

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 98 (1972)  
**Heft:** 15

**Artikel:** Discussion sur la stabilité des poteaux, des pieux et des coques  
**Autor:** Bourdon, Claude  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-71554>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Discussion sur la stabilité des poteaux, des pieux et des coques

par CLAUDE BOURDON, ingénieur

### Introduction

L'article rédigé par M. Claude Bourdon, ingénieur à Paris, pour le Bulletin et que nous avons le plaisir de présenter à nos lecteurs, est une étude originale sur la stabilité des poteaux, des pieux et des coques, développée à partir de la théorie classique du flambement des pièces prismatiques.

Le problème du flambement, dans le domaine élastique, des poteaux encastres de manière quelconque y est abordé à partir de trois paramètres, dont deux caractérisent les raideurs de rotation des appuis et le troisième la raideur de déplacement transversal relatif d'un appui par rapport à l'autre. L'introduction de valeurs adimensionnelles conduit à une solution très générale de la charge critique, permettant de résoudre les problèmes de flambement et de bifurcation d'équilibre, dans les portiques multiples étagés et les treillis.

Le flambement des pièces prismatiques comprimées axialement et maintenues latéralement par un milieu élastique est ensuite examiné. Une analyse physique permet de déduire, des résultats ainsi obtenus, les conditions de cloquage des coques de formes simples (cylindre, cône, sphère).

Dans une dernière partie, il est montré comment passer des modèles élastiques idéaux au cas des matériaux réels, tels que l'acier et le béton armé, grâce à la notion de « module de déformation équivalent ».

L'auteur incite les projecteurs à la prudence dans l'emploi des formules courantes, pour le calcul des ouvrages souples sujets aux dangers de l'instabilité, du déversement ou du cloquage. Les éléments d'ossature comprimés, dont l'élançement et la finesse croissent de jour en jour, présentent des risques de plus en plus grands, et les coefficients de sécurité réels sont souvent très inférieurs (même en théorie élastique) aux valeurs calculées par les théories actuelles.

Cette étude, qui témoigne de la part de son auteur d'un esprit critique et de synthèse, éveillera de l'intérêt auprès de tous ceux que préoccupent les problèmes de stabilité élastique.

Prof. J.-P. STUCKY.

Depuis que la mécanique appliquée est au programme des écoles d'ingénieurs, c'est-à-dire dès leur origine, la charge critique d'Euler a laissé dans les souvenirs de générations d'étudiants l'impression d'une notion mystérieuse dont l'attrait ne le cède en rien à la fascination exercée dans d'autres domaines par « l'entropie » ou les champs tournants !

Les « ingénieurs constructeurs » ont cependant délaissé peu à peu leur premier modèle pour exercer leur talent sur des théories plus modernes où la notion de « plasticité » et le recours à des outils mathématiques plus élaborés (matrices) leur ont permis de décrire les aspects nouveaux des phénomènes observés.

La vie d'un mathématicien multicéphale, tel Bourbaki, ne suffirait pas à ordonner la multiplicité des problèmes que se posent les constructeurs et à les traduire dans l'un des langages symboliques que l'informatique a mis à leur disposition.

Dès lors, il ne faut pas s'étonner si « l'honnête homme » de ce siècle a l'impression de « perdre son latin » dans le dédale des modes d'expression disponibles.

Sans vouloir reprendre la « querelle du latin », j'avancerai qu'en ce qui me concerne il me paraît utile de laisser

à chacun le choix du mode d'expression le mieux adapté et j'ai tendance à penser que la schématisation la plus simple, donc accessible au plus grand nombre, est finalement la meilleure.

La difficulté d'aujourd'hui est de rester compréhensible et l'ingénieur n'échappe pas à la règle. « Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement », pour reprendre un adage bien connu !

### Pièces rectilignes axialement chargées. Théorie d'Euler

Je reviens à mon propos en citant le titre du célèbre mémoire d'Euler :

« Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes » (Lausanne 1744), et en rappelant brièvement la propriété fondamentale qu'il a énoncée :

METHODUS  
 INVENIENDI  
 LINEAS CURVAS  
 Maximi Minimive proprietate gaudentes,  
 SIVE  
 SOLUTIO  
 PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI  
 LATISSIMO SENSU ACCEPTI  
 AUCTORE  
 LEONHARDO EULERO,  
 Professore Regio, & Academia Imperialis Scientiarum  
 PETROPOLITANÆ Socio.



LAUSANNÆ & GENEVÆ,  
 Apud MARCUM-MICHAËLEM BOUSQUET & Socios.  
 MDCCLXIV.

Considérons une pièce rectiligne de section constante articulée aux deux bouts, axialement chargée. Elle devient instable (elle flambe), lorsque la charge appliquée dépasse une valeur critique

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (1)$$

où  $E$  est le module d'Young de la matière constituant la pièce ;

$I$  le moment d'inertie (ou moment quadratique) de la section droite par rapport à un axe perpendiculaire au plan de symétrie (plan de flexion) ;

$l$  longueur de la pièce entre articulations.

Euler a indiqué également les valeurs des charges critiques pour diverses liaisons d'extrémité :

- pièce encastrée à un bout et libre à l'autre ;
- pièce encastrée aux deux bouts ;
- pièce encastrée à un bout et articulée à l'autre.

Les premières expériences sur le flambement ont montré que les inexactitudes de définition géométrique de la pièce essayée, les « défauts » de la matière, produisaient une réduction importante de la charge critique.

Des corrections furent apportées à la formule d'Euler pour permettre son application dans l'art de construire (et tous les ingénieurs se souviennent de la droite de Tetmayer, du coefficient de Rankine).

On ne se réfère directement au travail initial d'Euler que pour l'enseignement ou pour schématiser l'allure du phénomène d'instabilité élastique et l'adjectif « eulérien » a même pris pour certains ingénieurs un sens un peu péjoratif !

Cette attitude d'esprit n'est pourtant pas tout à fait « cartésienne », ni même méritée.

Il serait contradictoire d'accepter les hypothèses de la résistance des matériaux (et notamment celle de la non déformabilité des sections des pièces prismatiques longues avec Bernoulli et celle de la proportionnalité des contraintes aux déformations (avec Young 1773-1829 et Navier 1785-1836)) et de rejeter en bloc ces mêmes hypothèses lorsqu'il s'agit de pièces axialement chargées.

Cherchant à réduire le fossé qui s'est peu à peu creusé entre la théorie d'Euler et l'expérience, j'ai repris le problème du flambement d'une pièce axialement chargée, avec des conditions d'encastrement quelconques (fig. 1).

Ce problème revient, si l'on se limite aux petites déformations transversales (seules intéressantes en pratique pour l'ingénieur) à intégrer l'équation différentielle du second ordre de la « ligne élastique » en tenant compte de ces conditions d'extrémité.

Soit un poteau de section constante, constitué par une matière homogène, suivant la loi de Hooke.

Soit  $M$  le moment fléchissant dans une section quelconque, à la distance  $x$  de l'extrémité  $A$ .

Dans l'équilibre déformé on a la relation

$$M = F(e-y) - R(l-x) - \mu_B \quad (2)$$

où  $\mu_B = k_2 \cdot \theta_B$  moment en  $B$

$l$  = longueur du poteau ;

$e$  = déplacement transversal en tête ;

$R$  = réaction horizontale en tête ;

$\theta_A, \theta_B$  = rotations des sections extrêmes.

La déformée satisfait à l'équation différentielle du second ordre :

$$EIy'' + Fy = Fe - R(l-x) - \mu_B \quad (3)$$

dont la solution générale est

$$y = A \cos px + B \sin px + e - \frac{R}{F}(l-x) - \frac{\mu_B}{F} \quad (4)$$

$$\text{avec } p = \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad (5)$$

Appelons  $k_1, k_2$  les raideurs de rotation des appuis et  $k_3$  la raideur de déplacement transversal relatif de  $B$  par rapport à  $A$  et posons :

$$\mu_A = k_1 \theta_A ; \quad \mu_B = k_2 \theta_B ; \quad R = k_3 e \quad (6)$$

Les conditions d'extrémité (pour  $x = 0$  et  $x = l$ ) donnent quatre équations supplémentaires, soit au total cinq équations linéaires et homogènes entre les cinq inconnues

$$A, B, \theta_A, \theta_B, e.$$

On écrit que le système ne peut avoir de solution non nulle que si son déterminant est nul. Soit, en posant  $u = pl$  :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{k_1}{F} & 0 & 0 \\ 0 & p & -1 & 0 & \frac{k_3}{F} \\ \cos u & \sin u & 0 & \frac{-k_2}{F} & 0 \\ -p \sin u & p \cos u & 0 & -1 & \frac{k_3}{F} \\ 0 & 0 & \frac{k_1}{F} & \frac{k_2}{F} \left(-1 + \frac{k_3 l}{F}\right) & 0 \end{vmatrix} \quad (7)$$

d'où en exprimant les raideurs en valeurs relatives, c'est-à-dire en posant :

$$\rho_1 = \frac{k_1 l}{EI} ; \quad \rho_2 = \frac{k_2 l}{EI} ; \quad \rho_3 = \frac{k_3 l^3}{EI} \quad (8)$$

la relation générale :

$$3 \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot [2(1 - \cos u) - u \cdot \sin u] + \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot u^3 \sin u + 3(\rho_1 + \rho_2) \cdot \rho_3 \cdot u \cdot (\sin u - u \cos u) + (\rho_1 + \rho_2) \cdot u^4 \cdot \cos u + 3 \rho_3 \cdot u^3 \cdot \sin u - u^5 \cdot \sin u = 0 \quad (9)$$

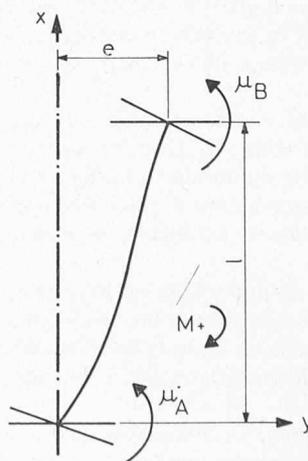


Fig. 1. — Système de référence d'une barre. Notations.

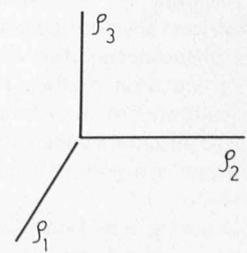


Fig. 2. — Représentation des conditions d'extrémités en valeurs relatives  $\rho_1 \rho_2 \rho_3$ .

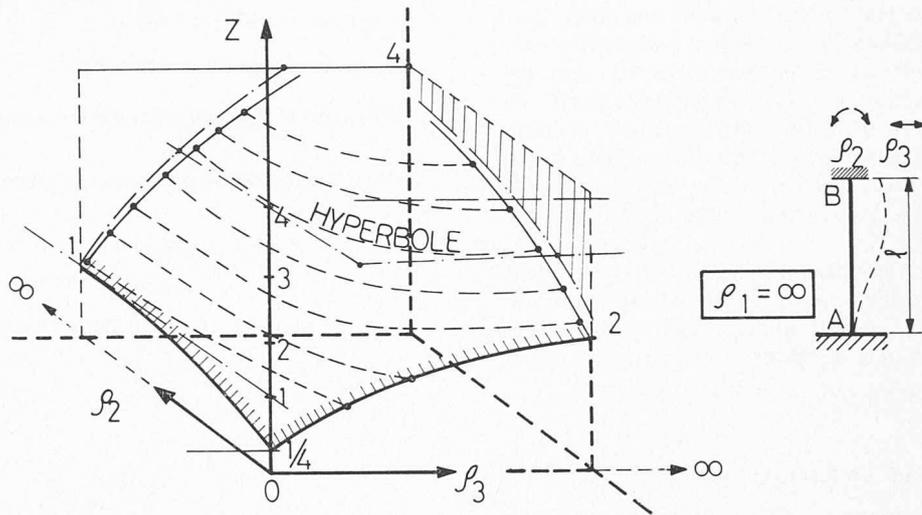


Fig. 3. — Surface caractéristique dans le cas d'un poteau encastré en pied. ( $Z = u^2/\pi^2$ )

Les raideurs d'extrémité étant connues, la relation (9) équation trigonométrique en  $u$  donnera la charge critique cherchée pour la plus petite solution en  $u$  différente de zéro :

$$F_c = \frac{u^2 EI}{l^2} \quad (10)$$

Inversement, pour un poteau donné et pour une valeur particulière de la charge critique les raideurs relatives  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  vérifient une relation du troisième degré de la forme :

$$a \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 + b \rho_1 \cdot \rho_2 + c (\rho_1 + \rho_2) \cdot \rho_3 + d (\rho_1 + \rho_2) + 3 b \rho_3 + g = 0 \quad (11)$$

Donc pour  $F_c$  donné, l'équation (9) représente dans un système de référence  $O\rho_1, O\rho_2, O\rho_3$  (fig. 2) une surface du troisième degré :

$$\Phi(\rho_1, \rho_2, \rho_3, F_c) = 0$$

dont les lignes de niveau (situées dans les plans parallèles aux plans de coordonnées) sont des hyperboles (fig. 3).

La relation (9) [ou (11)] résout le problème dans tous les cas. En particulier l'encastrement à une extrémité correspond à  $\rho_1 = \infty$  (fig. 5) ou  $\rho_2 = \infty$  et  $\rho_3 = \infty$  (fig. 4) correspond au cas où le déplacement transversal relatif des extrémités est empêché :

On voit (fig. 3, 5) que pour  $\rho_1 = \infty$  suivant les conditions d'encastrement du poteau en tête  $\rho_2$  et  $\rho_3$  la charge critique peut varier entre  $1/4$  et quatre fois la charge critique de la pièce articulée aux deux bouts !

Pour  $\rho_2 = \infty$  et  $\rho_3 = \infty$  on retrouve le résultat théorique bien connu  $F_c = 4 \pi^2 EI/l^2$ , mais on voit en outre, d'après l'allure de la courbe  $Z = f(\rho_2)$  que pour les encastrements réels, la charge critique différera notablement de sa limite asymptotique (qui correspondrait à  $\rho_2 = \infty$ ). Ceci revient à constater que l'encastrement parfait n'existe pas dans la nature et que la charge critique calculée avec les hypothèses d'Euler, compte tenu des conditions d'encastrement réelles, ne diffère pas tant des résultats d'essais que les expérimentateurs ont pu le croire généralement.

Si l'encastrement à la base n'est pas parfait,  $\rho_1 \neq \infty$  la charge critique est encore abaissée et peut même, évidemment, tendre vers zéro si la liaison en pied de poteau est insuffisamment rigide.

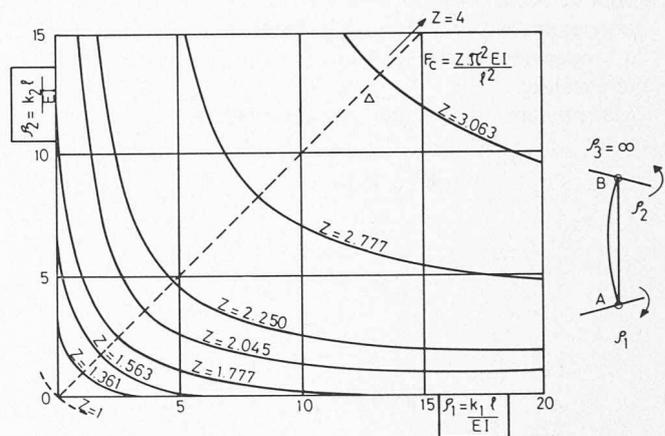


Fig. 4. — Abaque n° 1 de M. C. Bourdon, pour le flambement des barres semi encastrées (sans déplacement transversal relatif des appuis par rapport à la ligne moyenne — cas des barres de treillis).

$Z = u^2/\pi^2$   
 $\rho_1$  et  $\rho_2$  = raideurs relatives de rotation  
 $\Delta$  = lieu des centres des hyperboles (droite)

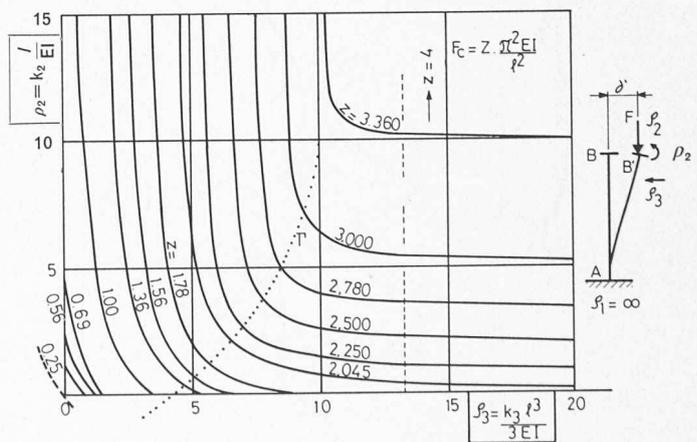


Fig. 5. — Abaque n° 2 de M. C. Bourdon pour le flambement de poteaux parfaitement encastrés en pied, et pouvant subir en tête un déplacement transversal et une rotation :

$\rho_3$  = raideur relative de translation en B  
 $\rho_2$  = raideur relative de rotation en B  
 $\Gamma$  = lieu des centres des hyperboles  
 $Z = u^2/\pi^2$

Les formules (9) et (11) fournissent donc une généralisation complète des résultats de M. Dutheil (voir annexe aux règles CM 66) dans les cas particuliers du poteau dont les extrémités ne peuvent subir aucun déplacement relatif, et du poteau libre de se déplacer transversalement en tête. Elles permettent d'établir un programme de calculs automatiques donnant directement la charge critique d'Euler, quelles que soient les conditions d'extrémités (rotation et déplacement relatif).

Inscrit dans un programme général de structures avec les corrections nécessaires, ce programme permettra de déceler les barres qui risquent de flamber (nous supposons pour le moment le risque de flambement de torsion ou de voilement exclus).

### Pièces comprimées et fléchies

La notion de stabilité élastique peut être précisée en considérant le modèle simple d'un poteau rectiligne soumis à deux charges égales et opposées de même excentricité  $a$ .

Pigeaud avait déjà traité ce problème dans son excellent cours de Résistance des matériaux à l'Ecole nationale des ponts et chaussées... et après lui le professeur Timoshenko l'a longuement développé dans son ouvrage sur la « Stabilité élastique ».

En prenant l'origine des axes au milieu  $C$  de la colonne, on a :

$$M = F \cdot (a + e) - y \quad (15)$$

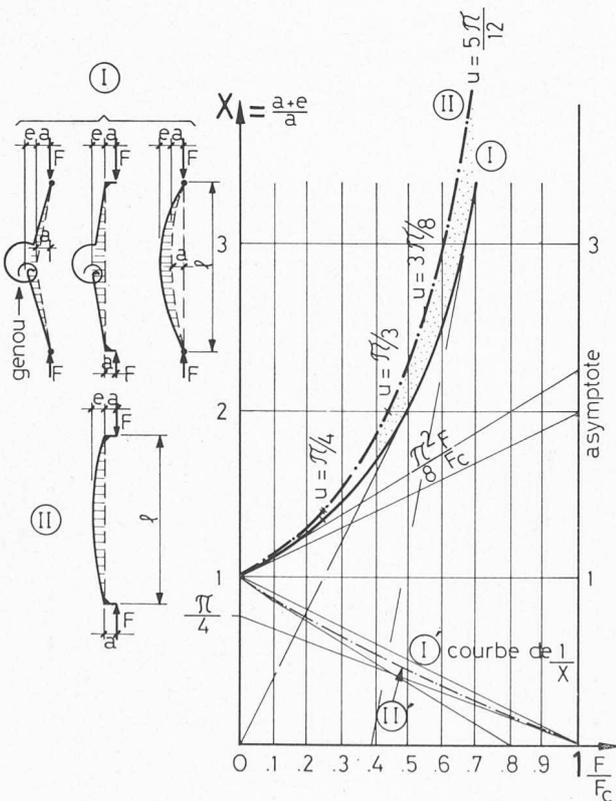


Fig. 6. — Représentation du coefficient d'amplification  $\chi$  des déformations (ou défauts), pour une pièce comprimée, en fonction du rapport  $F/F_c$  de la charge à la charge critique :

$$\begin{aligned} \text{I. } \chi &= \frac{1}{1 - F/F_c} \\ \text{II. } \chi &= 1 / \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{F/F_c} \end{aligned}$$

d'où l'équation différentielle :

$$EI y'' + Fy = F \cdot (a + e) \quad (16)$$

la déformée est une sinusoïde de longueur d'onde  $L = \frac{\pi}{p}$ .

Nous appellerons « coefficient d'amplification » le rapport :

$$X = \frac{a + e}{a} = \frac{1}{\cos u} \quad (18)$$

soit, compte tenu de la valeur de la charge critique d'Euler

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \text{ et de } u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_c}}$$

$$X = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_c}}} \quad (19)$$

La courbe représentative de cette fonction  $X$  de  $F/F_c$  a l'allure indiquée sur la figure 6.

On voit aisément que si l'on veut éviter d'avoir une amplification supérieure à 2 ou 3, on devra limiter la charge appliquée à  $F$  à une fraction de la charge critique de l'ordre de 0,60.

Cette notion d'amplification des flèches a conduit M. Dutheil à établir une méthode pratique de vérification des pièces métalliques comprimées, qui est à la base des règles CM 66.

Elle s'applique aussi au problème du flambement des pièces en béton armé.

Ecartons légèrement la pièce de sa position d'équilibre (de  $\varepsilon$ ).

On peut montrer que la variation du moment résistant est toujours supérieure, au voisinage de l'équilibre, à celle du moment actif. Leur différence est d'autant plus faible que la charge  $F$  se rapproche de la charge critique.

Les contraintes dans la section médiane de la pièce fléchie et comprimée sont données par la formule :

$$\sigma = \frac{F}{S} \pm \frac{F \cdot a}{\frac{I}{v} \cos u} \quad (21)$$

On peut généraliser l'étude ci-dessus au cas d'une pièce soumise à une charge excentrée, dont les extrémités sont soumises à des conditions d'encastrement quelconques. On trouverait une autre expression du coefficient d'amplification.

Au lieu de considérer une excentricité de la charge aux extrémités du poteau chargé, considérons l'effet d'une déformation initiale sinusoïdale (fig. 7).

Pour un poteau articulé aux extrémités le coefficient d'amplification s'écrit :

$$X = \frac{a + e}{a} = \frac{1}{1 - \frac{F}{F_c}} \quad (25)$$

$F$  = charge appliquée ;

$F_c$  = charge critique d'Euler.

C'est la formule bien connue de Perry.

La courbe représentative de cette fonction  $X = f\left(\frac{F}{F_c}\right)$  diffère peu, pour les valeurs de  $\frac{F}{F_c}$  inférieures à 0,5 de celle déjà trouvée plus haut.

Un autre modèle mécanique intéressant (représenté sur la figure 8) est celui d'une barre très rigide coupée en son milieu, et dont les deux parties sont raccordées par une lame de ressort. Supposons que sous l'action des forces  $\pm F$  le point  $C$  se déplace jusqu'à une position d'équilibre  $C'$  telle que  $CC' = e$ .

Chaque tronçon de barre subit donc une petite rotation  $\theta = \pm 2e/l$ .

Le moment résistant dû au ressort est proportionnel à  $\theta$

$$M_c = 2k\theta = \frac{4ke}{l} \quad (26)$$

et le moment moteur

$$M'_c = F \cdot (a + e) \quad (27)$$

De l'égalité de ces moments, on tire l'expression suivante du coefficient d'amplification  $X$ :

$$X = \frac{a + e}{a} = \frac{1}{1 - \frac{Fl}{4k}} = \frac{1}{1 - \frac{F}{F_c}} \quad (28)$$

Il résulte des formules (19), (25), (28) que l'effet d'un défaut géométrique dépend très peu comme  $M$ . Dutheil l'avait déjà fait remarquer, de sa distribution le long de la pièce, mais surtout de son amplitude maximale.

D'après les calculs qui précèdent, l'instabilité élastique apparaît lorsque la charge dépasse une limite au-dessus de laquelle la raideur de la pièce devient insuffisante pour maintenir l'équilibre « fléchi ».

Ces résultats peuvent faire l'objet d'une autre interprétation (fig. 9).

Supposons que la ligne élastique soit un arc de sinus. Nous obtiendrions la même déformation de la pièce sous l'effet d'une charge transversale répartie d'intensité :

$$p = p_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (29)$$

La déformation transversale est, en un point d'abscisse  $x$  d'après la théorie des poutres :

$$y = \frac{p_0 \cdot l^4}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (33)$$

et sa valeur maximale au milieu de la portée est :

$$y_m = \frac{p_0 l^4}{\pi^4 EI} \sim \frac{p_0 l^4}{100 EI} \quad (34)$$

D'autre part, le rayon de courbure au sommet d'une sinusoïde d'équation  $y = A \sin \frac{\pi x}{l}$

$$\text{vaut } r = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{l^2}{\pi^2 \cdot A} \quad (35)$$

$$\text{d'où, avec } A = \frac{p_0 l^4}{\pi^4 EI} \quad (36)$$

$$r = \frac{\pi^2 EI}{p_0 l^2}$$

Appliquons maintenant à la pièce une charge longitudinale  $F$  et supposons l'équilibre fléchi possible.

Tout se passe comme si la raideur de la poutre développait de petites forces fictives  $p_0$  équilibrées dans l'arc  $AB$  par la poussée  $F$  et la « formule du tube » nous donne :

$$F = p_0 \cdot r \quad (37)$$

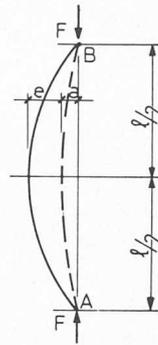


Fig. 7. — Amplification d'une déformation initiale sinusoïdale, d'une pièce articulée aux deux bouts, sous l'action d'un effort normal  $F$ .

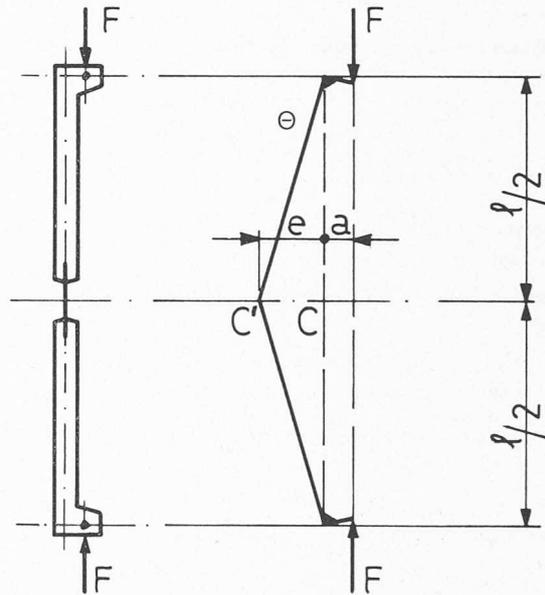


Fig. 8. — Modèle mécanique pour l'étude du flambement, composé de leviers et d'un ressort central.

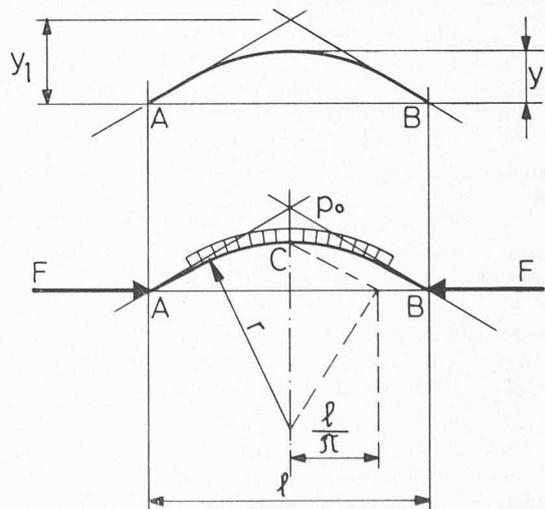


Fig. 9. — Forces fictives de rappel d'une barre comprimée à déformée sinusoïdale :

$$\begin{aligned} p_0 &= \text{pression fictive} \\ F &= p_0 \cdot r = \pi^2 EI/l^2; & ry &= l^2/\pi^2 \\ y &= p_0 l^4/\pi^4 EI \\ y_1 &= p_0 l^4/2\pi^3 EI \end{aligned}$$

soit, d'après (36) :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (38)$$

Nous retrouvons par des considérations de géométrie et de mécanique élémentaires le résultat d'Euler.

Tout se passe comme si la raideur de la poutre était équivalente à celle d'un milieu élastique extérieur, de « module de réaction »

$$k = \frac{p_0}{y_m} = \frac{\pi^4 EI}{l^4} \quad (39)$$

et la formule d'Euler prend la forme

$$F_c = \frac{kl^2}{\pi^2} = 2\sqrt{EI k} \quad (40)$$

Inversement, la formule (39) nous donne la longueur de flambement

$$l = \pi \sqrt[4]{\frac{EI}{k}} = \pi \sqrt[2]{\frac{F_c}{k}} \quad (41)$$

#### Remarque

La solution générale s'écrit :

$$a\rho_1\rho_2\rho_3 + b\rho_1\rho_2 + c(\rho_1 + \rho_2)\rho_3 + d(\rho_1 + \rho_2) + f\rho_3 + g = 0$$

avec  $f = 3b$ ;  $g = -bu^2$  et

$$a = 6(1 - \cos u) - 3u \cdot \sin u = 6 \sin u \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \right)$$

$$b = u^3 \cdot \sin u$$

$$c = 3u \sin u - 3u^2 \cos u = \frac{3u}{2} \sin 2u \cdot (\operatorname{tg} u - u)$$

$$d = u^4 \cos u \quad \text{On a : } \frac{\operatorname{tg} u}{u} = \frac{b}{d}; \quad \frac{3b}{a} \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} \right) = -u^2; \dots$$

Lorsque les raideurs relatives  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  prennent des valeurs nulles ou infinies, l'équation se simplifie et on obtient :

avec une extrémité articulée :

$$\rho_1 = 0 \quad c\rho_2\rho_3 + d\rho_2 + 3b\rho_3 + g = 0$$

$$\rho_2 = 0 \quad c\rho_1\rho_3 + d\rho_1 + 3b\rho_3 + g = 0$$

et avec une extrémité encastree :

$$\rho_1 = \infty \quad a\rho_2\rho_3 + b\rho_2 + c\rho_3 + d = 0$$

$$\rho_2 = \infty \quad a\rho_1\rho_3 + b\rho_1 + c\rho_3 + d = 0$$

D'autre part, si les extrémités ne peuvent subir de déplacement transversal relatif (cas des treillis) :

$$\rho_3 = \infty \quad a\rho_1\rho_2 + c(\rho_1 + \rho_2) + 3b = 0$$

ou, au contraire si rien ne s'oppose au déplacement transversal relatif :

$$\rho_3 = 0 \quad b\rho_1\rho_2 + d(\rho_1 + \rho_2) + g = 0$$

On peut poursuivre l'analyse des cas particuliers en considérant par exemple deux raideurs relatives nulles :

$$\rho_1 = 0, \rho_2 = 0 \quad 3b\rho_3 + g = 0$$

$$\rho_2 = 0, \rho_3 = 0 \quad d \cdot \rho_1 + g = 0$$

$$\rho_3 = 0, \rho_1 = 0 \quad d \cdot \rho_2 + g = 0$$

ou au contraire deux raideurs relatives infinies :

$$\rho_1 = \infty, \rho_2 = \infty \quad a\rho_3 + b = 0$$

$$\rho_2 = \infty, \rho_3 = \infty \quad a\rho_1 + c = 0$$

$$\rho_3 = \infty, \rho_1 = \infty \quad a\rho_2 + c = 0$$

ou enfin une raideur relative nulle et une raideur relative infinie :

$$\rho_1 = 0, \rho_2 = \infty \text{ ou } \rho_2 = 0, \rho_1 = \infty \quad c\rho_3 + d = 0$$

$$\rho_1 = 0, \rho_3 = \infty \quad c\rho_2 + 3b = 0$$

$$\rho_2 = 0, \rho_3 = \infty \quad c\rho_1 + 3b = 0$$

$$\rho_1 = \infty, \rho_3 = 0 \quad b\rho_2 + d = 0$$

$$\rho_2 = \infty, \rho_3 = 0 \quad b\rho_1 + d = 0$$

Il y a lieu d'ajouter les solutions pour lesquelles l'un des coefficients  $a, b, c, d, g$  de l'équation générale est nul, et qui correspondent aux cas particuliers habituellement considérés.

$$a = 0 \quad \frac{u}{2} = \operatorname{tg} \frac{u}{2} \quad \rho_1 = \infty, \rho_2 = \infty, \rho_3 = \infty$$

$$b = 0 \quad u = \pi \quad \rho_1 = 0, \rho_2 = 0, \rho_3 = \infty$$

$$\rho_1 = \infty, \rho_2 = \infty, \rho_3 = 0$$

$$c = 0 \quad u = \operatorname{tg} u \quad \rho_1 = 0, \rho_2 = \infty, \rho_3 = \infty$$

$$\rho_1 = \infty, \rho_2 = 0, \rho_3 = \infty$$

$$d = 0 \quad u = \frac{\pi}{2} \quad \rho_1 = 0, \rho_2 = \infty, \rho_3 = 0$$

$$g = -bu^2 = 0 \quad u = 0 \quad \rho_1 = \infty, \rho_2 = 0, \rho_3 = 0$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$$

(pas d'équilibre stable)

### Flambement des pieux dans un milieu élastique homogène (fig. 10)

Ayant introduit la notion de « raideur » d'un milieu fictif équivalent, il est logique d'aborder à ce stade de notre exposé, le problème du flambement des pieux dans le sol.

Le pieu étant indéfini, la longueur de flambement libre  $l$  est inconnue, mais nous allons montrer que l'on peut la calculer en fonction des caractéristiques mécaniques du pieu et du module de déformation du sol.

Ecrivons en effet, comme ci-dessus :

$$F_c = \frac{kl^2}{\pi^2} \quad (42)$$

avec :

$$k = k_1 + k_2$$

$k_1$  = module de réaction fictif équivalent à la raideur du pieu =  $\pi^4 EI/l^4$ ;

$k_2$  = module de déformation réel du sol ;

$$\text{d'où : } F_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} + k_2 \frac{l^2}{\pi^2} \quad (43)$$

$F_c$  est minimale, pour un pieu et un terrain donné pour une certaine valeur de  $l$  annulant la dérivée que nous avons nommée « longueur de flambement libre la plus dangereuse » :

$$l_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda} \quad (44), \text{ en posant : } \lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

En portant cette longueur dans (43) on obtient :

$$F_c = 4 E \cdot I \cdot \lambda^2 = 2 \sqrt{EI k} \quad (45)$$

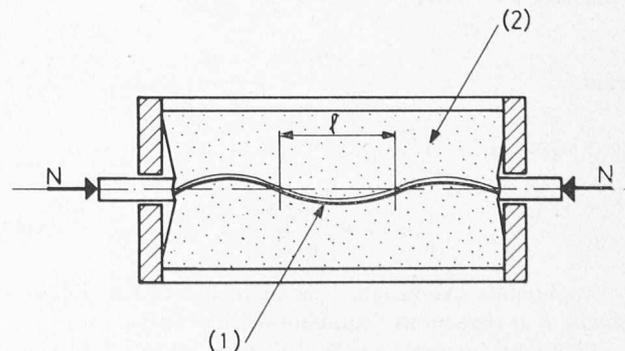


Fig. 10. — Modèle mécanique pour l'étude du flambement des tiges milieu élastique, et du cloquage :

- (1) fil ou lame métallique  
(2) milieu élastique

La charge critique du pieu est donc le double de celle du poteau ayant la même longueur de flambement libre  $l_0$ .

Avec les valeurs numériques courantes du module de déformation des sols, on trouve en général qu'un pieu ne risque pas de « flamber » dans le sol. Il y a toutefois lieu de remarquer que les calculs ci-dessus ont été effectués en faisant abstraction du fluage du sol, et l'on conçoit que si ce phénomène était à craindre, on ne pourrait escompter aucun effet stabilisant du milieu extérieur, et il faudrait calculer le pieu comme si ce milieu était un liquide.

L'intérêt essentiel de ces résultats est leur adaptation remarquable aux théories du flambement des plaques et des coques comprimées.

### Application analogique de la théorie des pieux aux coques minces homogènes

Comme nous l'avons mentionné dans un article paru dans la revue *Le Génie civil*, en mars 1969, on peut décomposer une coque (membrane mince) en deux systèmes d'éléments porteurs principaux croisés, chacun d'eux constituant le « funiculaire » d'une fraction de la charge totale appliquée à la coque.

La répartition de cette charge entre ces deux systèmes met en jeu des efforts agissant suivant la surface de la membrane.

Chaque système déformable constitue pour l'autre un « milieu élastique » à coefficient de ballast variable d'un point à l'autre.

On peut utiliser cette décomposition pour la recherche de solutions approchées au problème du flambement des coques minces.

C'est ce que nous avons fait tout d'abord pour le cône (avec comme cas particulier le cylindre), puis pour la sphère.

Par exemple, pour un cône de révolution (fig. 11) de grandes dimensions, chargé au sommet par une charge ponctuelle  $P$  nous pouvons prendre, pour les déformations symétriques, le « module de réaction » équivalent :

$$k_0 = \frac{E \cdot h \cdot \cos^2 \alpha}{r^2 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (46)$$

d'où la charge critique de flambement relative aux génératrices rectilignes :

$$P_{cr} = \frac{2 \pi E \cdot h^3 \cdot \cos^2 \alpha}{\sqrt{3} (1 - \nu^2)} \quad (47)$$

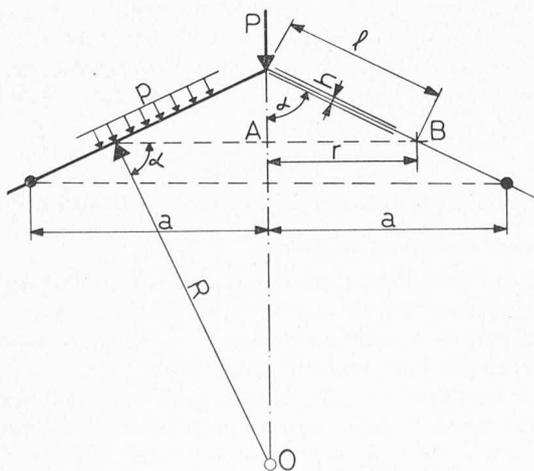


Fig. 11. — Stabilité élastique d'une coque conique de révolution chargée axialement en son sommet, ou soumise à une pression uniforme.

$$\text{et} \quad \sigma_{cr} = \frac{E \cdot h \cdot \cos \alpha}{r \cdot \sqrt{3} (1 - \nu^2)} \quad (48)$$

et pour le cylindre ( $\alpha = 0$ ) :

$$\sigma_{cr} = \frac{Eh}{r \cdot \sqrt{3} (1 - \nu^2)} \quad (49)$$

Nous retrouvons très simplement la formule de Timoshenko (théorie de la stabilité élastique, § 87) pour le flambement symétrique.

Pour le cloquage avec ondes « antisymétriques », Timoshenko a indiqué que la formule (49) doit être affectée d'un coefficient correctif égal à 3/5, ce qui donne :

$$\sigma'_{cr} = \frac{3}{5} \cdot \frac{Eh}{r \cdot \sqrt{3} (1 - \nu^2)} \quad (50)$$

Dans le cas d'une coque conique soumise à une pression uniforme extérieure (fond de réservoir, coupole conique), on a :

$$P_{cr} = \frac{6}{5} \cdot \frac{E \cdot h^3 \cdot \cos^2 \alpha}{a^2 \cdot \sqrt{3} (1 - \nu^2)} \quad (51)$$

en admettant que la coque ne risque pas de flamber suivant les anneaux.

La pression critique relative à ce mode de flambement serait beaucoup plus faible :

$$P'_{cr} = \frac{E \cdot h^3}{4 R^3 \cdot \sqrt{1 - \nu^2}} \quad \text{avec} \quad R = \frac{a}{\cos \alpha} \quad (52)$$

Mais si l'on tient compte de l'existence d'un anneau raidisseur disposé en bordure de la coque, la pression critique de flambement de la coque est de la forme :

$$P''_{cr} = \beta \cdot P_{cr} \quad (53)$$

avec :  $\beta = m \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$  (où  $m \simeq 2$ )

Dans le cas d'une coque sphérique (fig. 12) de rayon moyen  $r$  et d'épaisseur  $h$  soumise à une pression uni-

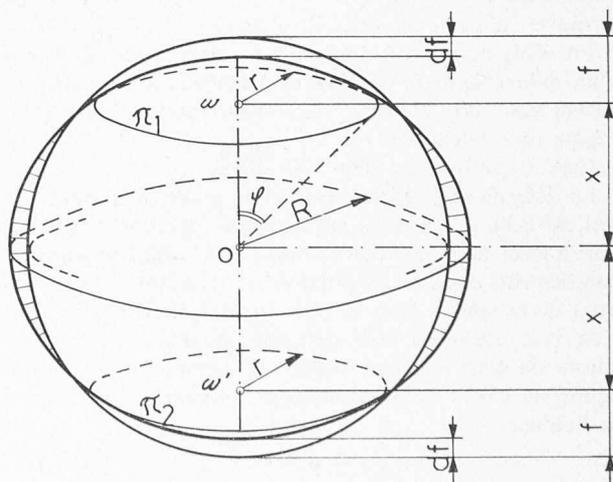


Fig. 12. — Représentation schématique de la déformation libre d'une coque sphérique soumise à une pression extérieure, dans le phénomène de cloquage :

$\pi_1$  et  $\pi_2$  : cercles nodaux  $f = 0,28 R$

forme  $p$ , la résultante des contraintes internes régnant sur une longueur unité est :

$$\sigma = \frac{pr}{2} \quad (54)$$

Si l'on prend pour module de déformation transversal celui qui correspond à une contraction uniforme de la coque (celle-ci restant sphérique) :

$$k = \frac{p}{y} = \frac{2 Eh}{r^2 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (55)$$

A chacun des deux cours d'anneaux orthogonaux que l'on peut découper dans la coque correspond un module

$$k' = \frac{k}{2} = \frac{Eh}{r^2 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (56)$$

et d'après ce que nous avons vu pour les pieux on a, pour une bande de largeur unité :

$$n_{cr} = 2 \sqrt{EI k'} = \frac{Eh^2}{r \sqrt{3} (1 - \nu^2)} \quad (57)$$

d'où la contrainte critique

$$\sigma_{cr} = \frac{n_{cr}}{h} = \frac{Eh}{r \sqrt{3} (1 - \nu^2)} \quad (58)$$

ou 
$$\sigma_{cr} = C \frac{Eh}{r} \quad (59)$$

avec  $\nu_{acier} = 0,3$   $C = 0,6$

Les formules (57) et (58) sont les mêmes que celles auxquelles conduit la théorie classique, au prix de calculs laborieux.

Or, tous les expérimentateurs ont trouvé de larges divergences entre les résultats d'essais et les formules théoriques ci-dessus et Karman-Tsien ont proposé la formule empirique :

$$\sigma_{cr} = 0,18 \frac{Eh}{r} \quad (60)$$

soit, en moyenne pour le coefficient  $C$ ,  $\frac{3}{10}$  seulement de la valeur théorique.

L'analogie physique que nous avons faite nous fournit le moyen d'expliquer cette divergence.

En effet, nous avons calculé un « module de réaction » d'un milieu fictif correspondant à la raideur propre de la sphère dans une déformation transversale uniforme (centripète ou centrifuge).

Cette hypothèse est trop restrictive.

La déformation qui correspond au mode de flambement réel est celle qui met en jeu l'énergie élastique minimale, c'est-à-dire, dans une déformation avec aplatissement (ou bombement) des calottes polaires et dilatation (ou contraction) de la sphère dans le plan équatorial correspondant.

Si l'on considère une déformation « antisymétrique » autour de deux « cercles nodaux », comme indiqué sur la figure, un calcul simple conduit à considérer deux calottes de hauteur

$$f = 0,28 r \quad (61)$$

dont la variation relative de courbure est

$$\frac{dr}{r} = \frac{2r-f}{f} \cdot \sigma \cdot \frac{(1-\nu^2)}{E} = 6,15 \frac{\sigma \cdot (1-\nu^2)}{E} \quad (62)$$

d'où un coefficient de raideur transversal

$$k'' = \frac{k'}{6,15} \quad (63)$$

et la charge critique

$$n'_{cr} = 2 \sqrt{EI k''} \quad (64)$$

et la contrainte critique

$$\sigma'_{cr} = \frac{Eh}{r \cdot \sqrt{18,45} (1 - \nu^2)} \quad (65)$$

soit pour l'acier

$$\nu = 0,3 \quad \sigma'_{cr} = 0,244 \cdot \frac{Eh}{r} \quad (66)$$

et pour le béton

$$\nu = 0,15 \quad \sigma'_{cr} = 0,235 \frac{Eh}{r} \quad (66 \text{ bis})$$

La longueur théorique de flambement est alors :

$$l_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma'_{cr} h}{k''}} \quad (67)$$

soit pour l'acier

$$\nu = 0,3 \quad l_0 = 2,6 \cdot \sqrt{hr} \quad (68)$$

et pour le béton

$$\nu = 0,15 \quad l_0 = 2,64 \cdot \sqrt{hr} \quad (68 \text{ bis})$$

Une correction supplémentaire aux formules (66) à (68 bis) provient comme dans le cas du cylindre, de l'allure dissymétrique (« gaufrage » en losanges) du cloquage local et nous appliquerons, comme nous l'avons fait pour le cylindre, un coefficient minorateur de 0,6, ce qui conduit finalement aux valeurs suivantes des contraintes critiques théoriques :

pour l'acier 
$$\sigma''_{cr} = 0,146 \cdot \frac{Eh}{r} \quad (69)$$

pour le béton 
$$\sigma''_{cr} = 0,141 \cdot \frac{Eh}{r} \quad (69 \text{ bis})$$

L'effet de plaque, résistance de la coque à la flexion, relève un peu les valeurs obtenues, de sorte que l'on peut considérer que notre raisonnement conduit bien aux mêmes valeurs que les expériences de Karman-Tsien.

Quant à la longueur de flambement correspondante, on trouve aisément que pour la sphère elle est voisine de  $3\sqrt{hr}$ .

## Généralisation aux matériaux réels - Béton armé

### a) Pièces axialement chargées

Les calculs ci-dessus ont été effectués dans l'hypothèse d'un matériau obéissant à la loi de Hooke.

Il reste donc à examiner comment ces résultats peuvent être extrapolés pour les matériaux réels.

Pour les pièces métalliques grêles, les nombreux essais effectués depuis le début de l'ère de la construction métallique, ont conduit à affecter les formules théoriques de coefficients correctifs.

Dans la formule de Navier-Rankine, on compare une contrainte de compression majorée (dans le rapport  $1 + F/F_c$ )

à la contrainte de rupture par compression du matériau et

$$\bar{\sigma}_a \cdot \left(1 + \frac{F}{F_c}\right) \leq \frac{\sigma_a}{m} \quad (70)$$

$m$  = coefficient de sécurité ;  
 $F_c$  = charge critique Euler ;  
 $F$  = charge réelle.

Si  $F$  est éloigné de  $F_c$ , le coefficient correctif  $1 + F/F_c$  est voisin de  $1/1 - F/F_c$ , c'est-à-dire du coefficient d'amplification des défauts géométriques calculé plus haut.

Ultérieurement, Engesser et Karman, étudiant le flambage des pièces métalliques dans le domaine plastique ont proposé de corriger le module de déformation et préconisé d'appliquer les formules théoriques avec un module réduit de flambage :

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \quad (71)$$

où  $E$  = module d'élasticité ;

$E_t$  = module tangent (traduisant la loi de déformation au voisinage de la contrainte critique).

En pratique, ces auteurs proposent la formule :

$$E_r = \frac{3,6 \cdot E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + 0,9 \sqrt{E_t})^2} \quad (72)$$

Plus récemment, M. Dutheil, en France, a ramené le problème de la stabilité des pièces métalliques comprimées à un problème de flexion composée. Il tient compte de l'amplification des déformations initiales (ou dues à des charges transversales) sous l'effet de la compression. Le coefficient d'amplification reste de la forme  $1/1 - F/F'_c$ , mais  $F'_c$  est alors la charge critique réelle au lieu de la charge critique d'Euler (fig. 13).

En outre, M. Dutheil tient compte d'un coefficient de réduction de 1,3.

Voir « Règles de calcul des constructions en acier CM 66 ».

Examinons maintenant le cas des poteaux en béton armé.

Considérons, pour simplifier, un poteau de longueur  $l$  soumis à une charge  $N$  ; donnons à cette charge une excentricité  $a$  croissante.

Pour les faibles valeurs de  $a$ , la pièce va fléchir légèrement, les sections restant tout d'abord entièrement comprimées sur toute la hauteur du poteau.

Puis à un moment donné

pour 
$$a = \frac{h}{6} \left(1 - \frac{F}{F_c}\right) \quad (73)$$

la flèche à mi-hauteur, soit  $a + e$ , devient égale à  $h/6$  et des tractions (d'abord très faibles) apparaissent sur la fibre tendue.

Si l'on fait croître l'excentricité  $a$  au-delà de cette valeur, l'inertie de la section médiane décroît de  $I_1$  (inertie de la pièce non fissurée) à  $I_2$  (inertie correspondant à la flexion simple).

On peut admettre, en première approximation, que tout se passe pour les petites déformations comme si le poteau avait une inertie fictive constante  $I'$  comprise entre  $I_1$  et  $I_2$ .

Le coefficient d'amplification devient

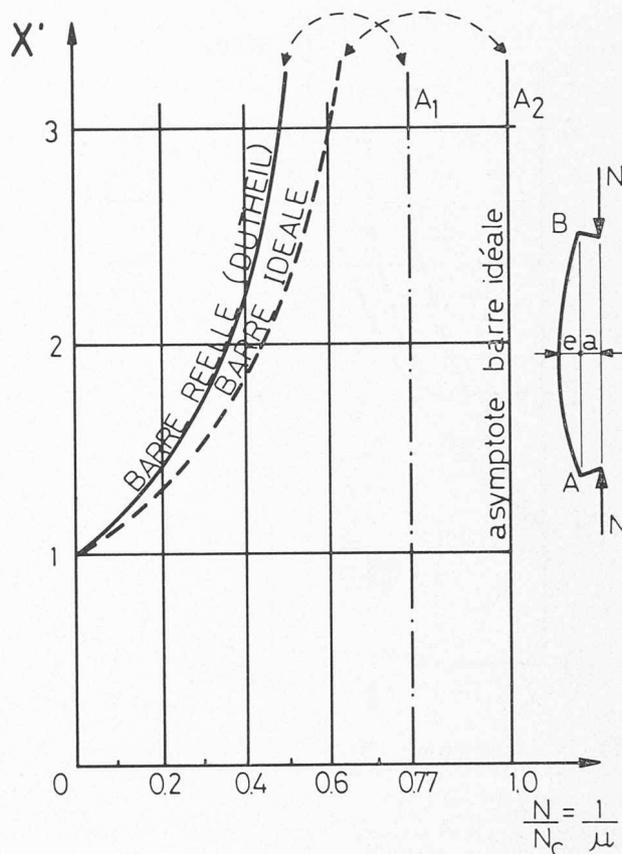


Fig. 13. — Variation du coefficient d'amplification  $\chi'$  des déformations d'une barre métallique comprimée soumise à une charge excentrée, selon Dutheil (règles françaises CM 66) :

$A_1$  = asymptote barre réelle  
 $A_2$  = asymptote barre idéale

$$\chi' = \frac{a + e}{a} = \frac{\mu - 1}{\mu - 1,3} \cdot \chi$$

$$X' = \frac{1}{1 - \frac{F}{F'_c}} \quad \text{avec} \quad F'_c = \frac{\pi^2 EI'}{l^2} \quad F'_c < F_c \quad (74)$$

la courbe représentant  $X'$  en fonction de  $\frac{F}{F_c}$  est affine de la courbe

$$X = \frac{1}{1 - \frac{F}{F_c}} \quad (75)$$

par rapport à l'axe  $OX$  ; dans le rapport  $F'_c/F_c$  (fig. 14).

La loi réelle  $X = f(F/F_c)$  peut être représentée par un arc de courbe tel que  $\widehat{AC}$ .

La valeur  $\alpha = F/F_c$  correspondant à  $C$  sera évidemment d'autant plus proche de l'unité que le poteau sera plus armé.

Si  $\beta$  est le rapport de l'inertie de la section réduite homogénéisée du poteau soumis à la flexion simple à l'inertie de la section homogénéisée correspondant à une compression centrée, on a  $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$ .

$\beta$  est d'autant plus proche de l'unité que le pourcentage d'acier est plus élevé. La courbe  $\widehat{AC}$  se trouve donc comprise dans le fuseau  $BAB'$  (bien déterminé pour un poteau de section donnée).

Cette courte analyse nous montre les « contours » de la solution du problème du flambement des pièces en béton armé.

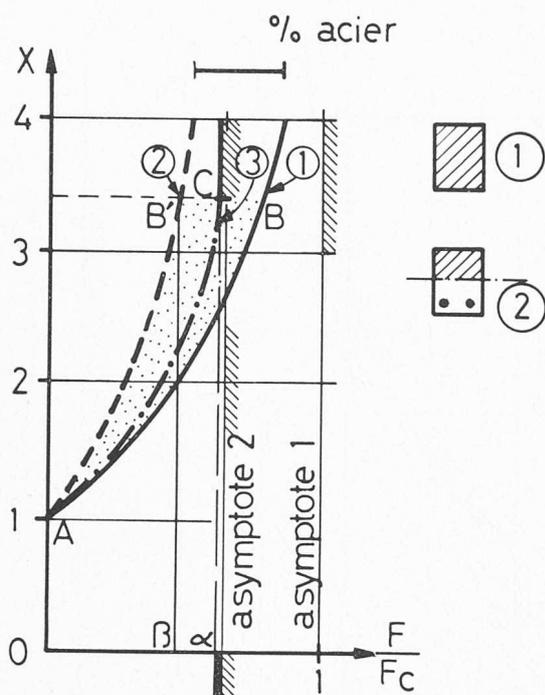


Fig. 14. — Coefficient d'amplification  $\chi$  des pièces en béton armé, en fonction du rapport  $F/F_c$  :

- $F_c$  = charge critique d'Euler  
 1) section homogène non fissurée  
 2) section réduite en flexion simple  
 3) section fissurée : loi réelle

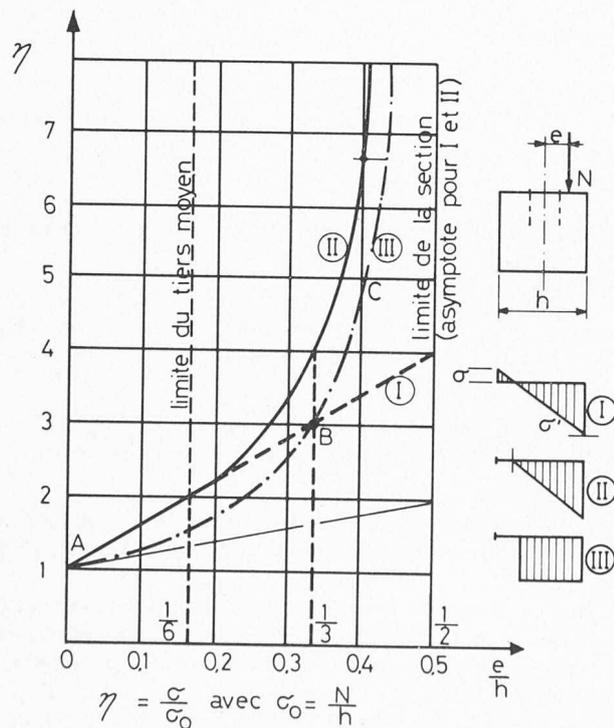


Fig. 15. — Variation relative de la contrainte maximale dans une section rectangulaire soumise à la flexion composée :

- I. Loi de Navier, pour les métaux  $\eta = 1 + 6 e/h$   
 II. Répartition triangulaire (matériau non résistant à la traction (empilage)  $\eta = \frac{2}{3} (1 - 2 e/E)$   
 III. Répartition rectangulaire (matériau non résistant à la traction)  $\eta = 1/(1 - 2 e/h)$

Mais la résolution détaillée de ce problème passe nécessairement par la connaissance de la relation existant entre les efforts appliqués à la section la plus sollicitée (charge  $P$  et moment de flexion  $M$ ) et le moment d'inertie correspondant.

On peut définir dans un système de coordonnées rectangulaires  $M, P, I$  une surface mécanique représentative des états d'équilibre limites, atteints par rupture du béton ou de l'acier.

Cette surface est un conoïde (fig. 16) engendré par des droites  $(A)$  s'appuyant sur le segment  $A'B'$  de l'axe des  $I$  et sur une courbe  $AB$  de l'espace dont la projection sur le plan  $(M, P)$  est une courbe  $\widehat{ab}$ .

Pour un poteau d'élanement donné, tous les points caractéristiques des différentes sections fissurées se trouvent sur la surface mécanique, dans le domaine  $rRQq$ .

Tout se passe comme si la pièce avait un moment d'inertie fictif moyen  $I_m$ .

La fissuration, dès qu'elle commence à se produire, engendre un accroissement des efforts internes, et une amplification supplémentaire des déformations d'autant plus grande que l'écart entre les valeurs extrêmes de l'inertie est lui-même plus élevé.

Il faut tenir compte de ce phénomène lorsque l'on doit déterminer les armatures des pièces axialement chargées. Les Règles françaises actuelles de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé (CC BA 68) en tiennent compte implicitement, par les coefficients qui déterminent l'excentricité de calcul de la charge.

La détermination de la surface mécanique est un problème de flexion composée qui peut être résolu (pour une section déterminée), soit graphiquement soit analytiquement.

L'excentricité réelle dans une section dépend de l'excentricité initiale (c'est-à-dire du défaut). On peut théoriquement la calculer par approximations successives, en découplant le poteau en tronçons dont on peut calculer la déformée, par les formules classiques de la résistance des matériaux. On est ramené à définir dans chaque intervalle un module d'élasticité fictif  $E^*$  et le coefficient d'équivalence des déformations acier béton  $m^*$  correspondant. Le module de déformation fictif  $E^*$  du béton à prendre en compte,

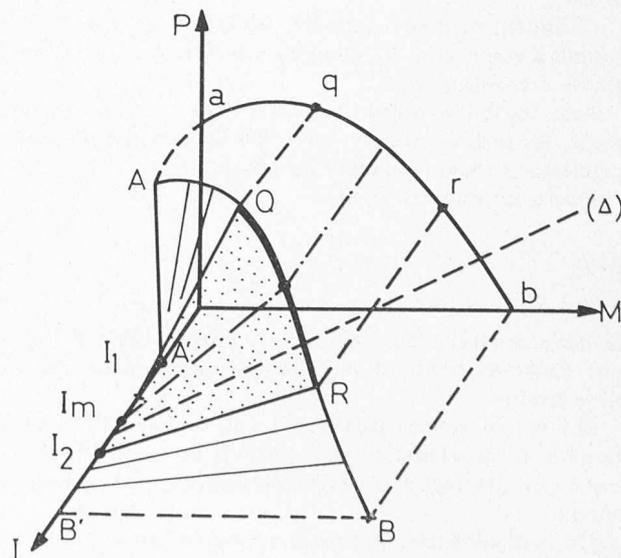


Fig. 16. — Représentation schématique de la « surface mécanique » ( $I, M, P$ ) ou ( $\log I, M, P$ ) pour les poteaux comprimés.

pour une contrainte maximale  $\sigma_1$  et un raccourcissement  $\varepsilon_1$  est calculé d'après le diagramme contraintes raccourcissements en considérant que les moments statiques des aires  $OAB'$  et du triangle curviligne limité par l'arc  $\widehat{OB}$  du diagramme sont égaux (fig. 17).

L'hypothèse de Bernoulli (planéité de la section) donne l'allongement correspondant et le taux de travail de l'acier.

On peut aussi obtenir une solution approchée en définissant *a priori* l'allure de la déformée comme B. Broms et I. M. Viest, aux USA<sup>1</sup>, et M. P. Faessel, en France<sup>2</sup>.

Ces auteurs considèrent la relation « moment-courbure » ou la relation « excentricité-courbure » dans l'hypothèse d'une ligne déformée sinusoidale.

Bien que la méthode de Faessel paraisse comporter une contradiction de principe puisque le rayon de la déformée est infini au droit des appuis, elle donne des valeurs limites de la charge  $N$  qui, pour de petites excentricités d'appui, s'écartent très peu des valeurs calculées tout récemment à la SOCOTEC, par M. Capra, pour les poteaux articulés avec un programme perfectionné qui ne comporte plus de restriction sur la forme de la ligne moyenne.

### b) Coques en béton armé

Le modèle analogique que nous avons proposé pour l'étude de la stabilité élastique des coques homogènes, va maintenant nous permettre d'introduire, dans les formules relatives aux coques en béton armé, « l'anisotropie de la matière ».

<sup>1</sup> B. BROMS B. and I. M. VIEST: *Long reinforced concrete columns* — A Symposium, Transactions ASCE, V, 126, 1961.

<sup>2</sup> J. R. ROBINSON & MODJABI: *La précision des charges de flambement des poteaux en béton armé par la méthode de M. P. Faessel*, Annales de ITBTP n° 249, septembre 1968.

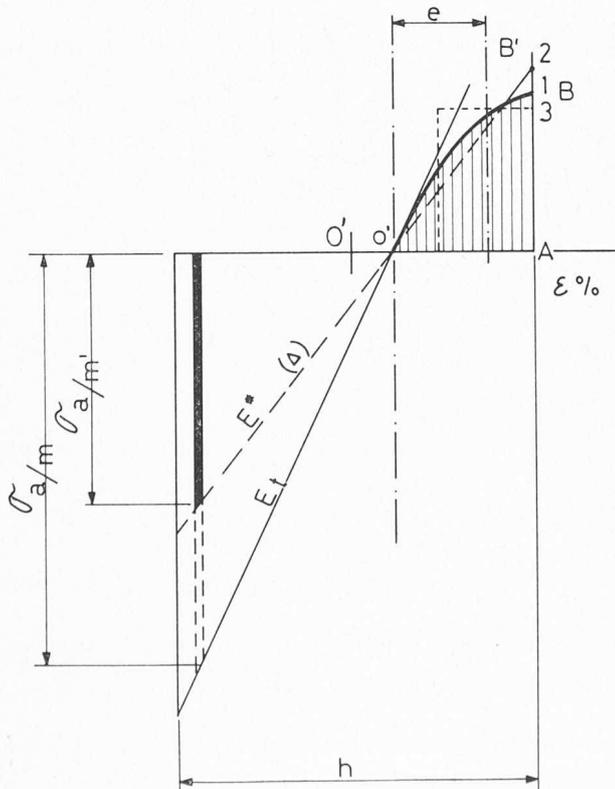


Fig. 17. — Diagramme théorique des contraintes normales sur une section rectangulaire en béton armé, dans l'hypothèse de Navier (rigidité des sections) et module de déformation fictif. (C. Bourdon)

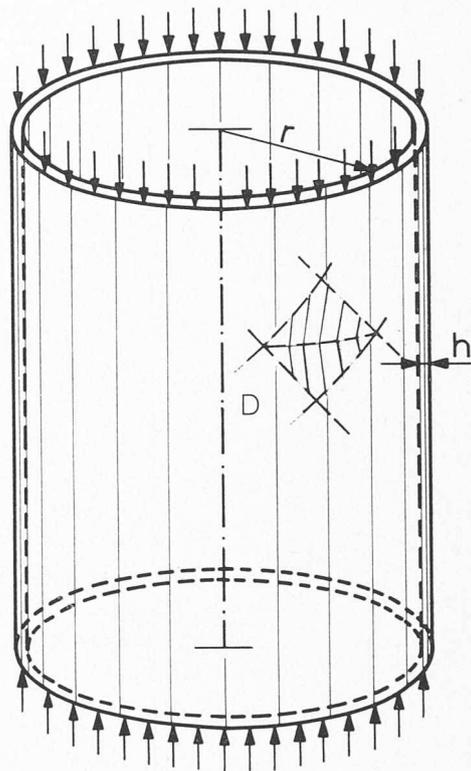


Fig. 18. — Phénomène du cloquage d'une paroi cylindrique mince axialement chargée. Contraintes critiques :

$$\text{Théorie élastique (Timoshenko)} \quad \sigma_{cr} = \frac{Eh}{r\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

$$\text{Théorie élastique corrigée} \quad \sigma_{cr} = \frac{3}{5} \frac{Eh}{r\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

$$\text{Formule pratique pour les matériaux homogènes (Karman-Tsien, etc.)} \quad \sigma_{cr} = \frac{CEh}{r} \quad (\text{avec } C = 0,183, \text{ Karman Tsien})$$

$$\text{Formule pratique de M. C. Bourdon pour le béton armé}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{C' h E}{r} \quad \text{avec } C' = C \sqrt{\frac{mA}{100}}$$

où  $A$  = pourcentage d'acier (cerces) =  $100 \omega/h$

$m$  = coefficient d'équivalence =  $E_a/E_b$

$\omega$  = section des cerces par unité de longueur de génératrice

$h$  = épaisseur de la paroi

Détail D : figure de cloquage

De même que dans la pièce rectiligne, dont la capacité de charge axiale est réduite à cause de la fissuration accompagnant les déformations, de même, dans une coque mince, la fissuration dans une direction quelconque (méridiens ou parallèles) affaiblit considérablement la raideur transversale (effet de ballast) qui assurerait normalement la stabilité des éléments comprimés, et peut entraîner leur flambement (c'est-à-dire le cloquage).

Si les fissures sont traversées par des armatures, c'est alors l'élasticité de ces armatures qui se substitue à celle du béton pour jouer le rôle de ressort et l'on conçoit que la formule de cloquage doive comporter d'une part l'expression de l'épaisseur (ou l'inertie) de la coque dans la direction des efforts de compression, et la section des armatures assurant la continuité de la structure à travers les fissures.

Une bonne image de ce qui se passe est donnée par l'équilibre des douves d'un tonneau chargées suivant la direction du grand axe et maintenues par les cerces.

Dans les cas particuliers envisagés plus haut, les calculs conduisent aux résultats suivants :

Cas du cylindre en béton armé, axialement chargé (fig. 18).

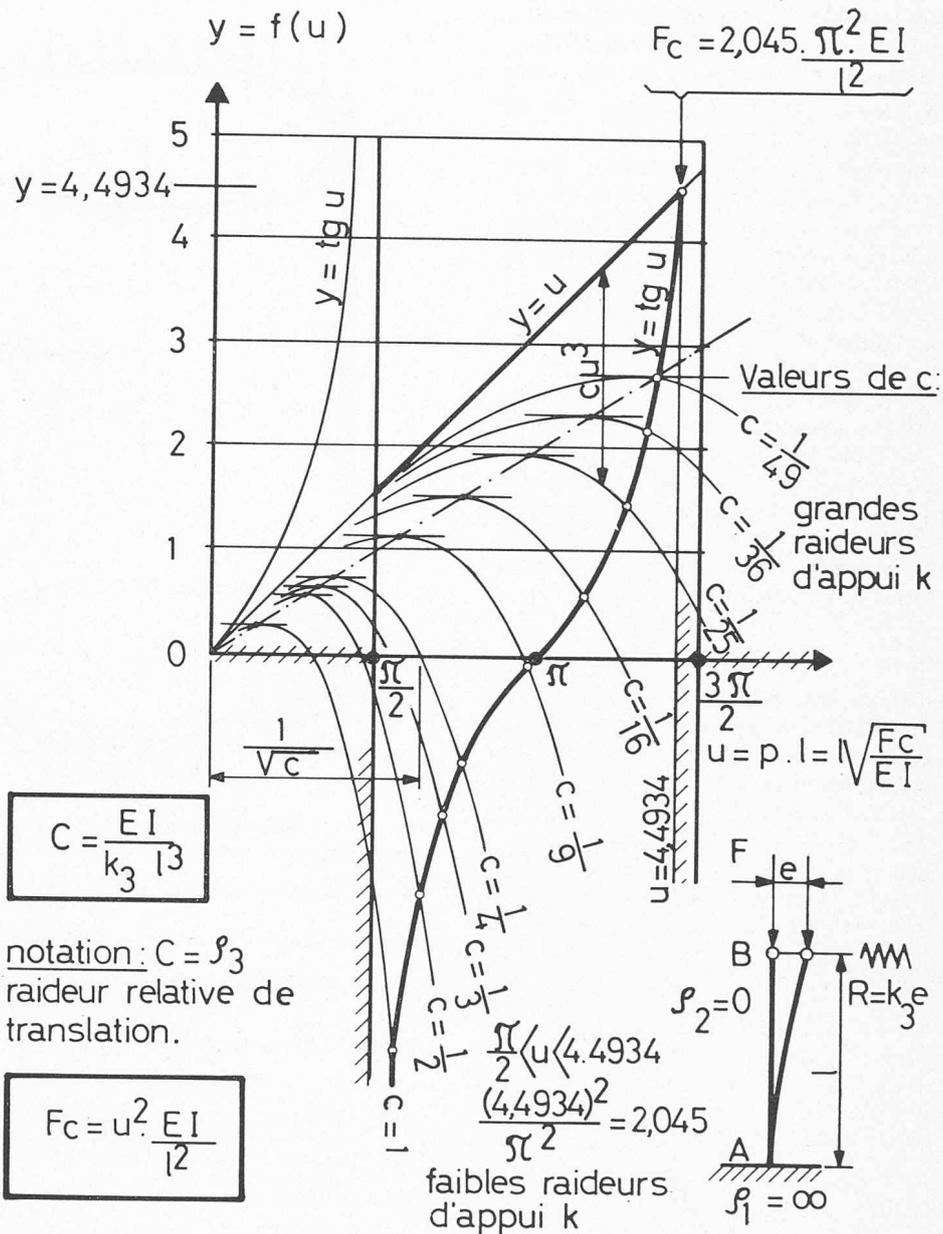


Fig. 19. — Poteaux encastrés en pied ( $\rho_1 = \infty$ ) articulés en tête ( $\rho_2 = 0$ ), et soumis à une réaction élastique horizontale.  
 $\text{tg } u = u - c u^3$

D'après (45), la charge critique est de la forme

$$N'_{cr} = 2 \sqrt{EI k'} \quad (76)$$

avec, pour le cylindre homogène d'épaisseur fictive  $h' \neq h$

$$k' = \frac{h' \cdot E}{r^2 (1 - \nu^2)} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{hE}{r^2 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (77)$$

d'où, compte tenu du terme correctif  $3/5$  de Timoshenko :

$$\sigma'_{cr} = \frac{3}{5} \frac{N'_{cr}}{h} = \frac{3}{5} \frac{Eh}{r \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \cdot \left( \frac{h'}{h} \right)^{1/2} \quad (78)$$

$h'$  est ici l'épaisseur de béton équivalente aux armatures (cerces), soit en appelant :

$\omega$  : la section des cerces par mètre de génératrice ;  
et  $m$  : le coefficient d'équivalence ;

(79)

ou en posant :

$$\frac{\omega}{h} = \frac{A}{100} \quad (80)$$

( $A$  = pourcentage d'armatures horizontales)

$$\sigma'_{cr} = 0,21 \frac{Eh}{r} \cdot \sqrt{\frac{mA}{100}} \quad (81)$$

Théoriquement, selon ce modèle, la paroi pourrait être considérée comme « homogène » si  $\frac{mA}{100} = 1$ , soit  $A \simeq 6,2\%$ .

La formule (81) rejoint la formule de Karman-Tsien lorsque  $\frac{mA}{100} = 0,73$ .

De tels pourcentages ne sont jamais réalisés en pratique et il faut bien en conclure que la formule de Karman-Tsien surestime exagérément la contrainte critique dans le

cas des coques en béton armé, lorsque la fissuration est possible, et qu'elle conduit à des coefficients de sécurité inexacts et illusoire.

Appelons  $\bar{\sigma}_b$  la contrainte maximale admissible dans la coque ;

$\xi$  = coefficient de sécurité.

$$\text{On a : } \bar{\sigma}_b = \frac{0,21 Eh}{\xi \cdot r} \cdot \sqrt{\frac{mA}{100}} \quad (83)$$

$$\text{d'où } \xi = \frac{11\,400}{\bar{\sigma}_b} \cdot \frac{h}{r} \cdot \sqrt{A} \quad (84)$$

Dans le cas du cône, on appliquerait les formules du cylindre tangent de rayon  $R = \frac{r}{\cos \alpha}$

Dans le cas des coques à double courbure, dans toute zone où la fissuration peut se produire (au droit des appuis par exemple), on est encore ramené à une formule telle que :

$$\bar{\sigma}_b = \frac{C'}{\xi} \cdot \frac{Eh}{r} \quad (86)$$

$$\text{où } C' = C \sqrt{\frac{mA}{100}} \quad (87)$$

Pour une coque homogène, on prendra  $\sqrt{\frac{mA}{100}} = 1$ .

Les coefficients  $C$  et  $C'$  dépendent de la forme de la coque et de ses conditions d'appui.

Voir *Cahier des charges des réservoirs et cuves en béton armé*, Annales ITBTP, juillet-août 1966.

Etant donné la grande dispersion des résultats des essais effectués sur les coques homogènes, il faut s'attendre à des variations également importantes des coefficients  $C$  et  $C'$  aussi bien dans les essais qui tiendraient compte de la fissuration, que dans les applications relatives aux ouvrages à construire.

Les considérations ci-dessus guideront les expérimentateurs dans la conception des modèles et l'interprétation des résultats.

D'une façon générale, elles inciteront les projecteurs à être prudents dans l'application des formules toutes faites au cas du béton armé.

En conclusion, nous leur suggérons d'éviter les ouvrages trop souples qui sont bien entendu les plus dangereusement sujets au phénomène de l'instabilité, qu'il s'agisse de simple flambement, de déversement ou de cloquage.

## BIBLIOGRAPHIE

- TIMOSHENKO : *Théorie de la stabilité élastique*.  
 B. BROMS B. and I. M. VIEST : *Long reinforced concrete columns* — A Symposium, Transaction ASCE, V, 126, 1961.  
 J. R. ROBINSON & MODJABI : *La précision des charges de flambement des poteaux en béton armé par la méthode de M. P. Faessel*, Annales ITBTP n° 249, septembre 1968.  
 C. BOURDON : *Remarques pratiques sur le calcul des barrages-voûtes*, Le Génie civil, 15 juillet 1961.  
 C. BOURDON : *Flambement des pieux en milieu élastique — Flambement des enveloppes comiques*, Le Génie civil, mars 1969.

Adresse de l'auteur :

M. Claude Bourdon  
 27, rue Gounod, 92 Saint-Cloud (France)

## Bibliographie

**L'amplificateur opérationnel dans les asservissements**, par Yves Loiselet, chef de section, société Alsthom, Belfort. Paris, Dunod, 1971. — Un volume 16 × 24 cm, VIII + 104 pages, figures.

A ses débuts, l'amplificateur opérationnel était essentiellement utilisé dans les calculateurs, pour la réalisation des opérations mathématiques : somme, différence, dérivation, intégration, etc. Par la suite, son emploi s'est généralisé dans le domaine des mesures et des systèmes asservis.

L'auteur étudie plus spécialement son application aux systèmes asservis, sujet qu'il développe comme suit :

1. Principaux montages utilisés. — 2. Différentes causes d'erreurs dans les principaux montages utilisés. — 3. Caractéristiques et choix d'un amplificateur de régulation. — 4. Principaux montages utilisés en régulation. — 5. Perspectives d'avenir.

*Annexe* : Rappels sur les graphes de fluence.

**La politique de produit. — 240 questions clés de marketing**, par Otto Oscar V. Stritzky, directeur du marketing des produits nouveaux chez Nestlé. Traduit de l'allemand par P. Desolneux (H.E.C.). Paris 1<sup>er</sup> (4, rue Cambon), entreprise moderne d'édition, 1972. — Un volume 21 × 27 cm, 257 pages, figures. Prix : relié, 77 F.

Toutes les directions commerciales se posent la question : comment mieux vendre un produit ?

Qu'il s'agisse d'établir un programme, de définir une stratégie de vente, de choisir une technique appropriée au produit, Otto von Stritzky préconise un plan méthodique et des moyens pratiques d'action.

240 points clés, présentés en check-lists, font de cet ouvrage un instrument de travail très complet, que res-

ponsables des ventes et chefs de produit consulteront souvent.

*Sommaire* :

La planification. — La stratégie. — La tactique. — Mesures opérationnelles.

## Divers

### Décès d'un ingénieur lausannois

Samedi matin 8 juillet est mort paisiblement dans un hôtel de Montreux — où des transformations dans son appartement l'avaient fait provisoirement émigrer — M. Charly Paschoud, ingénieur lausannois bien connu des milieux de l'hydroélectricité.

Né en 1892 à Yverdon, Charly Paschoud avait fait son baccalauréat classique à Lausanne puis ses études d'ingénieur civil à l'Ecole Polytechnique Fédérale à Zurich où il obtint son diplôme en 1914.

Après diverses périodes de mobilisation ainsi que quelques courts séjours en Angleterre, il est engagé au début de 1916 par l'entreprise Rothpletz comme ingénieur de poste au Simplon II, d'abord au portail nord puis au portail sud où sont « exilés » les célibataires.

Au printemps 1917, l'Italie arrête les travaux et le hasard d'une rencontre entre un parent et M. Adrien Palaz lui vaut un engagement à Paris à la Compagnie d'entreprises hydrauliques et de travaux publics qu'il ne quitte plus, passant aux Grands Travaux de Marseille lorsque à la mort de M. Adrien Palaz cette entreprise absorbe la CEHTP.