Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 98 (1972)
Heft: 4

Artikel: Sur le choix d'un mode de calcul en hyperstatique spatiale
Autor: Ansermet, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-71535

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Si les poids des coordonnées mesurées x_i, y_i sont égaux, on réalise la condition : $[\rho\rho]$ = minimum, où les ρ sont les plus courtes distances des 12 points à l'ellipse calculée [4].

Variante. Ici encore, une variante peut être envisagée ; si deux points S et S' peuvent être considérés comme stables, on les choisit comme sommets de faisceaux projectifs.

A l'équation (3) valable pour le faisceau S s'ajoute l'équation (5), revêtant la même forme, avec r' comme birapport.

$$(5) \quad L'_1 + \lambda'_1 L'_2 = 0\,;\; L'_1 + \lambda'_2 L'_2 = 0\,;\; L'_1 + \lambda'_3 L'_2 = 0\,;\; L'_1 + \lambda'_4 L'_2 = 0$$

$$\text{avec la condition } r = r' = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

Pratiquement, on préférera la forme trigonométrique, en fonction des sinus et des variations très petites Δr, $\Delta r'$ revêtant une forme linéaire : $\Delta r = F(\Delta x_i, \Delta y_i)$; $\Delta r' = F'(\Delta x_i, \Delta y_i)$. Il convient, pour faire un choix, de remarquer que les mesures angulaires sont souvent plus précises que les linéaires.

Cas des charpentes

Il est en général moins simple que les précédents, car à un défaut éventuel de stabilité du sous-sol vient s'ajouter une déformation, surtout si la structure est du type dit articulé avec barres surabondantes. Récemment la statistique fut appliquée (voir publication EPUL N° 98), mais son rôle est secondaire. Le problème revêt la voie spatiale avec mesures linéaires (électrotélémétrie) et angulaires, planimétriques et altimétriques. A la base du calcul on a la variation de coordonnées des nœuds comme inconnues, solution dont la supériorité n'est plus discutée.

La forme classique de l'équation à appliquer est (voir [4] :

$$v_i = a_i dx + b_i dy + c_i dz + \ldots + f_i \quad \text{(poids } p_i\text{)} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots$$

Sous forme implicite, on a pour les dérivées de l'énergie :

$$[av] = [bv] = [cv] = \ldots = 0 \qquad (p_i = 1)$$

équations fournissant les éléments pour la matrice de rigidité. Les termes absolus f_i sont obtenus en coupant les barres surabondantes ; la solution est semi-graphique parfois.

Les inconnues ne sont pas toujours indépendantes, par exemple si certains nœuds se déplacent sur des surfaces d'équation connue. Une solution usuelle est celle dite par fractionnement (nach Stufen).

Aux éléments de la première étape : v, dx, dy, dz ... viennent s'ajouter ceux de la seconde : v', (dx), (dy), (dz) ... Sous forme générale on a, les dx, dy, dz ... n'étant plus variables :

$$v + v' = a(dx + (dx)) + b(dy + (dy)) + c(dz + (dz)) + \ldots + f$$

d'où $[vv'] = 0$; $[(v + v')^2] = [vv] + [v'v']$ [4]

les (dx), (dy), (dz) étant liées, sous forme linéaire, par des conditions :

$$F_1((dx), (dy), (dz) \ldots) = 0\,;$$
$$F_2((dx), (dy), (dz) \ldots) = 0.$$

Cette solution, sans élimination de certaines inconnues, a des avantages. On choisira judicieusement les axes de coordonnées pour, autant que possible, éliminer les coefficients de poids non quadratiques.

En *conclusion*, on peut dire que de notables progrès furent réalisés récemment pour déterminer le manque de stabilité et les déformations d'ouvrages d'art ; l'électrotélémétrie joue un rôle ainsi, pour d'importants ouvrages, que la tendance à tenir compte toujours plus de la déviation de la verticale, élément perturbateur nuisant à la précision. En outre, il y a plus d'équations que d'inconnues.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HUG, P. : *Anwendung der elektronischen Distanzmessung* (Revue mensurations, 1970).
[2] ANSERMET, A. : *Compensations en cas de covariance* (Revue mensurations, 1960).
[3] ANSERMET, A. : *Compensations de mesures interdépendantes* (Revue mensurations, 1961).
[4] WOLF, H. : *Ausgleichungsrechnung...* (Dümmlers Verlag).
[5] ANSERMET, A. : *Transformations affine et d'Helmert* (Revue mensurations, 1962).
[6] GLEINSVIK, P. : *Bestimmung von Höhen...* (Verlag Leemann, Zurich).
[7] KOBOLD, F. : *Bestimmung von Deformationen an Bauwerken* (Schweiz. Bauzeitung, 1958).
[8] LINKWITZ : *Theorie elastischer Systeme* (Stuttgart, 1911).

Adresse de l'auteur :
Auguste Ansermet, Les Glycines, 1814 La Tour-de-Peilz.

Sur le choix d'un mode de calcul en hyperstatique spatiale[1]

par A. ANSERMET, ingénieur professeur

Rappel de notions usuelles

La plupart des problèmes se présentant dans le domaine des sciences techniques donnent lieu à plus d'une solution ; mais en général une indépendance complète entre les modes de calcul n'est pas réalisée. On peut faire des comparaisons et attribuer certains avantages à l'une ou l'autre solution. L'hyperstatique des systèmes articulés spatiaux, comme on le sait, fit l'objet de recherches, par des voies différentes aux Ecoles polytechniques de Zurich et Lausanne. Les publications des professeurs Stüssi et Mayor sont considérées toutes deux comme remarquables à des titres divers. La *Baustatik* du premier vient d'être rééditée, ce qui prouve la faveur rencontrée chez les praticiens ; le *Cours* du second est épuisé et ne sera probablement pas réédité. Cette publication présentait un caractère un peu spécial, car un chapitre fut rédigé à l'intention de l'Académie des sciences et pris en considération par celle-ci. Faire un

[1] Texte rédigé en hommage au professeur Dr Fritz Stüssi.

choix pour les praticiens n'est pas facile et c'est un des buts poursuivis ici d'apporter quelques éléments en dehors de ceux développés déjà dans de récentes publications. En outre, l'application du calcul électronique a contribué à l'évolution qui se manifeste depuis quelques années. Mais l'électronique ne se prête pas également bien au calcul de tous les éléments, notamment en ce qui concerne la détermination des termes absolus de certaines équations, pour lesquels la voie semi-graphique présente des avantages.

En hyperstatique des systèmes articulés l'évolution est spectaculaire mais la documentation sur ce problème est plutôt en langue allemande. A cet effet traitons deux cas concrets, l'un très simple et l'autre de caractère plus complexe.

Considérons un pylône à 7 barres et un sommet libre. La solution par les équations d'élasticité est développée à fond dans la *Baustatik*, ce qui rend superflus de longs commentaires. Certains auteurs font remarquer que le déterminant des équations peut prendre des valeurs dangereusement petites [4] [2].

Quant aux inconnues dites hyperstatiques X_i ($i = 1, 2, 3 \ldots$), elles sont exprimées en fonction des termes absolus des équations et des éléments de la matrice dite conjuguée. Il y a d'autres modes de calcul (algorithme de Gauss sous forme modernisée) [1].

Le mérite de Mayor fut, tout en reconnaissant dans certains cas les avantages de la précédente méthode, d'être un précurseur en ce qui concerne la théorie des déformations. Pour le pylône à un sommet libre, on a les valeurs a, b, c (coefficients des inconnues) ainsi que les

$i=$	a	b	c	p	P	
1	+ 0,211	+ 0,788	+ 0,577	1	2,2	poids p (a priori) et
2	+ 0,577	− 0,577	+ 0,577	1	2,2	P (a posteriori)
3	− 0,788	− 0,211	+ 0,577	1	2,2	avec la matrice de rigidité
4	+ 0,490	+ 0,653	+ 0,577	0,9	2,2	
5	+ 0,653	− 0,490	+ 0,577	0,9	2,2	$\begin{bmatrix} 2{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}2 \end{bmatrix}$ somme
6	− 0,490	− 0,653	+ 0,577	0,9	2,2	
7	− 0,653	+ 0,490	+ 0,577	0,9	2,2	$p/P = 3$

Sous forme générale : $v = aDx + bDy + cDz$ (sans coupures)

(7 équations) $v = adx + bdy + cdz + f$ (avec coupures)

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Pratiquement les a, b, c sont les mêmes dans les deux cas. Les inconnues sont les variations de coordonnées des nœuds, tandis que les v sont les variations de longueurs des barres. Avant de rendre minimum la somme des pvv, attribuons-lui une valeur *constante* ; sans calcul on reconnaît un ellipsoïde (ici une sphère). Le centre de cette surface s'obtient en formant trois dérivations partielles qui sont les dérivées de l'énergie. Pour plus d'un nœud libre, c'est moins simple.

Les p sont inverses des modules m des barres ; $v = mS$ (S stabkraft) ou, plus exactement, proportionnels à ces inverses.

Certains staticiens sont embarrassés pour choisir entre les solutions avec ou sans coupures des barres surabondantes. C'est la première étape, fondamentale. S'adressant à l'Académie des sciences, Mayor a voulu être un précurseur. Déjà Gauss opérait des coupures et faisait varier les coordonnées des nœuds dans ses réseaux géodésiques à côtés surabondants. Mais la solution sans coupures n'est pas applicable dans ces réseaux. Les staticiens sont à tous égards avantagés, notamment pour la formation des poids p. A titre de contrôle, ils peuvent faire le calcul à double (avec ou sans coupures). En outre, théoriquement, dans le cas du pylône, il y a $\frac{7.6.5.4.}{4!} = 35$ façons de choisir les barres surabondantes, aussi pour la solution Stüssi.

Pour mémoire, rappelons que dans la publication N° 80 EPUL, une solution développée notamment par Jacobi consiste à écrire les sept équations en les groupant par trois, ce qui fournit $\frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$ groupes avec des v nuls. Pour chaque inconnue on obtient 35 valeurs qui sont compensées par voie de moyenne pondérée. A part des cas spéciaux, cette solution est peu appliquée. Quant à la théorie de l'équivalence, elle est exposée dans cette même publication N° 80.

Ces notions élémentaires étant rappelées, considérons un cas concret de caractère moins didactique, mais ce serait une lacune de ne pas résumer ce qui précède en soumettant à nouveau au lecteur, sous sa forme originale de préférence, le théorème de Friedrich : « Im 3 dimensionalen Raum stimmen der einknotige statisch beliebig unbestimmte Stabverband und der zugehörige überbestimmte Kugelschnitt völlig überein ».

Il faut, bien entendu, réaliser une concordance en ce qui concerne les poids respectifs des barres et des côtés mesurés. Pour K. Friedrich, les ellipsoïdes de déformation (Formänderungsellipsoïd) et d'erreur ne font qu'un au point de vue de leur détermination. Le calcul des uns et des autres est toujours plus courant dans la pratique ; ils ont un rôle fondamental à jouer aussi bien en hyperstatique qu'en électrotélémétrie.

Traitons maintenant ce cas moins simple.

Coupole Schwedler. Des barres surabondantes furent ajoutées.

Structure : 5 nœuds 11, 12, ... 15 sont fixes et 10 nœuds 1, 2, ... 10 sont libres. Il y a en tout 40 barres et 30 variations de coordonnées inconnues.

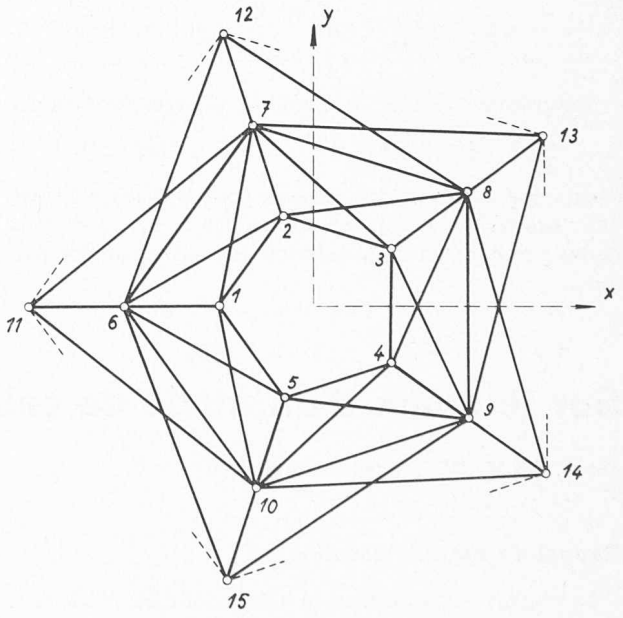

Fig. 3

Choix des axes de coordonnées

Il joue ici un rôle ; l'origine pourrait coïncider avec un nœud. Confrontons maintenant les solutions Stüssi et

[2] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

Nœuds	x	y	z	Nœuds	x	y	z	Nœuds fixes	x	y	z	unité de mesure arbitraire
1	−0,62	0	+1,84	6	−1,31	0	+0,92	11	−2,00	0	0	
2	−0,19	+0,59	+1,84	7	−0,405	+1,245	+0,92	12	−0,62	+1,90	0	
3	+0,50	+0,365	+1,84	8	+1,06	+0,772	+0,92	13	+1,62	+1,18	0	
4	+0,50	−0,365	+1,84	9	+1,06	−0,772	+0,92	14	+1,62	−1,18	0	
5	−0,19	−0,59	+1,84	10	−0,405	−1,245	+0,92	15	−0,62	−1,90	0	

Mayor. Avec la première on a seulement 10 équations d'élasticité, ce qui, à certains égards, est avantageux.

Pour réaliser le système fondamental (Grundsystem), 10 contre-diagonales peuvent être coupées. Ce cas est simple.

La solution par la variation de coordonnées des nœuds (avec ou sans coupures) comporte pour les 40 barres un nombre de 40 équations aux déformations ou aux liaisons (Verknüpfungsgleichungen (voir [5]). En électrotélémétrie on dit aussi équations correctrices (Verbesserungsgleichungen). Il y a 10 équations surabondantes ; théoriquement c'est un problème complexe qui donna lieu à de nombreuses publications. On sait comment Mayor tourna la difficulté sans former de dérivées partielles de l'énergie. Il envisagea en outre le cas où des nœuds sont astreints à se déplacer sur des surfaces. En ce qui concerne les poids p (a priori) des barres et P (a posteriori) on a avant tout calcul : somme $p/P = 30$, donc en moyenne $p/P = 3/4 = 0{,}75$. Les poids sont amplifiés $4/3 = 1{,}33$ fois grâce aux barres surabondantes (moyenne). Les autres éléments du calcul sont connus. Quant au choix des solutions, il n'est pas facile. Dans la publication EPUL N° 104, l'auteur a montré que le mode de calcul de Mayor se prêtait bien à l'application de l'électronique ; si on fait des coupures, c'est moins le cas ce que cet auteur aura remarqué.

Quant à la détermination des ellipsoïdes de déformation de certains nœuds, elle est devenue familière dans de nombreuses écoles polytechniques notamment. Renoncer à ce calcul est dangereux.

En conclusion, on peut dire que ce problème est vaste ; les cours des professeurs Stüssi et Mayor, remarquables, considérés séparément, ne suffisent pas, car il faut les grouper. Il y a encore de grandes possibilités de recherches pour un candidat au Prix Mayor institué à Lausanne. Ce problème donna lieu à des conflits de priorité, auxquels il fut mis un terme dans de récentes publications de l'EPUL.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Stüssi, F. : *Baustatik I, II* (Birkhäuser, Basel).
[2] Mayor, B. : *Cours de statique spatiale* (épuisé).
[3] Dupuis, G. : Publication EPUL N° 104 (Payot, Lausanne).
[4] Salles, F. : *Initiation à la théorie de l'énergie élastique* (Dunod, Paris).
[5] Wolf, H. : *Ausgleichungsrechnung* (Dümmler Verlag).
[6] Linkwitz, K. : *Cours de statique* (Stuttgart).

Adresse de l'auteur :
Auguste Ansermet, Les Glycines, 1814 La Tour-de-Peilz.

Bibliographie

Ouvrages divers

Collection « Bauingenieur-Praxis ». Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München.

— *Heft 10 :* **Momentenausgleichs-Verfahren,** par Dr.-Ing. *M. Schineis*. 1968. — Un volume 15×21 cm, VIII + 463 pages, 448 figures, 55 tableaux.

— *Heft 13 :* **Prismatische Faltwerke und Schalen,** par Dipl.-Ing. *Erich Schmid* et Dipl.-Ing. *Reiner Kuhn*. 1968. — Un volume 15×21 cm, X + 150 pages, 149 figures, tableaux. Prix : broché, 28.20 DM.

— *Heft 15 :* **Biegungssteife Rotationsschalen,** par Dipl.-Ing. *Peter Starke*. 1968. — Un volume 15×21 cm, VIII + 119 pages, 82 figures, 28 tableaux. Prix : broché, 23.60 DM.

— *Heft 39 :* **Torsion und Vorspannung bei gekrümmten Balken,** par Dipl.-Ing. Dr. techn. *Harald Egger*. 1968. — Un volume 15×21 cm, VIII + 63 pages, 33 figures, 3 tableaux. Prix : broché, 15.80 DM.

— *Heft 45 :* **Verbundträger im Hochbau,** par Prof. Dipl.-Ing. *W. Wrycza*. 1968. — Un volume 15×21 cm, VIII + 77 pages, 70 figures, tableaux. Prix : broché, 16.60 DM.

— *Heft 75 :* **Schwingungs- und Stabilitätsuntersuchungen von Türmen und ähnlichen Bauwerken mit Hilfe der Matrizenrechnung,** par Dipl.-Ing. *Ludwig Schneider*. 1968. — Un volume 15×21 cm, VII+56 pages, 8 figures. Prix : broché, 14.20 DM.

— *Heft 103 :* **Neuzeitliche Methoden der Fertigungsregelung (Netzplantechnik),** par Dipl.-Ing. *Ernst Joachim Scheel*. 1968. — Un volume 15×21 cm, VII + 124 pages, 141 figures, 22 tableaux. Prix : broché, 25.80 DM.

A mathematical model for handling in a warehouse, par *E. Kay*. Oxford, Pergamon Press, 1968. — Un volume 14×20 cm, IX + 80 pages, figures. Prix : relié, 21 sh.

Advanced engineering thermodynamics, par *Rowland S. Benson*, professor of Mechanical Engineering, University of Manchester Institute of Science and Technology. Oxford, Pergamon Press, 1967. — Un volume 13×20 cm, XI + 356 pages, figures. Prix : relié, 40 sh.

Elements of elasticity, par *D. S. Dugdale*, B.Sc., Ph. D., Mechanical Engineering Dept., University of Sheffield. Oxford, Pergamon Press, 1968. — Un volume 13×20 cm, XI + 144 pages, figures. Prix : relié, 25 sh.

Heating and hot water services in buildings, par *David Kut*, B.Sc. (Eng.), M.I.H.V.E., C.Eng., M.I.Mech.E., A.M. Inst.F., M.Cons.E. Oxford, Pergamon Press, 1968. — Un volume 15×23 cm, XI + 425 pages, figures.

Kolbenverdichter, Einführung in Arbeitsweise, Bau und Betrieb von Luft- und Gasverdichtern mit Kolbenbewegung, par *Bouché/Wintterlin*. 4e édition, revue et augmentée, par *Karl Wintterlin*. Berlin, Springer-Verlag, 1968. — Un volume 17×25 cm, VIII + 194 pages, 175 figures. Prix : broché, 33 DM.

Pratique de la direction participative, par *Jean Diverrez*. Paris 1er (4, rue Cambon), Entreprise Moderne d'Edition, 1971. — Un volume 16×25 cm, 270 pages. Prix : relié, 48 F.

La participation n'est pas une mode, mais un besoin né des transformations profondes qui s'opèrent dans le monde du travail, sur le plan des structures, de la technologie et des hommes. Les récents événements de mai 68 ont