées à un même élément, suivi sur sa trajectoire.

L'importance de la connexion physique vient de ce qu'elle régit les *phénomènes de diffusion*. La diffusion consiste en effet, en ce qu'un petit nuage de fumée, émis au temps  $t$  au voisinage de  $O$ , se trouve au temps  $t_1$  dispersé à l'intérieur d'un volume fini (point  $O_1$  aléatoire). La répartition des grains de fumée à l'intérieur de ce volume dépend essentiellement de la connexion entre les vitesses successives prises par les grains de fumée.

Les phénomènes de *viscosité* et de *conductibilité*, qui sont des transferts de quantité de mouvement et d'énergie, sont également commandés par la connexion physique.

Le tenseur de connexion physique  $\overline{\mathcal{T}}$  se relie de façon très simple au tenseur de connexion cinématique  $\Theta$ , par l'intermédiaire de la densité de probabilité de passage.

En effet, comme :

$$(\varphi, \varphi_1; x) = (\varphi, \varphi_1; x, x_1) (x_1; x) dx_1,$$

alors :

$$\overline{\mathcal{T}} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1; x) \Theta dx_1$$

Cette formule permet de séparer en deux parties les propriétés du corpuscule aléatoire :

1) les *propriétés du champ* dans lequel il est plongé qui sont représentées par le tenseur de connexion cinématique  $\Theta$ .

2) les *propriétés mécaniques* du corpuscule, qu'exprime la probabilité de passage  $(x_1; x)$ .

L'égalité :

$$\overline{\mathcal{T}} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1; x) \Theta dx_1$$

montre que la connaissance de  $\Theta$  n'est pas suffisante pour tout connaître de la mécanique du fluide : il est encore nécessaire de connaître la densité de probabilité de passage  $(x_1; x)$  pour obtenir le tenseur de connexion physique  $\overline{\mathcal{T}}$ .

Pour que la connexion physique soit stationnaire ( $\overline{\mathcal{T}}$  fonction de  $(t_1 - t)$ ) il ne suffit pas que la connexion cinématique le soit ; il faut de plus que la densité de probabilité de passage  $(x_1; x)$  ne dépende que de  $(t_1 - t)$ .

#### 47. Connexion corpusculaire.

La connexion physique concernait les éléments du corpuscule qui, à un instant  $t$ , se trouvaient en un point déterminé  $O$ . La *connexion corpusculaire* est la moyenne étendue à tous les éléments du corpuscule sans condition initiale. Elle se calcule à l'aide de la densité  $(\varphi, \varphi_1)$  ; par exemple :

$$\overline{\varphi \varphi_1} = \iint_{-\infty}^{+\infty} (\varphi, \varphi_1) \varphi \varphi_1 d\varphi d\varphi_1$$

La relation :

$$(\varphi, \varphi_1) = (\varphi, \varphi_1; x) (x) dx = (\varphi, \varphi_1; x, x_1) (x_1, x) dx dx_1$$

montre que le tenseur de connexion corpusculaire  $\overline{\mathcal{T}}_c$  possède les relations suivantes avec le tenseur de connexion physique  $\overline{\mathcal{T}}$  et le tenseur de connexion cinématique  $\Theta$  :

$$\overline{\mathcal{T}}_c = \int_{-\infty}^{+\infty} (x) \overline{\mathcal{T}} dx$$

$$\overline{\mathcal{T}}_c = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x, x_1) \Theta dx dx_1$$

#### 48. Forme générale du problème de la diffusion.

Ce problème consiste en l'étude de la fonction aléatoire :

$$X_2 |_{x_1, t_1, t_2}$$

ce qui revient surtout au calcul de ses moments principaux, moyennes de Lagrange :

$$\widehat{X_2}, \widehat{X_2^2}, \widehat{X_3}, \widehat{X_3^2}$$

Les moyennes de Lagrange donnent une solution du problème sous forme d'un développement de Taylor faisant intervenir les moments liés, pour un point donné, de toutes les dérivées en moyenne quadratique de  $X$ . Cette solution

est évidemment théorique et n'offre d'intérêt pratique que pour des intervalles de temps très petits. Il faut alors poser le problème en termes finis.

Les moments  $\widehat{X}_2$  et  $\widehat{X}_2^2$  se calculent au moyen de la densité de probabilité de passage  $(x_2; x_1)$ , par les formules :

$$\widehat{X}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(x_2; x_1, t_1, t_2) dx_2$$

$$\widehat{X}_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^2(x_2; x_1, t_1, t_2) dx_2$$

Lorsque la densité de probabilité de passage ne dépend que des différences  $(t_2 - t_1)$  et  $(x_2 - x_1)$ , ces moments sont indépendants du point initial  $x_1$  et ne sont fonctions que de l'intervalle de temps  $(t_2 - t_1)$ . La diffusion est alors *homogène* et *stationnaire*.

Pour obtenir le moment rectangle  $\widehat{X}_2 \widehat{X}_3$ , il est nécessaire de faire intervenir une densité de probabilité en trois points :

$$\widehat{X}_2 \widehat{X}_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 x_3(x_2, x_3; x_1, t_1, t_2, t_3) dx_2 dx_3$$

Or, dans les fluides, l'expérience atteint non la position du corpuscule mais sa vitesse, celle-ci est la dérivée en moyenne quadratique de la position. Le problème de la diffusion se pose ainsi comme un *problème d'intégration aléatoire*, la fonction  $X_2$  s'exprimant par :

$$X_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} U|_s ds$$

où  $s$  représente l'instant auquel on considère  $U$ .

La moyenne de Lagrange de  $X_2$  est :

$$\widehat{X}_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} ds \int_{-\infty}^{+\infty} u_s(u_s; x_1, t_1, s) du$$

Son calcul nécessite la connaissance d'une densité de probabilité aux instants  $t_1$  et  $s$ .

*Cas particulier* : Un cas particulier intéressant est celui où cette densité ne dépend que de la différence  $(s - t_1)$  et ne contient pas la coordonnée initiale  $x_1$ .

Alors le chemin  $\widehat{X}_2 - x_1$  parcouru par le point moyen ne dépend pas du point de départ ni de l'instant initial, mais seulement de l'intervalle de temps  $(t_2 - t_1)$ . Lorsque  $(u; x_1)$  ne dépend pas de  $x_1$ , il en est de même, en particulier, pour  $(u_1; x_1)$ , densité de probabilité des vitesses en un point donné ; cette densité est alors *uniforme* dans tout le fluide. De plus, comme  $(u_1; x_1)$  ne contient pas  $t_1$ , la distribution des vitesses est *permanente*. Par contre, il n'y a aucune restriction sur la densité de probabilité  $(x_1)$ . Ainsi nous avons à faire à un fluide avec un module uniforme et constant de la vitesse d'agitation, mais pouvant avoir une densité différenciée, comme celle qui résulte d'un champ de forces. Une atmosphère *isotherme* en équilibre vertical sous l'action de la gravité, donne un modèle d'un tel fluide.

De même que pour  $\widehat{X}_2$ , le moment rectangle  $\widehat{X}_2 \widehat{X}_3$  se calcule de la façon suivante :

$$X_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} U|_s ds$$

$$X_3 = x_1 + \int_{t_1}^{t_3} U|_t dt$$

$$\widehat{(X_2 - x_1)(X_3 - x_1)} = \widehat{X}_2 \widehat{X}_3 - x_1 (\widehat{X}_2 + \widehat{X}_3) + x_1^2 =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} ds \int_{t_1}^{t_3} dt \int_{-\infty}^{+\infty} u_s u_t(u_s, u_t; x_1, t_1, s, t) du_s du_t$$

#### 49. Diffusion stationnaire et homogène

Pour qu'une densité de probabilité en deux points soit suffisante pour le calcul du moment rectangle, il faut que la densité de probabilité  $(u_s, u_t; x_1)$  ne contienne pas  $x_1$ . Il en résulte que :  $(u_s; x_1) = (u_s, u_t; x_1) du_t$  ne contient pas  $x_1$  non plus. Comme tout à l'heure, la densité de probabilité de la vitesse en un point :  $(u_1; x_1)$  est uniforme dans le fluide. Si la densité  $(u_s, u_t; x_1)$  ne dépend du temps que par les différences  $(s - t_1)$  et  $(t - t_1)$ , le moment rectangle ne dépendra alors que des différences  $(t_2 - t_1)$  et  $(t_3 - t_1)$ . Cela entraîne que la densité  $(u_1; x_1)$  qui ne dépend pas de  $x_1$ , ne dépend pas non plus de  $t_1$ .

Dans ce cas particulier, la diffusion est *stationnaire* et *homogène*. Il faut remarquer qu'alors la densité de probabilité  $(x_1)$  reste absolument quelconque.

En général, le problème de la diffusion est ramené au problème de la connexion physique de la vitesse, c'est-à-dire à l'étude des propriétés du moment :  $\widehat{U}_s \widehat{U}_t$ .

Or, quand la connexion physique ne dépend pas du point initial  $x_s$ , elle est identique à la connexion corpusculaire, car :

$$\overline{U_s U_t} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_s) \widehat{U}_s \widehat{U}_t dx_s = \widehat{U}_s \widehat{U}_t$$

puisque la quantité  $\widehat{U}_s \widehat{U}_t$ , indépendante de  $x_s$ , peut être sortie du signe d'intégration.

La connexion cinématique revêt aussi une forme particulière. Soit, en effet, la relation :

$$\overline{U_s U_t} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_t; x_s) \overline{U_s U_t} dx_t \quad s \leq t$$

La diffusion étant stationnaire et homogène, le premier membre est fonction de  $(t - s)$ ;  $(x_t; x_s)$  est fonction de  $(t - s)$  et de  $(x_s - x_t)$ . Il en est donc de même, par conséquent, de  $\overline{U_s U_t}$  : la connexion cinématique est, elle aussi, stationnaire et homogène.

Soient  $S^2 = \overline{U'^2} = \overline{U^2}$ , le carré de l'écart type des vitesses d'agitation et  $r(t - s)$ , la fonction de corrélation physique entre les vitesses  $U|_t$  et  $U|_s$  d'une microparticule aux instants  $t$  et  $s$ .

Alors :

$$\overline{X'^2} = S^2 \int_0^t \int_0^t r(t-s) ds dt = 2 S^2 \int_0^t (t-s) r(s) ds$$

## Chapitre IX — Systèmes de corpuscules aléatoires

### 50. Liaisons des systèmes aléatoires.

Le corpuscule aléatoire généralise la notion du point matériel de la mécanique classique, mais cela n'est évidemment pas suffisant pour répondre aux exigences de tous les problèmes : il faut considérer le cas des systèmes de corpuscules aléatoires.

Le rôle des liaisons de la mécanique classique est joué en mécanique aléatoire par les corrélations qui représentent la mesure de la dépendance de probabilité : une liaison entre deux corpuscules aléatoires apparaît dès que la présence de l'un modifie la probabilité de la position ou de la vitesse de l'autre. Il existe donc en mécanique aléatoire des liaisons de probabilité dont un cas limite est la liaison de la mécanique classique (la corrélation vaut 1 au contact), l'autre cas limite étant représenté par l'indépendance en probabilité (hasard pur, corrélation nulle) du gaz parfait.

En mécanique aléatoire, l'inconnue du problème est la densité de probabilité conjuguée des positions et des vitesses :

$R(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n; t)$  où  $x_i$  et  $u_i$  représentent respectivement les vecteurs aléatoires de composantes  $x_{ij}$  et  $u_{ij}$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

Il peut arriver que le système différentiel décrivant le mouvement puisse se décomposer en groupes d'équations intégrables séparément.

En mécanique classique, un tel fait signifie que le système de corpuscules peut se décomposer en sous-systèmes mécaniquement indépendants. En mécanique aléatoire, au contraire, ce n'est pas toujours le cas car les conditions initiales peuvent être corrélées.

Le concept statistique introduit alors des liaisons là où, en mécanique classique, il y avait indépendance totale ; en effet, pour déterminer  $R$  il faut par exemple se donner la densité de probabilité conjuguée des positions et des vitesses initiales des corpuscules. En mécanique classique, ces éléments constituent  $6n$  constantes numériques (indépendantes entre elles puisqu'elles sont certaines) ; en mécanique aléatoire, ce sont  $6n$  nombres aléatoires, qui peuvent être corrélés.

### 51. Exemples de systèmes de corpuscules aléatoires.

a) Cas simple de deux corpuscules aléatoires libres à une dimension.

Le système différentiel de leur mouvement est :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = U_1 \\ \dot{U}_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{X}_2 = U_2 \\ \dot{U}_2 = 0 \end{cases}$$

dont la solution formelle est :

$$\begin{cases} X_1 = A_1 t + B_1 \\ U_1 = A_1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_2 = A_2 t + B_2 \\ U_2 = A_2 \end{cases}$$

$A_1, A_2, B_1$  et  $B_2$  sont quatre constantes aléatoires ayant pour densité de probabilité conjuguée :

$$R(a_1, a_2, b_1, b_2).$$

La densité de probabilité conjuguée des deux corpuscules est :

$$R(a_1, a_2, x_1 - u_1 t, x_2 - u_2 t)$$

Les moments  $\overline{A_1' A_2'}$  et  $\overline{B_1' B_2'}$ , où  $A_i' = A_i - \overline{A_i}$  et  $B_i' = B_i - \overline{B_i}$  ne sont pas forcément nuls.

b) Cas de 2 corpuscules aléatoires libres à une dimension où les liaisons sont holonomes aléatoires :  $X_2 - X_1$  est une constante aléatoire  $E$ .

Les équations du mouvement deviennent :

$$\begin{cases} X_1 = A_1 t + B_1 \\ X_2 = A_1 t + B_1 + E \end{cases}$$

Le problème a pour solution une densité de probabilité à trois variables :

$$R(x_1, u_1, E)$$

Le système primitif de quatre équations différentielles est remplacé par deux équations différentielles et une équation en termes finis :

$$\dot{X}_1 = U_1, \quad \dot{U}_1 = 0, \quad X_2 = X_1 + E$$

L'équation  $X_2 = X_1 + E$  a une influence sur la corrélation entre les intégrales premières du système différentiel.

### 52. Systèmes d'oscillateurs aléatoires.

Soit un système de  $n$  corpuscules  $X_i$  de densité de probabilité de présence telle que :

Chaque  $X_i$  est un oscillateur aléatoire stationnaire. Tous les  $X_i$  ont même pulsation certaine  $\omega$  et même loi de probabilité. Il existe entre eux des corrélations.

Soit  $X$  l'oscillateur aléatoire :  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  (centre de gravité du système d'oscillateurs).

Soient :

$$\sigma : \text{écart type commun aux } X_i : \overline{X_i^2} = \sigma^2$$

$$\Sigma : \text{écart type de } X : \overline{X^2} = \Sigma^2$$

$$s : \text{écart type commun aux } \dot{X}_i : \overline{\dot{X}_i^2} = s^2 = \omega^2 \sigma^2$$

$$S : \text{écart type de } \dot{X} : \overline{\dot{X}^2} = S^2 = \omega^2 \Sigma^2$$

L'incertitude sur un oscillateur élémentaire est le produit :

$$s \sigma = \frac{s^2}{\omega}$$

qui mesure la dispersion du corpuscule dans l'espace généralisé positions-vitesses.

La dispersion de l'oscillateur  $X$  est :

$$\Sigma^2 = \overline{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \overline{X_i X_j} = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n r_{ij}$$

où  $r_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \overline{X_i X_j}$  désigne le coefficient de corrélation entre deux oscillateurs élémentaires ( $r_{ii} = 1$ ).

### 53. Cas particuliers.

a) Si tous les  $X_i$  sont indépendants :  $r_{ij} = \delta_{ij}$ , cela entraîne  $\sum^2 = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n r_{ij} = \frac{\sigma^2}{n}$ .

b) Si tous les  $r_{ij}$  sont positifs :

$$\sum^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n r_{ij} > \frac{\sigma^2}{n}.$$

c) Si tous les  $r_{ij}$  sont négatifs :

$$\sum^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n r_{ij} < \frac{\sigma^2}{n}.$$

d) Si tous les  $X_i$  sont égaux :  $r_{ij} = 1$  :

$$\sum^2 = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n r_{ij} = \sigma^2$$

e) Schéma en grappes de Borel :

Les  $n$  oscillateurs sont groupés en  $k$  grappes de  $p$  oscillateurs rigidement liés ( $kp = n$ ). Dans une même grappe  $r_{ij} = 1$ . Deux grappes différentes sont indépendantes : le coefficient de corrélation entre deux oscillateurs appartenant à deux grappes différentes est nul.

Parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  nombres  $r_{ij}$  où  $i \neq j$ ,  $k \cdot \frac{p(p-1)}{2}$  nombres sont égaux à 1, tous les autres étant nuls.

Donc :

$$\overline{X^2} = \sum^2 = \frac{\sigma^2}{n^2} \left[ \sum_{i=1}^n r_{ii} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n r_{ij} \right] = \frac{\sigma^2}{n^2} \left[ n + 2 \cdot k \cdot \frac{p(p-1)}{2} \right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n^2} (n + k p^2 - k p) = \frac{\sigma^2}{n^2} k p^2 = p \frac{\sigma^2}{n}$$

De même :  $\overline{X^2} = S^2 = p \frac{s^2}{n}$

### Conclusions

La mécanique du corpuscule aléatoire  $R$  est une mécanique statistique très générale dont il existe autant de développements particuliers qu'il y a de fonctions  $R$ ; aux différents types de connexions de champ de probabilité  $y$  associés correspondent autant de stades de l'évolution d'une turbulence.

A chaque  $R$  correspond un type de prévisibilité qui permet de calculer l'évolution des grandeurs macroscopiques caractérisant la turbulence et la diffusion turbulente<sup>1</sup>.

Parmi toutes les mécaniques aléatoires particulières, il est possible de construire une *mécanique newtonienne* de la diffusion turbulente, correspondant à la turbulence libre. La fonction  $R$  est, dans ce cas, construite à partir des intégrales premières du système lagrangien dont elle dérive.

Des mécaniques non newtoniennes de la diffusion peuvent être élaborées avec des fonctions  $R$  constituées par d'autres fonctions que des intégrales premières du système<sup>2</sup>.

La mécanique du corpuscule aléatoire telle qu'elle a été développée dans le présent article apparaît comme étant une mécanique générale de la diffusion turbulente.

Ce travail a pu être effectué grâce à l'appui des Commissions fédérales de l'hygiène de l'air et de météorologie, ainsi que du Fonds pour l'encouragement des recherches scientifiques.

<sup>1</sup> Voir thèse P. Ravussin.

<sup>2</sup> Voir thèse F. Baatard.

Adresses des auteurs :

François Baatard  
12, rue Etraz, 1000 Lausanne  
Simone Magnin  
Ch. du Centenaire, 1008 Prilly

## Bibliographie

**Toute la profession de l'informatique.** Editions Tests et Entreprise moderne d'édition, Paris, 1971. — Trois volumes de 16 × 24 cm, de 60 pages chacun. Prix : broché 19 fr. le volume.

Cet ouvrage a été écrit par une réunion de spécialistes de l'informatique et d'utilisateurs d'ordinateurs, à l'initiative et sous la direction de la Société Orgamatic, avec la collaboration du Centre d'information sur les carrières liées à l'informatique. Il s'adresse surtout aux profanes et fournit une documentation complète, claire et pratique sur toutes les possibilités d'emplois qu'offre l'utilisation des ordinateurs. Chacune de ces possibilités est présentée sous la forme d'une fiche signalétique qui mentionne les aptitudes nécessaires des candidats, leur niveau scolaire souhaitable, les moyens de formation et la position hiérarchique pouvant être atteinte.

Le premier volume concerne la saisie de l'information qui se fait avant le travail sur l'ordinateur proprement dit et l'environnement de l'ordinateur qui comprend de nombreuses tâches de préparation, de contrôle, de planification et d'acheminement des informations.

Le deuxième volume traite de tout ce qui touche à la conception du travail, à l'analyse et à la recherche. Dans le troisième sont exposées les fonctions de programmation et d'exploitation qui sont chargées de réaliser les méthodes

de traitement des informations ayant été choisies et mises au point.

Chaque volume comprend un lexique donnant l'explication de certains termes qui risqueraient d'être difficilement compris.

**Le savoir-diriger**, par Pierre Baruzy. Collection CADRECO, Entreprise moderne d'édition, Paris, 1972. — Un volume 13,5 × 18,5 cm, 188 pages, franco 22 F.

Voici un ouvrage écrit par un dirigeant, à l'usage des autres dirigeants, pour les aider dans leur tâche difficile de commandement et d'organisation.

Industriel renommé, P.d.g. de firmes internationales, Président du Conseil National de l'Organisation Française, Chancelier du Conseil International de l'Organisation Scientifique, le comte Pierre Baruzy communique aux dirigeants et futurs dirigeants ce qu'il a appris et démontré au cours de sa vie professionnelle.

Sous une forme volontairement condensée, ce manuel pratique donne des règles de conduite précises, concrètes, utilisables immédiatement et quotidiennement. « A chaque page, on trouve des sources inépuisables d'interrogations, de prolongement, d'approfondissement à la réflexion, et des lignes directrices nettes » (Pierre de Calan, dans la préface).

*Au sommaire :*

Définitions — Responsabilités du dirigeant — Le dirigeant en action — Prévoir — Organiser — Contrôler — Méthodes de direction et de gestion — etc.