

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 100 (1974)  
**Heft:** 8

**Artikel:** Principe et applications de la transformation de Fourier rapide  
**Autor:** Kunt, M. / Coulon, F. de  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-72100>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 22.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Principe et applications de la transformation de Fourier rapide

par M. KUNT et F. DE COULON, Laboratoire de traitement des signaux, EPFL

## 1. Introduction

La transformation de Fourier est un outil mathématique d'un usage très répandu dans de nombreux domaines de la science et de la technique moderne [1]. De toutes les transformations linéaires, c'est probablement celle qui possède la signification physique la plus directe puisqu'elle conduit en particulier à la notion combien précieuse de spectre fréquentiel [2].

Ce concept, depuis longtemps familier des physiciens et surtout des électriciens qui l'utilisent en théorie des signaux [3] et dans l'étude des systèmes de transmissions, a vu son emploi se généraliser dans de nombreux autres domaines tels que l'étude des structures soumises à des vibrations, la mécanique des turbulences, l'acoustique, le génie biomédical, la géophysique, l'économie, etc.

Ce succès doit beaucoup à l'utilisation généralisée des méthodes de calcul numérique sur ordinateur. Le principe de l'approximation discrète de la transformation de Fourier et l'existence d'un algorithme de calcul particulièrement avantageux sont maintenant connus de la plupart des utilisateurs potentiels. Des articles d'introduction sur ce sujet ont en effet été publiés depuis plusieurs années déjà dans certains journaux spécialisés [4].

Il apparaît par contre que peu d'utilisateurs sont réellement conscients des précautions qu'il leur est indispensable de prendre, lorsqu'ils recourent à ces méthodes, afin de limiter les erreurs d'estimation. Celles-ci, de nature parfois très subtile, sont dues pour l'essentiel à la nature discrète des représentations utilisées, tant pour les signaux ou données analysés que pour les transformées calculées, ainsi qu'au nombre nécessairement limité d'échantillons (données) à disposition. Le caractère stochastique des estimations obtenues lors de l'analyse de phénomènes aléatoires doit également être souligné.

L'objet de la présente étude est de fournir, après quelques rappels sur les principes d'application des méthodes numériques à la transformation de Fourier, une vue d'ensemble sur les possibilités et les règles d'utilisation de la transformation de Fourier rapide.

La transformation de Fourier rapide, en abrégé TFR (en anglais « Fast Fourier Transform » ou FFT) est un algorithme de calcul permettant une estimation rapide sur ordinateur de la transformation de Fourier. Proposé en 1965 par Cooley et Tukey [5], cet algorithme s'est révélé être un outil très puissant, particulièrement avantageux pour le calcul en temps réel. Il a permis la réalisation de calculateurs spécialisés fonctionnant principalement comme analyseur de spectre ou corrélateur. En effet, la TFR offre également un moyen d'évaluation efficace de l'interdépendance entre deux variables dont le comportement est de nature aléatoire. Cette analyse de corrélation est un outil de grand intérêt dans de nombreux domaines.

## 2. Transformation de Fourier discrète

La transformation de Fourier discrète (TFD) se déduit facilement de la transformation intégrale de Fourier. Son expression mathématique dépend du type de fonction considéré : de carré sommable \*, périodique ou aléatoire.

### 2.1 Fonction de carré sommable

La transformée de Fourier d'une fonction  $x(t)$  de carré sommable peut s'écrire sous la forme suivante :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2-1)$$

La transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2-2)$$

Si la fonction  $x(t)$  est échantillonnée périodiquement, en des instants  $t_k$ , avec une période d'échantillonnage  $\Delta t$ , la transformée de Fourier (2-1) est remplacée par la transformée de Fourier discrète.

$$X(f_n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t_k) e^{-j2\pi f_n t_k} \Delta t \quad (2-3)$$

avec  $n = -\infty, \dots, +\infty$  et  $t_k = k \cdot \Delta t$ .

La transformée inverse est alors donnée par :

$$x(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f_n) e^{j2\pi f_n t_k} \Delta f \quad (2-4)$$

avec  $k = -\infty, \dots, +\infty$  et  $f_n = n \Delta f$ .

La période d'échantillonnage  $\Delta t$  (ou  $\Delta f$ ) doit satisfaire à certaines conditions qui sont rappelées au paragraphe 5. D'autre part, l'expression théorique de la TFD nécessite une sommation sur une infinité de termes. Dans un calcul pratique sur ordinateur, on ne peut faire intervenir qu'un nombre fini  $N$  d'échantillons. Il en résulte une erreur d'estimation des formules (2-3) et (2-4). Cette erreur sera brièvement étudiée au paragraphe 5. Une étude plus détaillée peut être trouvée dans la référence [2].

\* Une fonction  $x(t)$  est dite « de carré sommable » si  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ . Une telle condition est toujours satisfaite pour les signaux physiquement réalisables (énergie finie).

Lorsqu'un nombre fini  $N$  d'échantillons  $x(t_k)$  est prélevé sur la fonction  $x(t)$  pendant une durée  $T$  (avec  $T = N \cdot \Delta t$ ), on obtient pour (2-3) et (2-4) les expressions approchées suivantes :

$$\hat{X}(f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) e^{-j2\pi f_n t_k} \Delta t \quad (2-5)$$

avec  $n = 0, \dots, N-1$

et

$$\hat{x}(t_k) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{X}(f_n) e^{j2\pi f_n t_k} \Delta f \quad (2-6)$$

avec  $k = 0, \dots, N-1$ .

## 2.2 Fonctions périodiques

Si  $x(t)$  est une fonction périodique, de période  $T$ , elle peut se mettre sous la forme d'une série de Fourier complexe :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi f_n t} \quad (2-7)$$

Les coefficients  $X_n$  sont donnés par

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \quad (2-8)$$

avec  $f_n = n \Delta f$  et  $\Delta f = \frac{1}{T}$

Lorsqu'un nombre fini  $N$  d'échantillons de  $x(t)$  est prélevé sur une période  $T$ , l'expression approchée du coefficient  $X_n$  est donnée par :

$$\hat{X}_n = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) e^{-j2\pi f_n t_k} \Delta t \quad (2-9)$$

avec  $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$  et  $t_k = k \Delta t$ .

Avec  $T = N \cdot \Delta t$ , on obtient finalement :

$$\hat{X}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) e^{-j2\pi f_n t_k} \quad (2-10)$$

avec  $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ .

Inversement, les valeurs approximatives de la fonction  $x(t)$  aux instants  $t_k$  sont données par :

$$\hat{x}(t_k) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{X}_n e^{j2\pi f_n t_k} \quad (2-11)$$

avec  $k = 0, \dots, N-1$ .

## 2.3 Fonctions aléatoires

On ne considérera dans ce qui suit que des processus aléatoires stationnaires et ergodiques\*. Soit  $x(t)$  une

\* D'une manière générale, un processus aléatoire est dit stationnaire lorsque toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps. Un processus aléatoire est dit ergodique lorsque ses moyennes statistiques sont égales aux moyennes temporelles.

fonction aléatoire d'un tel processus. En général, cette fonction ne possède pas de transformée de Fourier, car les conditions d'existence de l'intégrale (2-1) ne sont pas satisfaites.

Considérons cependant une nouvelle fonction  $x_T(t)$  définie de la manière suivante :

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

Ainsi définie, la fonction  $x_T(t)$  possède une transformée de Fourier  $X_T(f)$ .

$$\begin{aligned} X_T(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned} \quad (2-12)$$

La densité spectrale de puissance de  $x_T(t)$  est donnée par :

$$S_T(f) = \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \quad (2-13)$$

La fonction aléatoire  $x(t)$  doit être considérée comme un membre d'un ensemble de fonctions possédant les mêmes propriétés statistiques.

On définit alors la densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire comme la limite pour  $T \rightarrow \infty$  de la moyenne statistique (espérance mathématique) de  $S_T(f)$  :

$$\Phi(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E[S_T(f)] \quad (2-14)$$

On peut montrer que cette définition est conforme au théorème de Wiener-Kinchine qui indique que la densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

Dans le cas où  $N$  échantillons sont prélevés sur la fonction  $x_T(t)$ , la relation (2-13) prend la forme suivante :

$$S_T(f_n) = \frac{1}{T} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_T(t_k) e^{-j2\pi f_n t_k} \Delta t \right|^2 \quad (2-15)$$

avec  $n = -\infty, \dots, +\infty$  et  $f_n = n \Delta f$ .

Finalement, sachant que  $T = N \cdot \Delta t$ , on obtient :

$$S_T(f_n) = \frac{\Delta t}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_T(t_k) e^{-j2\pi f_n t_k} \right|^2 \quad (2-16)$$

avec  $n = 0, \dots, N-1$ .

## 3. Méthodes de calcul sur ordinateur

### 3.1 Remarques préliminaires

L'évaluation numérique des expressions (2-5), (2-6), (2-9) et (2-16) fait intervenir une somme du type :

$$\beta(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k) e^{-j2\pi f_n t_k} \quad (3-1)$$

avec  $n = 0, \dots, N-1$  et  $\alpha(k) = x(t_k)$ .

Considérons une fonction  $x(t)$  échantillonnée en  $N$  instants  $t_k$  pendant la durée  $T$  (voir fig. 1).

Posons  $t_k = k \cdot \Delta t$  et  $f_n = n \Delta f$ .

Les fréquences discrètes  $f_n$  sont appelées fréquences harmoniques.

Avec  $\Delta t = \frac{T}{N}$  et  $\Delta f = \frac{1}{T}$ , la relation (3-1) peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\beta(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (3-2)$$

avec  $n = 0, \dots, N-1$ .

Introduisons d'autre part la notation  $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  afin de pouvoir simplifier l'écriture.

Les deux propriétés importantes de  $W$  sont :

- 1)  $W^{(x+y)} = W^x \cdot W^y$
- 2)  $W^{m \cdot N} = 1$  si  $m$  est entier.

Cette dernière propriété permet d'établir l'égalité suivante :

$$W^{nk} = W^{nk \bmod N} \quad (3-3)$$

où  $a = b \bmod N$  est le reste de la division de  $b$  par  $N$ .

La fonction  $W^{nk}$  est donc une fonction périodique, de période  $N$  de la variable à valeur entière  $m = nk$ .

A l'aide de la notation matricielle, on peut mettre la relation (3-2) sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \beta(0) \\ \beta(1) \\ \vdots \\ \beta(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W^0 & W^{N-1} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(N-1) \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

où  $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

La matrice carrée intervenant dans cette relation est appelée matrice de transformation de Fourier  $F_N$ .

### 3.2 Méthode classique

L'évaluation sur ordinateur d'un produit matriciel tel que celui donné par la relation (3-4) fait intervenir  $N^2$  opérations élémentaires composées d'une multiplication suivie d'une addition. C'est la méthode dite «classique». Le temps de calcul sur ordinateur est proportionnel au nombre d'opérations. Pour de grandes valeurs de  $N$ , l'évaluation de la relation (3-4) par cette méthode nécessite un temps de calcul prohibitif.

### 3.3 Transformation de Fourier rapide (TFR)

L'étude de la matrice de transformation  $F_N$  révèle une redondance structurée des éléments et des symétries particulières dues en particulier à la périodicité de la fonction  $W^{nk}$  illustrée par la relation (3-3). L'algorithme de la TFR permet, en tenant compte de ces structures, de réduire considérablement le nombre d'opérations et par conséquent le temps de calcul [6].

Si le nombre d'échantillons  $N$  peut être décomposé en un produit d'un grand nombre d'entiers  $N_i$  tel que :

$$N = \prod_{i=1}^n N_i$$

la réduction du nombre d'opérations devient très importante. On peut montrer que l'efficacité atteint son maximum lorsque  $N$  est une puissance de 3. Toutefois, pour des

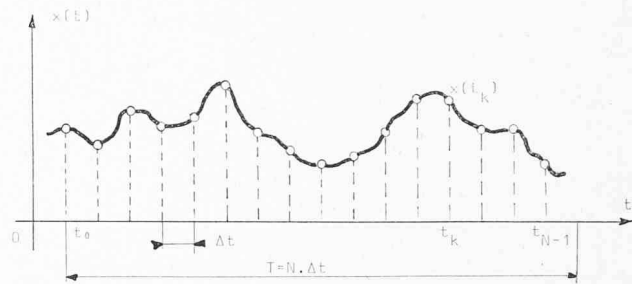


Fig. 1. — Echantillonnage d'une fonction  $x(t)$ .

raisons de simplicité de programmation, on préfère choisir  $N$  comme étant une puissance de 2. Ce choix ne réduit l'efficacité de l'algorithme que d'une manière négligeable. Dans le cas où  $N$  est une puissance de 2, par exemple  $N = 2^n$ , la matrice de transformation peut être décomposée en un produit de  $n$  matrices  $F_i$ , chacune d'ordre  $N \times N$ , ne comportant que deux éléments non nuls par ligne.

Le nombre d'opérations élémentaires nécessaire pour multiplier un vecteur à  $N$  composantes par une telle matrice  $F_i$  est  $2N$ . Pour  $n$  produit de ce type, il faut donc  $2Nn = 2N \log_2 N$  opérations. L'efficacité de l'algorithme de la TFR par rapport à la méthode classique peut être mesuré par le rapport des nombres d'opérations nécessaires dans les deux méthodes. Par exemple, pour  $N = 1024$ , la TFR nécessite environ 50 fois moins d'opérations que la méthode classique. Le détail du développement mathématique de cet algorithme peut être trouvé dans la référence [5].

## 4. Applications

Les principales applications de la transformation de Fourier discrète consistent essentiellement en l'estimation numérique des relations fonctionnelles suivantes :

- a) spectres fréquentiels,
- b) produit de convolution,
- c) fonction de corrélation.

Une autre application, moins connue mais tout aussi importante, est l'interpolation de fonctions échantillonnées.

Lors de l'utilisation de la TFR pour ces applications, on doit garder présent à l'esprit le point important suivant : la fonction à analyser est échantillonnée périodiquement avec une période  $\Delta t$  pendant une durée  $T$ . A partir de ces

$N = \frac{T}{\Delta t}$  échantillons ainsi obtenus, les méthodes de calcul numérique (la méthode classique ou TFR) fournissent  $N$  valeurs de la transformée de Fourier calculées aux fréquences harmoniques  $f_n$ . Ces fréquences sont réparties périodiquement dans le domaine fréquentiel avec une période  $\frac{1}{T}$ .

On observe donc que tant la fonction initiale que sa transformée de Fourier sont représentées numériquement par une suite périodique d'échantillons.

Examinons brièvement l'effet d'un tel échantillonnage sur la transformée de Fourier  $\Psi(v)$  (directe ou inverse) d'une fonction continue  $\psi(u)$ .

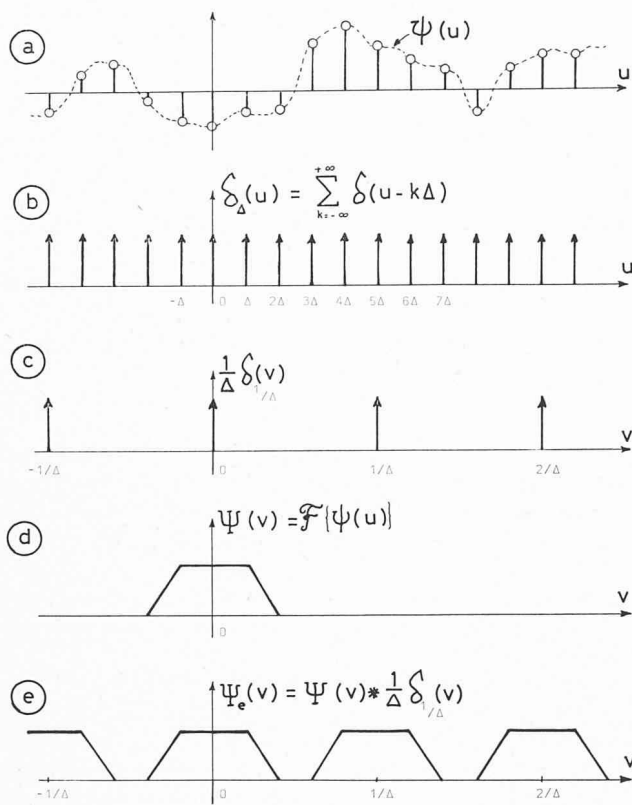


Fig. 2. — Effet de l'échantillonnage périodique sur la transformée d'une fonction continue.

D'une manière générale, on peut représenter une fonction échantillonnée  $\psi_e(u)$  par une suite de masses ponctuelles (fig. 2 a). Celle-ci peut être considérée théoriquement comme une modulation d'un train périodique d'impulsions (ou distribution) de Dirac (fig. 2 b) :

$$\psi_e(u) = \psi(u) \cdot \delta_\Delta(u) = \psi(u) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k\Delta) \quad (4-1)$$

Or on sait que la transformée de Fourier d'un produit de deux fonctions est égale au produit de convolution des transformées respectives. De plus, on peut montrer que la transformée du train d'impulsions  $\delta_\Delta(u)$  est également un train d'impulsions de Dirac (fig. 2 c) :

$$\mathcal{F}\{\delta_\Delta(u)\} = \frac{1}{\Delta} \delta_{1/\Delta}(v) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{\Delta}\right) \quad (4-2)$$

La transformée de Fourier de la fonction échantillonnée  $\psi_e(u)$  est ainsi donnée par :

$$\Psi_e(v) = \Psi(v) * \frac{1}{\Delta} \delta_{1/\Delta}(v) \quad (4-3)$$

En tenant compte de la propriété de convolution (ou de translation) de l'impulsion de Dirac

$$\gamma(v) * \delta(v-a) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\alpha) \delta(v-a-\alpha) d\alpha = \gamma(v-a) \quad (4-4)$$

on voit immédiatement que  $\Psi_e(v)$  est une fonction obtenue par la répétition périodique, de période égale à l'inverse de la période d'échantillonnage  $\Delta$ , de la transformée de Fourier de la fonction continue (fig. 2 d et 2 e).

On doit tirer de cette observation les conclusions suivantes :

1° La cadence d'échantillonnage d'une fonction continue doit être suffisante afin de permettre une estimation de sa transformée de Fourier sans erreurs de recouvrement dues à la présence de spectres secondaires.

2° La transformation de Fourier discrète (TFD) impliquant l'échantillonnage périodique de la transformée de Fourier de la fonction initiale, celle-ci est considérée à son tour comme périodique de période  $T$ . La non-observation de ce phénomène peut conduire à des erreurs graves dans l'estimation de produits de convolution ou de fonctions de corrélation.

#### 4.1 Spectres fréquentiels

##### a) Cas des signaux à énergie finie

Les signaux à énergie finie (représentée par des fonctions de carré sommable) possèdent des spectres continus, ou densités spectrales. Toutefois, les méthodes numériques envisagées considèrent la suite finie d'échantillons prélevés sur le signal comme périodique. Le spectre calculé apparaît ainsi comme un spectre de raies dont l'enveloppe est la densité spectrale recherchée. La qualité de l'estimation, c'est-à-dire essentiellement la résolution, est en général proportionnelle à la durée d'observation  $T$  du signal qui doit être supérieure à sa durée effective.

Les spectres d'amplitude  $|X(f)|$ , de phase  $\theta(f) = \arg X(f)$  et d'énergie  $\Phi_x(f) = |X(f)|^2$  se déduisent facilement des coefficients  $\hat{X}(f_n)$  donnés par l'expression (2-5).

##### b) Cas des signaux périodiques

Les spectres de signaux périodiques sont des spectres de raies. Ils peuvent être calculés numériquement avec grande précision si la période  $T_x$  du signal est connue. Dans ce cas, les échantillons doivent être prélevés sur une durée correspondant *exactement* à une (éventuellement plusieurs) période.

Au cas où cette période n'est pas connue a priori, la durée d'observation  $T$  du signal doit être grande vis-à-vis de la période  $T_x$  présumée.

Les estimations des spectres d'amplitude, de phase et de puissance du signal considéré sont obtenues à partir de la relation (2-10).

##### c) Cas des signaux aléatoires

La densité spectrale de puissance  $\Phi_x(f)$  d'un signal  $x(t)$  peut être estimée (voir paragraphe 2.3) à partir d'une suite de  $N$  échantillons  $x(t_k)$  à l'aide de la relation (2-16) qui est reproduite ci-dessous :

$$S_T(f_n) = \frac{\Delta t}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) e^{-j2\pi f_n t_k} \right|^2$$

avec  $n = 0, \dots, N-1$ .

La suite  $\{S_T(f_n)\}$  est appelée estimateur spectral. Théoriquement, la densité spectrale de puissance  $\Phi_x(f)$  est définie (cf. relation 2-14) comme la limite pour  $T \rightarrow \infty$  de l'espérance mathématique de l'estimateur spectral  $\{S_T(f_n)\}$ .

Dans le cas de signaux supposés ergodiques, on peut remplacer cette espérance mathématique (moyenne d'ensemble) par une moyenne « temporelle ». A cet effet, on subdivise l'intervalle d'observation de durée  $T$ , en  $k$  sous-intervalles chacun de durée  $T_o < T$ . A chaque sous-intervalle  $i$ , on associe une fonction « fenêtre »  $z_i(t)$  définie de la manière suivante :

$$z_i(t) = \begin{cases} 1 & t_i < t < t_i + T_o \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

Pour chacun de ces sous-intervalles, une expression du type (2-13) est calculée à partir de la fonction  $x_i(t)$  qui est donnée par :

$$x_i(t) = x(t) \cdot z_i(t)$$

L'espérance mathématique intervenant dans la relation (2-14) est alors approximée par :

$$\bar{S}(f) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i(f) \quad (4-5)$$

avec  $S_i(f) = \frac{1}{T_o} |X(f)|^2$

$\bar{S}(f)$  est appelé « estimateur spectral adouci ». On peut montrer [2] que cet estimateur peut être obtenu à partir de  $S_T(f)$  à l'aide du produit de convolution suivant :

$$\bar{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_T(g) \Phi_z(f-g) dg$$

où  $\Phi_z(f)$ , appelée « fenêtre spectrale », est la « densité spectrale d'énergie » de la fonction  $z_i(t)$  qui est égale à  $T_o^2 \text{sinc}^2(fT_o)$  \*. Elle a pour effet d'adoucir (lisser) l'estimateur  $S_T(f)$ . La version discrétisée de l'estimateur adouci est donnée par :

$$\bar{S}(f_n) = T_o^2 \sum_{k=0}^{N-1} S_T(f_k) \text{sinc}^2 T_o [(f_n - f_k)] \Delta f \quad (4-6)$$

avec  $n, k = 0, \dots, N-1$

où  $N$  est le nombre d'échantillons prélevés sur la fenêtre  $\Phi_z(f)$ .

D'autres fenêtres spectrales ont également été proposées [2]. Il apparaît toutefois que ce n'est pas tant leurs formes que leur largeur équivalente, elle-même proportionnelle à  $\frac{1}{T_o}$ , qui détermine la qualité de l'estimation.

#### 4.2 Produit de convolution

La convolution de deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  (dont l'un au moins est à énergie finie) est définie par :

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (4-7)$$

On sait que la transformée de Fourier d'une convolution de deux signaux est égale au produit des transformées respectives :

\* Par définition :  $\text{sinc}(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$

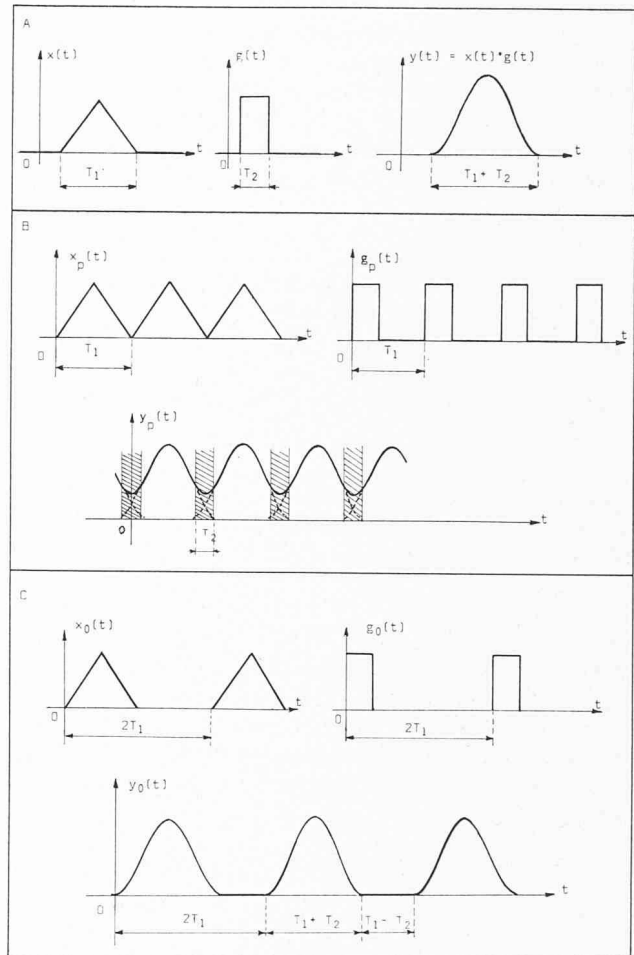


Fig. 3. — Produit de convolution :

- A. Théorique
- B. Périodique avec superposition
- C. Périodique sans superposition

$$Y(f) = X(f) \cdot G(f) \quad (4-8)$$

On peut donc déterminer une estimation de  $y(t)$  à l'aide de la relation (4-8), en utilisant la transformée de Fourier discrète :

$$\{\hat{y}(t_k)\} = \mathcal{F}^{-1} \{ \hat{X}(f_n) \hat{G}(f_n) \} \quad (4-9)$$

avec  $k, n = 0, \dots, N-1$ .

Etant donné que lors d'un calcul numérique par la TFR, la suite d'échantillons prélevés sur le signal est considérée comme périodique, le résultat du calcul du produit de convolution donné par la relation (4-9) est une fonction périodique. Ce résultat peut donc être faussé par un effet de superposition lorsque les deux fonctions convoluées sont du type impulsionnelles. Ceci est illustré sur la figure 3. Pour éviter cet inconvénient, on construit de nouvelles fonctions en ajoutant une série de zéros aux fonctions initiales. Par exemple, à partir de  $x(t)$ , on construira une nouvelle fonction  $x_o(t)$  définie de la manière suivante :

$$x_o(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } 0 \leq t < T_1 \\ 0 & \text{pour } T_1 \leq t < 2 T_1 \end{cases}$$

Le choix d'une durée double  $2 T_1$  est imposée par l'algorithme de la TFR, qui nécessite  $2^m$  échantillons.



Bien que la convolution digitale de deux signaux par cette approche indirecte permette de réaliser une fonction de « filtre digital », d'autres méthodes existent qui sont beaucoup mieux adaptées à cet effet [7]. Par contre, cette méthode indirecte permet de résoudre élégamment le problème de la « déconvolution » qui consiste à identifier la réponse impulsionnelle  $g(t)$  d'un système linéaire inconnu.

#### 4.3 Fonctions de corrélation

La fonction d'intercorrélation de deux signaux dont l'un au moins est à énergie finie est donnée par :

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau) dt \quad (4-10)$$

Si l'on tient compte de la relation existant entre corrélation et convolution, la transformée de Fourier de  $\varphi_{xy}(\tau)$  s'écrit de la manière suivante :

$$\Phi_{xy}(f) = X^*(f) \cdot Y(f) \quad (4-11)$$

où  $X(f)$  et  $Y(f)$  sont les transformées de Fourier de  $x(t)$  et  $y(t)$  respectivement et où l'astérisque représente le conjugué complexe.

On peut donc obtenir une estimation de  $\Phi_{xy}(\tau)$ , à l'aide de la relation (4-11) en utilisant la transformée de Fourier discrète :

$$\hat{\varphi}_{xy}(\tau_k) = \mathcal{F}^{-1} \{ \hat{X}^*(f_n) \hat{Y}(f_n) \} \quad (4-12)$$

avec  $k, n = 0, \dots, N-1$ .

La remarque du paragraphe précédent concernant l'effet de superposition reste évidemment valable pour les fonctions de corrélation.

#### 4.4 Interpolation de fonctions échantillonnées

Une application complémentaire de la TFR est l'interpolation d'une fonction échantillonnée. Elle permet de déterminer des échantillons intermédiaires aux échantillons connus.

Considérons  $N$  échantillons  $\psi(u_k)$  prélevés périodiquement avec une période  $\Delta u$  et conformément au théorème d'échantillonnage (voir paragraphe 5.1 b), sur une fonction  $\psi(u)$  dans un intervalle  $T$ . On a ainsi  $T = N \cdot \Delta u$ .

Lors d'un calcul par la TFR, ces échantillons sont considérés comme ceux d'une fonction périodique  $\psi_T(u)$  de période  $T$ . La TFR appliquée à cette suite d'échantillons donne :

$$\Psi(v_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \psi(u_k) e^{-j2\pi v_n u_k} \Delta u \quad (4-13)$$

avec  $u_k = k\Delta u, v_n = \left(n - \frac{N}{2}\right)\Delta v, \Delta v = \frac{1}{T}$  et  $n = 0, \dots, N-1$ .

Les  $\Psi(v_n)$  sont donc répartis périodiquement avec une période  $\frac{1}{T}$  dans l'intervalle  $\left(-\frac{1}{2\Delta u}, \frac{1}{2\Delta u}\right)$ . Il est évident que si l'on prend la transformée de Fourier inverse de  $\{\Psi(v_n)\}$ , on retrouve la suite des  $N$  échantillons initiaux  $\psi(u_k)$ .

Cependant, on peut artificiellement, en ajoutant une série de zéros à la suite  $\{\Psi(v_n)\}$ , considérer un nouveau nombre d'échantillons  $N^* > N$  (en principe  $N^* = 2^i N$ ).

Ceci revient à définir un nouvel intervalle  $\Delta u^* = \frac{T}{N^*} < \Delta u$ .

Les échantillons interpolés sont obtenus en calculant la transformée de Fourier inverse de  $\{\Psi(v_n)\}$  sur le nouvel intervalle  $\left(-\frac{1}{2\Delta u^*}, \frac{1}{2\Delta u^*}\right)$ .

Si les échantillons initiaux ne sont pas prélevés conformément au théorème d'échantillonnage, l'interpolation ne sera pas exacte.

### 5. Erreurs d'estimation

Deux catégories principales d'erreurs peuvent intervenir dans l'utilisation de la TFR.

On a d'une part des erreurs « certaines » dues à l'utilisation de méthodes numériques de calcul, et d'autre part, des erreurs de nature statistique lors du traitement de signaux aléatoires. Une cause d'erreur supplémentaire intervenant si les échantillons prélevés sur les signaux sont grossièrement quantifiés (bruit de quantification), n'est pas prise en considération dans ce paragraphe.

#### 5.1 Erreurs certaines

On peut distinguer trois types d'erreurs certaines : les erreurs dues à la durée limitée d'observation, les erreurs dues à l'échantillonnage et les erreurs dues à l'estimation discrétisée en fréquence. On peut montrer [8] que les erreurs d'arrondi, intervenant dans tout calcul numérique sur ordinateur, peuvent être considérées comme négligeables dans le calcul par la TFR.

##### a) Erreurs dues à la durée limitée $T$ d'observation

Ces erreurs interviennent essentiellement lors de l'analyse de signaux aléatoires et de signaux périodiques lorsque leur période n'est pas connue a priori.

Le fait d'observer le signal  $x(t)$  pendant une durée  $T$  finie revient à multiplier la fonction originale  $x(t)$  par une fonction « fenêtre » temporelle  $w(t)$  définie de la manière suivante :

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t_0 < t < t_0 + T \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases} \quad (5-1)$$

On obtient ainsi un signal à durée limitée

$$x_T(t) = x(t) \cdot w(t) \quad (5-2)$$

On peut montrer que la densité spectrale d'énergie de  $x_T(t)$  est donnée par la convolution :

$$\Phi_{x_T}(f) = \Phi_x(f) * \Phi_w(f) \quad (5-3)$$

où  $\Phi_x(f)$  est la densité spectrale cherchée et  $\Phi_w(f)$  est la densité spectrale d'énergie du signal  $w(t)$ . Cette dernière peut être déterminée aisément à partir de la relation (5-1) :

$$\Phi_w(f) = T^2 \text{sinc}^2(fT) \quad (5-4)$$

Cette fonction bien connue, représentée sur la figure 4, possède un lobe principal centré en  $f = 0$  et plusieurs lobes secondaires. La largeur du lobe principal et la présence des lobes secondaires introduit une différence entre les densités spectrales  $\Phi_x(f)$  et  $\Phi_{x_T}(f)$ . Cette différence disparaît seulement à la limite pour  $T \rightarrow \infty$ . On a alors :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_{x_T}(f) = \Phi_x(f)$$

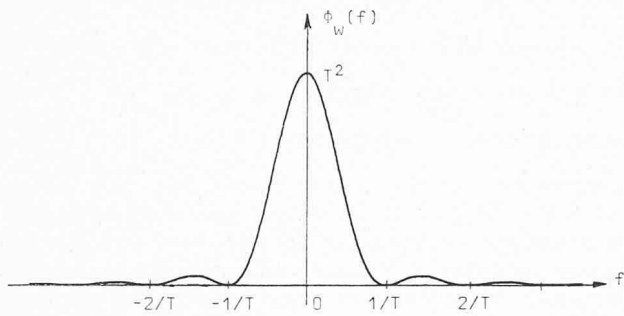


Fig. 4. — Densité spectrale d'énergie de la fonction fenêtre.

La résolution dans l'estimation de  $\Phi_x(f)$  dépend entièrement de la largeur de la base du lobe principal de  $\Phi_w(f)$ . La condition permettant la résolution de deux pics distincts du spectre  $\Phi_x(f)$  centrés sur les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  peut être exprimée approximativement par l'inégalité suivante :

$$T \geq \frac{2}{|f_2 - f_1|} \quad (5-6)$$

En effet, si

$$\Phi_x(f) = a_1 \delta(f - f_1) + a_2 \delta(f - f_2)$$

alors

$$\Phi_{x_T}(f) = a_1 \Phi_w(f - f_1) + a_2 \Phi_w(f - f_2)$$

en vertu de la relation (5-3) et de la propriété de convolution de l'impulsion de Dirac.

Si la condition (5-6) n'est pas satisfaite, les deux pics ne sont pas discernables, comme le montre la figure 5.

#### b) Erreurs dues à l'échantillonnage

Le signal à analyser par la TFR, quelle que soit sa nature, doit être échantillonné. La version échantillonnée  $x_e(t)$  d'un signal  $x(t)$  peut être considérée dans ce cas comme le produit de  $x(t)$  et d'une suite périodique, de période  $\Delta t$ , d'impulsions de Dirac. C'est l'échantillonnage dit « idéalisé ». On a vu (fig. 2 e) que dans ce cas, le spectre du signal échantillonné est un spectre périodique, de période  $\frac{1}{\Delta t}$ , obtenu par répétition à partir du spectre du signal  $x(t)$ . Le spectre cherché peut être obtenu à partir de celui du signal échantillonné par élimination des spectres secondaires si et seulement si la condition suivante, dite théorème d'échantillonnage, est satisfaite : la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure ou égale au double de la fréquence maximum du signal. En pratique, cette condition n'est jamais satisfaite. L'inévitable recouvrement qui en résulte introduit une erreur dans l'estimation du spectre cherché. On cherchera alors à diminuer la valeur de  $\Delta t$  afin d'éloigner les spectres secondaires, de manière à rendre négligeable l'erreur de recouvrement.

Dans un certain nombre de cas, on peut être amené à préfiltrer le signal (avant l'échantillonnage et l'analyse par la TFR) de manière à éliminer au mieux les composantes « haute fréquence » du spectre qui sont à l'extérieur du domaine fréquentiel d'intérêt dans lequel se fait l'analyse. La fréquence  $f_{\max}$  à partir de laquelle ces composantes

« haute fréquence » peuvent être considérées comme suffisamment atténuées peut alors être utilisée pour déterminer la fréquence d'échantillonnage.

Une illustration des erreurs dues à l'échantillonnage est présentée avec l'exemple suivant dans lequel on cherche à estimer le spectre d'amplitude et de phase d'une impulsion rectangulaire  $x(t)$  définie par :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| < 0,5 \text{ s} \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

Pour ce signal, la condition du théorème d'échantillonnage n'est jamais satisfaite. En plus, la fréquence d'échantillonnage a été choisie assez faible (8 Hz) pour mettre en évidence l'erreur de recouvrement. La résolution fréquentielle choisie est également faible (0,125 Hz).

Ceci conduit à une durée d'observation  $T = \frac{1}{0,125} = 8 \text{ s}$  et à un nombre d'échantillons de  $N = \frac{8}{0,125} = 64$ .

Conformément à la règle énoncée au paragraphe 4.1 a), la durée d'observation ( $T = 8$ ) est supérieure à la durée effective du signal (1 s). Les résultats obtenus dans ces conditions ainsi que les spectres théoriques sont représentés sur la figure 6. L'erreur de recouvrement apparaît très nettement sur le spectre d'amplitude surtout pour  $|f| > 2 \text{ Hz}$ . Cette erreur peut être diminuée sensiblement si l'on augmente la fréquence d'échantillonnage, donc le nombre  $N$  d'échantillons pour une résolution donnée. On remarque également une erreur considérable sur le spectre de phase. Elle provient du mauvais choix de l'instant initial d'échantillonnage ( $t_i = -4 \text{ s}$ ). En effet, pour des signaux possédant des discontinuités, le choix de  $t_i$  nécessite des précautions. Par exemple, dans ce cas, le choix

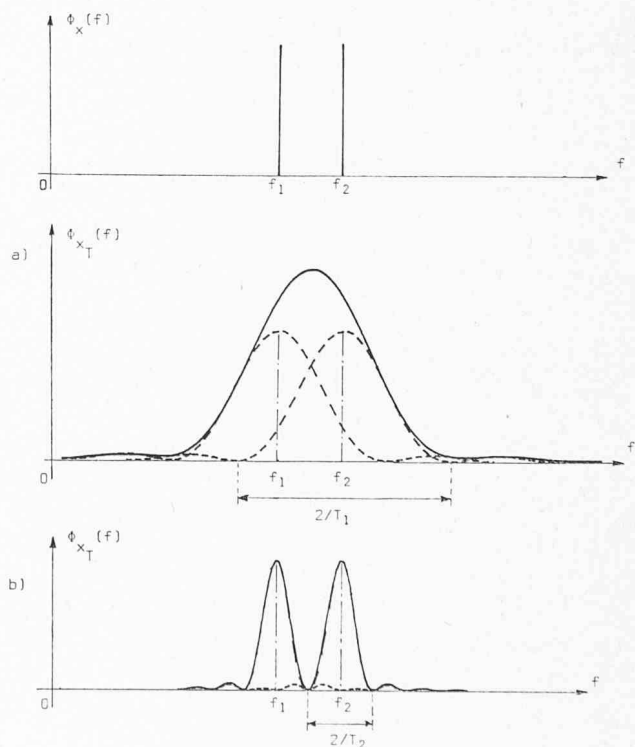


Fig. 5. — Effet de la largeur de base de la fonction  $\Phi_w(f)$

$$\text{a) } T_1 < \frac{2}{|f_2 - f_1|} \quad \text{b) } T_2 > \frac{2}{|f_2 - f_1|}$$



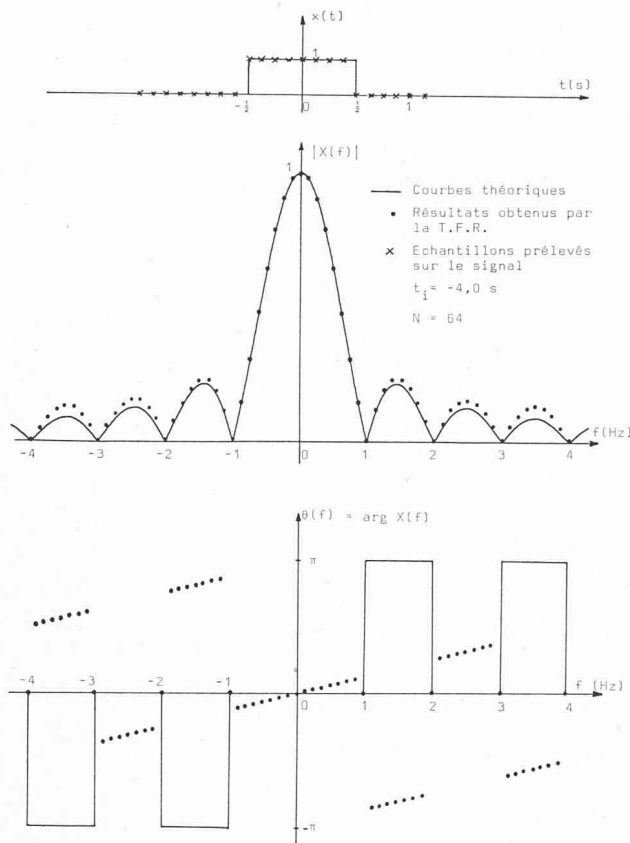


Fig. 6. — Estimation des spectres d'amplitude  $|X(f)|$  et de phase  $\theta(f)$  d'une impulsion rectangulaire. Mise en évidence de l'erreur d'estimation due au recouvrement et au choix incorrect des instants d'échantillonnage.

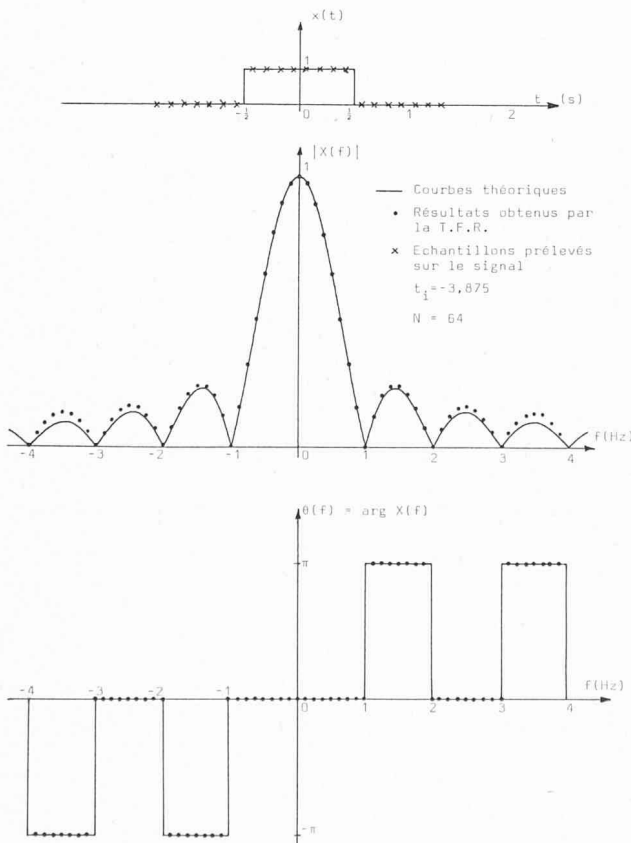


Fig. 7. — Estimation optimale des spectres d'amplitude et de phase d'une impulsion rectangulaire pour un nombre d'échantillons donné  $N$ .

$t_i = -4$  s détruit la symétrie du signal par rapport à  $t = 0$ .

Le calcul se fait comme si le signal était retardé de  $\frac{\Delta t}{2}$  s.

Pour conserver une répartition symétrique des échantillons par rapport à l'origine, il faut choisir  $t_i = -4 + \frac{\Delta t}{2}$ .

Les résultats obtenus avec ce dernier choix sont représentés à la figure 7. On remarque que malgré l'erreur de recouvrement sur le module de  $X(f)$ , son argument est calculé correctement. En règle générale, pour les signaux possédant des discontinuités, l'instant initial d'échantillonnage doit être choisi avec un décalage de  $\frac{\Delta t}{2}$  vers les valeurs positives de  $t$ .

### c) Erreurs dues à l'estimation discrétisée en fréquence

La densité spectrale d'un signal à durée limitée  $x_T(t)$  est donnée par la relation (5-3) que l'on peut écrire sous la forme :

$$\Phi_{x_T}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(g) \Phi_w(f-g) dg \quad (5-7)$$

Dans un calcul numérique sur ordinateur, on ne peut évaluer  $\Phi_{x_T}(f)$  qu'à des fréquences harmoniques  $f_n = n\Delta f = \frac{n}{T}$ ; on a par conséquent :

$$\Phi_{x_T}(f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(g) \Phi_w(f_n-g) dg \quad (5-8)$$

avec  $n = 0, \dots, N-1$ .

On remarque, d'après cette relation, que chaque coefficient  $\Phi_{x_T}(f_n)$  effectivement calculé à la fréquence  $f_n = n\Delta f$  représente la puissance du signal  $x(t)$  pondérée par la fenêtre spectrale  $\Phi_w(f_n-g)$  centrée sur la fréquence correspondante  $f_n$ . Une raie observée à la fréquence  $f_n$ , peut en réalité être à une fréquence  $f_i$  telle que :

$$f_n - \frac{\Delta f}{2} \leq f_i \leq f_n + \frac{\Delta f}{2}$$

L'estimation de la fréquence de cette raie est donc erronée. Cette erreur dépend uniquement de la fréquence  $f_0 = \Delta f = \frac{1}{T}$ . Elle est illustrée par la figure 8.

Deux moyens distincts permettent de diminuer cette erreur. Le premier consiste à augmenter la durée d'observation  $T$  afin de diminuer la fréquence  $f_0 = \frac{1}{T}$ . Le second, utilisé dans le cas où on ne dispose que d'un nombre fixe d'échantillons du signal  $x(t)$ , consiste à considérer un pseudo-durée d'observation  $T^*$  en définissant un nouveau signal à durée limitée  $x_{T^*}(t)$  de la manière suivante :

$$x_{T^*}(t) = \begin{cases} x_T(t) & \text{pour } t_0 \leq t \leq t_0 + T \\ 0 & \text{pour } t_0 + T \leq t \leq t_0 + T^* \end{cases}$$

Ainsi, les nouvelles fréquences harmoniques  $nf^*$  sont données par :

$$nf^* = \frac{n}{T^*}$$

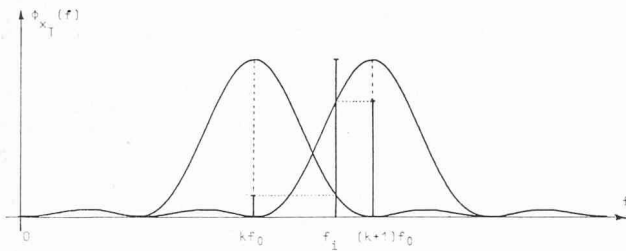


Fig. 8. — Erreurs dues à l'estimation discrétisée en fréquence.

En pratique, il est souvent avantageux d'utiliser un multiple entier de  $T$  pour la pseudo-durée  $T^*$ .

### 5.2 Erreurs statistiques

Les erreurs statistiques interviennent uniquement lors de l'estimation de la densité spectrale de puissance  $\Phi_x(f)$  d'un signal aléatoire  $x(t)$ . L'analyse de ces erreurs est longue et compliquée. On se contente de présenter ici un bref résumé des principaux résultats et règles à observer. Pour de plus amples détails, on peut avantageusement consulter le chapitre 6 de la référence [2].

Le problème fondamental de l'estimation d'une densité spectrale de puissance  $\Phi_x(f)$  par un estimateur  $\hat{\Phi}_x(f)$  peut être formulé de la manière suivante :

Pour chaque valeur de la fréquence contenue dans le domaine fréquentiel d'analyse, il faut trouver deux paramètres  $a$  et  $b$  tels que l'intervalle  $\hat{\Phi}_x(f) - a, \hat{\Phi}_x(f) + b$ , dit « intervalle de confiance », contienne  $\Phi_x(f)$  avec une probabilité donnée pour toutes les valeurs de  $f$ .

L'estimateur spectral adouci  $\bar{S}(f_n)$  permettant d'estimer la densité spectrale  $\Phi_x(f)$  d'un signal aléatoire  $x(t)$  à partir de la relation (4-6), fournit une approximation de l'espérance mathématique de  $S(f_n)$ .

On peut montrer [2] qu'à défaut d'une expression théorique exacte, la variable  $\bar{S}(f_n)$  possède approximativement une densité de probabilité en  $\chi_m^2$  à  $m$  degrés de liberté (cette distribution est décrite et tabulée dans tous les ouvrages de statistique),  $m$  dépendant du paramètre  $T_0$  de la fenêtre spectrale  $\Phi_x(f)$  et de la durée d'observation  $T$ .

À l'aide de tables numériques appropriées (voir par exemple [9]), on peut alors déterminer les paramètres  $a$  et  $b$  de l'intervalle de confiance. Pour que ces résultats soient valables, il faut choisir les paramètres  $T_0$  et  $T$  de manière à ce que :

- 1) le rapport  $\frac{T}{T_0}$  soit grand (ordre de grandeur 10 à 30) ;
- 2)  $T_0$  soit assez grand pour que la densité spectrale cherchée  $\Phi_x(f)$  puisse être considérée comme approximativement constante sur tout intervalle de fréquence de largeur  $\frac{1}{T_0}$ .

### 6. Sous-programme FFT

Sur la base des règles données par Cooley et Tukey [5], un sous-programme en langage FORTRAN IV, dont le listing est indiqué à la figure 9, a été mis au point au Laboratoire de traitement des signaux de l'EPFL.

L'instruction d'appel est :

CALL FFT (X, N, NU, TR, DT, TI, F)

où :

- X est un vecteur complexe à  $N$  composantes qui représente les échantillons prélevés avant l'exécution et les coefficients cherchés  $\hat{X}(f_n)$  ou  $\hat{x}(t_k)$  pour la transformée inverse, après l'exécution.
- N est le nombre d'échantillons.
- NU est la puissance de 2 telle que  $N = 2^{NU}$ .
- TR = + 1 si l'on veut calculer la TFD directe,  
— 1 si l'on veut calculer la TFD inverse.
- DT est la période d'échantillonnage  $\Delta t$  donnée par  $\Delta t = T/N$ .
- TI est la valeur initiale ( $t_0$ ) précisant le début de l'échantillonnage.
- F est le vecteur réel (donc à dimensionner) à  $N$  composantes qui représentent les fréquences  $f_n$  (transformation directe) ou les temps d'échantillonnage  $t_k$  (transformation inverse).

Le programme principal doit au moins comporter les déclarations :

```
COMPLEX X(N)
DIMENSION F(N)
```

Le sous-programme FFT calcule une expression du type

$$\hat{X}(f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) e^{-j2\pi f_n t_k} \Delta t$$

L'utilisateur doit apporter les modifications nécessaires dans son programme principal (conformément aux relations (2-10) et (2-16) pour des fonctions périodiques ou aléatoires).

```
SUBROUTINE FFT(X,N,NU,TR,DT,TI,FR)
DIMENSION FR(N)
COMPLEX X(N),Y,Z,W
N1=N-1
N2=N/2
PI = 3.1415926535
I=1
T=FLOAT(N)*DT
DF = 1./T
DF0 = (-1.)/(2.*DT)
DO 1 J=1,N1
IF(I.LE.J) GO TO 2
Y=X(I)
X(I)=X(J)
X(J) = Y
2 K=N2
3 IF(I.LE.K) GO TO 1
I=I-K
K=K/2
GO TO 3
1 I=K+I
DO 4 I=1,NU
Z=CMPLX(1.,0.)
IA=2**I
IB=IA/2
ALFA=(-TR)*PI/FLOAT(IB)
W=CMPLX(COS(ALFA),SIN(ALFA))
DO 4 J=1,IB
DO 5 K=J,N,IA
IC = K+IB
Y=X(IC)*Z
X(IC) = X(K)-Y
5 X(K) = X(K)+Y
4 Z=Z*W
DO 7 I=1,N2
K=I+N2
W=X(I)
X(I) = X(K)
7 X(K) = W
F=DF0
DO 6 I=1,N
ALFA = (-2.)*PI*F*TI
W=CMPLX(COS(ALFA),SIN(ALFA))
X(I)=X(I)*W*DT
FR(I) = F
6 F = F + DF
RETURN
END
```

Fig. 9. — Listing du sous-programme FFT.

## 7. Conclusions

On a présenté dans cet article une vue d'ensemble sur les possibilités et les règles d'utilisation de l'algorithme de la transformation de Fourier rapide. Cet algorithme particulièrement efficace est d'une utilité appréciable pour le traitement digital des signaux, et le nombre de ses applications ne fait que croître.

Toutefois, le choix des paramètres intervenant lors de son utilisation est régi par les règles suivantes qui doivent être rigoureusement respectées :

a) Le signal à analyser par la TFR, quelle que soit sa nature, doit être échantillonné périodiquement avec une période  $\Delta t$ , pendant une durée  $T$ . Le nombre total d'échantillons prélevés  $N$  doit être une puissance de 2 et est lié à  $\Delta t$  et  $T$  par la relation  $T = N \cdot \Delta t$ .

b) La fréquence d'échantillonnage  $\frac{1}{\Delta t}$  doit être supérieure ou égale au double de la fréquence maximum encore significative contenue dans le signal, en vertu du théorème d'échantillonnage.

c) A partir des  $N$  échantillons du signal, la TFR fournit  $N$  valeurs de la transformée de Fourier calculées aux fréquences harmoniques  $f_n = n\Delta f = n \frac{1}{T}$ .

d) Quelle que soit la nature du signal à analyser, la TFR le considère comme périodique de période  $T$ .

e) Pour les signaux aperiodiques, la durée d'observation  $T$  est déterminée par la résolution fréquentielle désirée avec la condition minimum (relation (5-6)) :  $T > \frac{2}{|f_2 - f_1|}$

f) Pour les signaux périodiques, la durée  $T$  doit coïncider avec la période du signal si celle-ci est connue. Si non,  $T$  doit être choisie beaucoup plus grande que la période présumée du signal afin d'assurer une résolution suffisante.

g) Pour les signaux impulsionnels, la durée d'observation  $T$  doit être supérieure à la durée effective du signal, afin que les coefficients calculés aux fréquences harmoniques  $f_n = \frac{n}{T}$  permettent une description suffisante du spectre cherché.

h) Pour les signaux aléatoires, les erreurs statistiques peuvent être réduites en convoluant l'estimateur spectral obtenu avec une « fenêtre spectrale » telle que  $\Phi_z(f) = T_o^2 \text{sinc}^2(fT_o)$ . Le paramètre  $T_o$  doit être choisi de manière à pouvoir considérer la densité spectrale cherchée comme approximativement constante sur tout intervalle  $\frac{1}{T_o}$ . De plus, le rapport  $\frac{T}{T_o}$  doit être compris entre 10 et 30 environ.

i) Pour l'analyse de signaux connus analytiquement et possédant des discontinuités, l'instant initial d'échantillonnage  $t_i$  doit être choisi avec un décalage de  $\frac{\Delta t}{2}$  vers les valeurs positives de  $t$  si l'on veut limiter les erreurs sur les arguments des coefficients calculés dues à la présence d'un retard fictif  $\frac{\Delta t}{2}$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] BRACEWELL, R.: *The Fourier transform and its applications*. McGraw-Hill, New York 1965.
- [2] JENKINS, G. M. and WATTS, D. G.: *Spectral Analysis and its applications*. Holden-Day, San-Francisco 1968.
- [3] DE COULON, F.: *Méthodes actuelles de traitement des signaux*. Neue Technik, 7, 1973, p. 276-284.
- [4] BERGLAND, G. D.: *A guided tour of the fast Fourier transform*. IEEE Spectrum, 6, July 1969, p. 41-52.
- [5] COOLEY, J. W. and TUKEY, J. W.: *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*. Math. of comput., 19, April 1965, p. 297-301.
- [6] KUNT, M.: *Transformations rapides généralisées*. AGEN Mitteilungen, 13, juin 1972, p. 37-48.
- [7] GOLD, B. and RADER, Ch. M.: *Digital processing of signals*. McGraw-Hill, New York 1969.
- [8] RAMOS, G. V.: *Roundoff error analysis of the fast Fourier transform*. Math. of comput., 25, October 1971, p. 757-768.
- [9] BEYER, W. H.: *Handbook of tables for probability and statistics*. The Chemical-Rubber Co., 1966.

Adresse des auteurs :

Murat Kunt, ingénieur physicien EPFL  
F. de Coulon, professeur  
Laboratoire de traitement des signaux de l'EPFL  
16, chemin de Bellerive, 1007 Lausanne

## Bibliographie

**Cours d'électronique**, tome III, Amplification — Circuits intégrés, par Francis Milsant. Troisième édition refondue (1974). — Un volume 16 x 25 cm, 208 pages, avec 102 figures et 58 exercices. Broché : 34 F fr.

Cette nouvelle édition du tome III est une refonte complète rendue nécessaire en raison du nouveau programme de L'ESAM qui traite des *Circuits intégrés*. En effet, pour réaliser un circuit imprimé, un ingénieur de bureau d'études dispose actuellement non seulement des composants classiques, mais aussi de véritables structures (amplificateurs, bascules...) dont il doit connaître parfaitement les réponses. C'est à l'ingénieur qu'il appartient de faire un choix entre les différentes solutions possibles, en tenant compte des performances demandées, de la fiabilité du système et du coût des différents matériaux.

L'ouvrage comporte deux parties principales :

— La première, intitulée *Signaux faibles*, s'appuie sur l'utilisation systématique des circuits équivalents. Elle traite des différents types d'étages d'entrée, en fonction de leurs fréquences d'utilisation : audiofréquences, vidéo-fréquences... Elle consacre un chapitre important à l'étude

des amplificateurs continus à circuits intégrés avec, comme application principale, l'amplificateur opérationnel. Elle se termine par un chapitre sur le bruit de fond. Cette dernière étude, assez complexe, est importante car, en définitive, c'est le bruit de fond qui limite les possibilités d'un amplificateur.

— La deuxième partie, intitulée *Signaux forts*, est réservée aux étages de sortie (simples et push-pull) que l'on calcule directement d'après les caractéristiques des transistors. Ainsi est-on amené à définir certains défauts (distorsions) que l'on corrige ensuite par la contre-réaction.

Le « Cours d'Electronique » est complété par un tome IV (actuellement en préparation), traitant des *Systèmes bouclés* : contre-réactions, oscillations et alimentations.

*Signaux faibles*. — Amplificateurs en audiofréquences : Amplificateurs à transistors unipolaires, amplificateurs à transistors bipolaires. Amplificateurs en vidéofréquences. Amplificateurs en radiofréquences. Amplificateurs continus à circuits intégrés : Technologie des circuits intégrés. Etude théorique. Amplificateur opérationnel. Générateurs d'attaque et bruit de fond : Reproduction sonore. Bruit de fond.

*Signaux forts*. — Etage simple de sortie, étage push-pull. Appendice : Méthode des schémas-blocs, méthode des graphes de transfert.