

Koinzidenzstatistik zufälliger Impulsfolgen

Autor(en): **Stein, S. / Johansen, D.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri**

Band (Jahr): **37 (1959)**

Heft 8

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-875455>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Koinzidenzstatistik zufälliger Impulsfolgen *

538.567.46: 519.2

Zusammenfassung. Es wird eine einfache Beziehung entwickelt, die statistisch die zeitliche Koinzidenz einer Gruppe zufälliger Impulsfolgen beschreibt. Dabei wird jede Impulsfolge als aus Impulsen bestehend betrachtet, die zeitlich beliebig auftreten und deren Dauer einer gewissen Wahrscheinlichkeitsverteilung unterworfen ist. Dann wird es möglich, die statistische Verteilung derjenigen Intervalle zu bestimmen, die durch Koinzidenz unter den verschiedenen, im einzelnen bestimmten, zufälligen Impulsfolgen entstehen. Daraus ergeben sich auch weitere Schlüsse hinsichtlich der mittleren Dauer der resultierenden Koinzidenzfolgen.

Résumé. L'étude décrit le développement d'une relation simple caractérisant les coïncidences dans le temps d'un groupe de trains d'impulsions aléatoires. Chaque train d'impulsions est considéré comme se composant d'impulsions qui se succèdent par hasard et dont les durées obéissent à une certaine distribution de probabilité. Dans ce cas, il est possible de déterminer la distribution statistique des intervalles produits par la coïncidence entre les trains d'impulsions discrètes. D'autres déductions en découlent quant à la durée moyenne des impulsions du train résultant.

I. Einleitung

Bei Funkverbindungen ist es oft wichtig, zu wissen, welchen Einfluss Mehrfachbetrieb (Diversity) auf die wirksame Dauer von Schwundeinbrüchen des aus dem Mehrfachbetrieb resultierenden Signals hat. Morphologisch gesehen, entspricht dieses Problem dem der Bestimmung der Statistik der Gleichzeitigkeit unter einer Gruppe zufälliger Impulsfolgen. Es wurde eine sehr einfache mathematische Beschreibung dieses Problems gefunden, die bis heute in der einschlägigen Literatur noch nicht zu finden war. Das Hauptresultat ist die Ableitung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung der Länge der Koinzidenzintervalle, wenn eine ähnliche Verteilung der Impulsdauern der einzelnen Impulsfolgen bekannt ist. Dieses Resultat wird erreicht, indem die Problemstellung des Ableitens der zeitlichen Koinzidenzen so geändert wird, dass nach der beinahe trivial erscheinenden Wahrscheinlichkeit einer Koinzidenz zu beliebig gewählten Zeitpunkten gefragt wird.

Da es uns scheint, dass die Resultate auch für andere Anwendungsgebiete von Interesse sein könnten, soll das Problem in der Form des Zusammenwirkens zufälliger Impulsfolgen behandelt werden.

II. Statistik einer zufälligen Impulsfolge

Betrachten wir zuerst die statistische Beschreibung einer zufälligen Impulsfolge, wie sie durch eine der Zeilen der Figur 1 dargestellt wird.

Die Impulsfolge besteht aus einer Reihe von Impulsen, die in rein zufälliger Art einsetzen, jedoch durch eine mittlere Folgefrequenz festgelegt sind und deren Impulsdauern einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegen. (Die mittlere Anzahl Impulse pro Zeiteinheit und die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Impulslängen können einzeln vorgegeben sein. In einem solchen Fall können diese beiden Angaben in einer neuen statistischen Grösse $q_i(x)$ zusammengefasst werden.) Diese Funktion $q_i(x)$, die wir als die statistische Ausgangsgrösse der i .

* Autorisierte Übersetzung aus Proceedings of the Institute of Radio Engineers 46 (1958), 827...830, besorgt von Harry A. Laett, Bern.

zufälligen Impulsfolge betrachten wollen, sei definiert durch die Eigenschaft:

$q_i[x] dx$ = erwartete Anzahl von Impulsen pro Zeiteinheit, deren Dauer zwischen x und $x+dx$ liegt.

Sei definitionsgemäss $Q_i(x) = \int_x^\infty q_i(x) dx$ = erwartete Anzahl von Impulsen je Zeiteinheit, deren Dauer x überschreitet. Wir gehen dabei von der Annahme aus, dass die endgültige statistische Charakterisierung sich auf hinreichend lange Zeitabschnitte bezieht, so dass diese Erwartungswerte in der Tat der Wahrscheinlichkeitsverteilung entsprechen, die bei einer Messung der entsprechenden Grössen ermittelt würde.

Ferner stellen wir noch fest, dass der Bruchteil der Zeit, während der Impulse vorhanden sind, gegeben ist durch

$$R_i = \int_0^\infty x q_i(x) dx$$

III. Die Gleichzeitigkeit unter mehreren zufälligen Impulsfolgen

Betrachten wir nun mehrere voneinander unabhängige zufällige Impulsfolgen, zum Beispiel die vier als «Eingänge» in Figur 1 bezeichneten. Die Impulse sind durch die dicken Umrisse dargestellt. Fragen wir nun nach der statistischen Verteilung derjenigen Zeitintervalle, während deren *gleichzeitig* Impulse in *allen* Eingangsfolgen vorhanden sind. (Wir können uns leicht eine Schaltung ausdenken, die einen Ausgangsimpuls dann, aber nur dann, abgibt, wenn Impulse in jedem Eingang gleichzeitig vorhanden sind.) Die daraus entstehenden Koinzidenzimpulse sind in Figur 1 als Ausgang vermerkt. Die Weise, in der sie entstehen, geht aus der Abbildung deutlich hervor. Bezeichnen wir mit

$$q_{0n}, Q_{0n} \text{ und } R_{0n},$$

die Kenngrössen für den Ausgang in Analogie zu den Kenngrössen

$$q_i, Q_i \text{ und } R_i,$$

die bereits für die Eingänge definiert wurden. Dabei

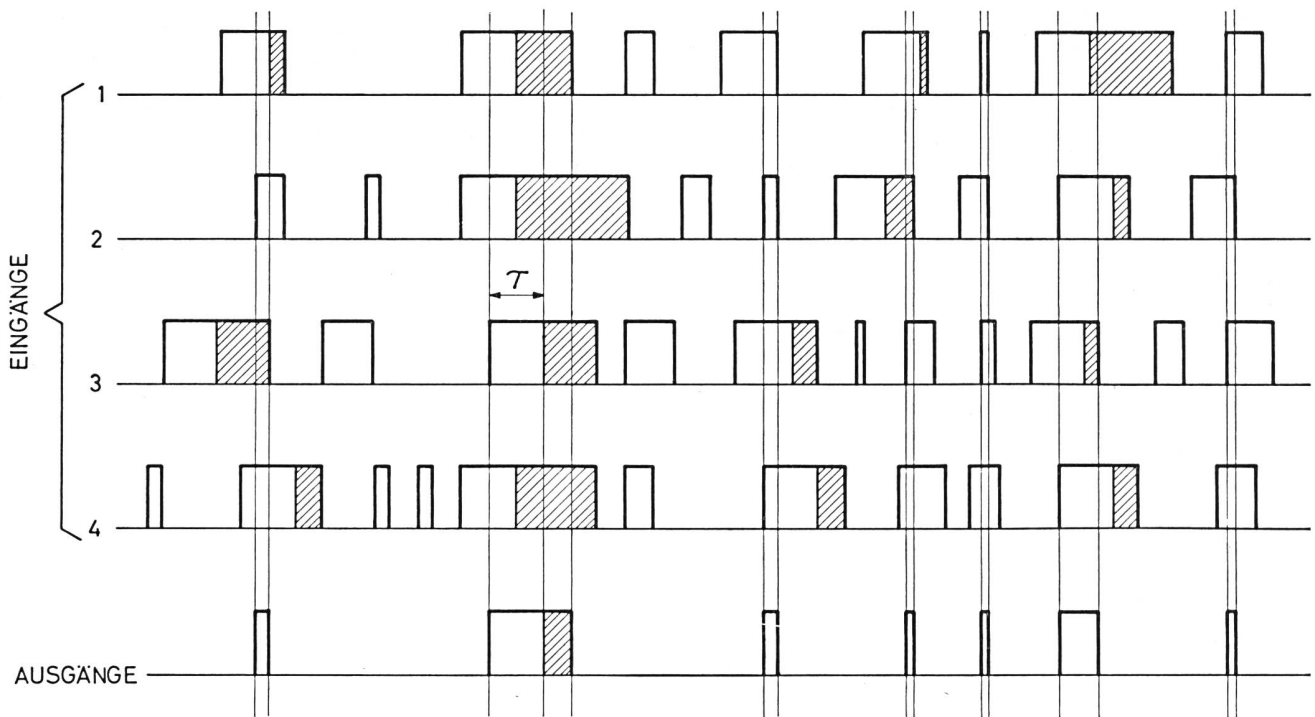


Fig. 1. Zeitliche Folge der Impulse an den Eingängen und durch Koinzidenz erzeugte Ausgangsfolge

soll n die Anzahl der zufälligen Impulsfolgen am Eingang bezeichnen. Somit stellt sich unser Problem wie folgt:

Aus $q_i(x)$ oder $Q_i(x)$ $i = 1, 2, \dots, n$
bestimme man $q_{on}(x)$ oder $Q_{on}(x)$.

Betrachten wir zuerst den einfachen Fall der Bestimmung von R_{on} . Wir haben angenommen, dass das Vorhandensein von Impulsen in jeder der Eingangfolgen ein vollständig zufälliger Prozess ist, somit unabhängig vom Vorhandensein von Impulsen in den andern Eingangfolgen. Dann erhalten wir R_{on} aus den verschiedenen R_i durch das Gesetz der Wahrscheinlichkeit gleichzeitiger, voneinander unabhängiger Vorgänge. Da R_i den Bruchteil der Zeit darstellt, während der Impulse in der i . Folge vorhanden sind, wird der Bruchteil der Zeit, während der Impulse gleichzeitig in allen Folgen auftreten

$$R_{on} = \prod_{i=1}^n R_i.$$

Kehren wir nun zurück zur ursprünglichen Problemstellung. Wir fragen nach der Statistik der Koinzidenzdauer am Ausgang. Offenbar benötigen wir dazu ein Kriterium, um die Bedingungen, unter denen Koinzidenzimpulse auftreten, entsprechend deren Dauer zu klassieren. Wir gehen dabei folgendermassen vor:

Betrachten wir einen Koinzidenzimpuls der bestimmten Dauer τ und lassen in der Figur 1 alle Impulse, deren Dauer kürzer ist als τ , unberücksichtigt. (Eingangsimpulse, die kürzer sind als τ , können sowieso nie zu Koinzidenzen führen, die länger sind als τ .) Im weiteren verkürzen wir die übriggebliebenen Impulse je um die Dauer τ vom vordern Ende her; es

ergeben sich somit Verhältnisse, wie sie durch die schraffierten Felder in Figur 1 dargestellt sind. Bei genauer Betrachtung der Abbildung stellen wir fest, dass jede beliebige zeitliche Koinzidenz der schraffierten Elemente *aller* Eingangfolgen immer einem schraffierten Element der Ausgangsfolge entspricht, das heisst, jedes schraffierte Element im Ausgang entspricht einem Koinzidenzimpuls, der schon während einer Dauer τ vorhanden war, da ja jede der Eingangfolgen in der Tat einen Impuls aufweist, der seinerseits schon um die Zeit τ früher als die schraffierten Elemente begonnen hatte. Man erkennt unschwer, dass eine solche Darstellung alle Vorgänge erfasst und erfassen muss, die Anlass zu einem Ausgangskoinzidenzimpuls von mindestens τ s führen. Wir haben jedoch bereits die Wahrscheinlichkeitsbeziehungen angegeben, die zwischen den schraffierten Elementen der Eingänge und des Ausgangs gelten. Da die schraffierten Elemente bezüglich der Eingangfolgen unabhängig erfolgen, so können wir auch hier wieder unter Zuhilfenahme der gleichen Gesetze, wie dies für R_{on} und R_i der Fall war, vorgehen. Der Bruchteil der Zeit, während der schraffierte Elemente (d. h. Impulse, deren Länge um τ verkürzt wurden) in der i . Folge vorkommen, ist gegeben durch

$$\int_{\tau}^{\infty} (x - \tau) q_i(x) dx.$$

Die entsprechende Grösse für den Ausgang ist in Abhängigkeit der noch unbekanntem Funktion q_{on} gegeben durch

$$\int_{\tau}^{\infty} (x - \tau) q_{on}(x) dx.$$

Das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Gleichzeitigkeit ergibt nun direkt

$$\int_{\tau}^{\infty} (x - \tau) q_{\text{on}}(x) dx = \prod_{i=1}^n \int_{\tau}^{\infty} (x - \tau) q_i(x) dx$$

Partielle Integration führt zu

$$\int_{\tau}^{\infty} (x - \tau) q(x) dx = \int_{\tau}^{\infty} Q(x) dx,$$

so dass wir auch schreiben können

$$\int_{\tau}^{\infty} Q_{\text{on}}(x) dx = \prod_{i=1}^n \int_{\tau}^{\infty} Q_i(x) dx$$

Dies gilt für alle Werte von τ , und nach Differenziation bezüglich τ erhalten wir das gewünschte Ergebnis

$$Q_{\text{on}}(\tau) = - \frac{d}{d\tau} \prod_{i=1}^n \int_{\tau}^{\infty} Q_i(x) dx$$

Nach Durchführung der Ableitung nach τ erhalten wir

$$Q_{\text{on}}(\tau) = \left\{ \prod_{i=1}^n \int_{\tau}^{\infty} Q_i(x) dx \right\} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i(\tau)}{\int_{\tau}^{\infty} Q_i(x) dx}$$

Dies ist die Lösung unseres Problems.

Für numerische Anwendungen ist diese Beziehung nicht ungeeignet, selbst wenn die Q_i nur numerisch integriert werden können. Für den verhältnismässig häufigen Fall, in dem die zufälligen Eingangsimpulsfolgen statistisch identisch sind, gilt mit $Q_i(x) = Q(x)$

$$Q_{\text{on}}(\tau) = nQ(\tau) \left[\int_{\tau}^{\infty} Q(x) dx \right]^{n-1}$$

Ein weiteres wertvolles Ergebnis unserer Berechnungen (vergleiche *Anhang II*) ergibt für die mittlere Dauer der Koinzidenzimpulse \bar{x}_{on} :

$$\frac{1}{\bar{x}_{\text{on}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{x}_i}$$

wobei \bar{x}_i die mittlere Impulslänge der i . Folge darstellt. Für n statistisch gleichwertige Eingangsfolgen erhalten wir die einfache Beziehung

$$\bar{x}_{\text{on}} = \frac{\bar{x}_i}{n}.$$

Für die besondere Anwendung bei Mehrfachbetrieb von Funkverbindungen wird das Signal auf dem am wenigsten mit Schwund behafteten Kanal durchgeschaltet, somit kann im resultierenden Signal ein Schwundeinbruch unter einem bestimmten Wert nur dann auftreten, wenn alle n Kanäle gleichzeitig unter diesen Wert fallen. In einem solchen Falle ist die mittlere resultierende Dauer des Schwundes um den Faktor n kleiner.

Zum Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass u. U. nicht nach der zeitlichen Häufigkeit $q_i(x)$ von Koinzidenzen verschiedener Dauer gefragt wird, sondern nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung der

Dauer der resultierenden Koinzidenzen. In einem solchen Falle dürfte es mit Hilfe der im Anhang abgeleiteten Beziehungen leicht möglich sein, die Resultate entsprechend umzuformen.

Anhang I

Variante zur Charakterisierung zufälliger Impulsfolgen

Häufig liegen die Messresultate über zufällige Impulsfolgen nicht in einer Form vor, die $q_i(x)$ und $Q_i(x)$ enthalten, sondern die charakterisiert durch die Grössen:

R_i = Wahrscheinlichkeit, oder Bruchteil der Zeit, dass in der i . Folge ein Impuls vorhanden ist.

$W_i(x)$ = Wahrscheinlichkeit, dass ein Impuls der i . Folge die Dauer x überschreitet.

Im Zusammenhang mit $W_i(x)$ steht eine Wahrscheinlichkeitsdichte $w_i(x)$ derart, dass

$w_i(x)dx$ = Wahrscheinlichkeit, dass die Dauer eines Impulses in der i . Folge zwischen x und $x+dx$ liegt.

Dann ist also

$$w_i(x) = - \frac{d}{dx} W_i(x)$$

Die mittlere Impulsdauer der i . Folge ist somit (partielle Integration)

$$\bar{x}_i = \int_0^{\infty} x w_i(x) dx = \int_0^{\infty} W_i(x) dx$$

Daraus entnehmen wir, dass die mittlere Impuls- (Wiederholungs-) Frequenz in der i . Folge durch

$$\frac{R_i}{\bar{x}_i} \left[\text{Impulse/Sekunde} \right]$$

gegeben ist.

Die im Text verwendeten Grössen lassen sich dann darstellen als

$$q_i(x) = \frac{R_i}{\bar{x}_i} w_i(x),$$

$$Q_i(x) = \frac{R_i}{\bar{x}_i} W_i(x)$$

Anhang II

Mittlere Dauer der Koinzidenzen

Mit den Definitionen $w_{\text{on}}(x)$ und $W_{\text{on}}(x)$ für die Ausgangs-Koinzidenzfolge (analog den oben definierten Wahrscheinlichkeiten) können wir schreiben:

$$Q_{\text{on}}(x) = \frac{R_{\text{on}}}{\bar{x}_{\text{on}}} W_{\text{on}}(x).$$

Die Auflösung nach \bar{x}_{on} geschieht am besten durch Einsetzen von $x = 0$. Definitionsgemäss ist $W_{\text{on}}(0) = 1$, woraus folgt

$$\bar{x}_{\text{on}} = \frac{R_{\text{on}}}{Q_{\text{on}}(0)}.$$

Andererseits aber ist

$$Q_{\text{on}}(0) = \left\{ \prod_{i=1}^n \int_0^{\infty} Q_i(x) dx \right\} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i(0)}{\int_0^{\infty} Q_i(x) dx}$$

und

$$\int_0^{\infty} Q_i(x) dx = \frac{R_i}{x_i} \int_0^{\infty} W_i(x) dx = R_i$$

Daraus ergibt sich

$$Q_{\text{on}}(0) = \left\{ \prod_{i=1}^n \right\} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i(0)}{R_i} = R_{\text{on}} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i(0)}{R_i}$$

Wir finden also

$$Q_i(0) = \frac{R_i}{x_i} W_i(0) = \frac{R_i}{x_i}$$

und somit

$$\frac{1}{x_{\text{on}}} = \frac{Q_{\text{on}}(0)}{R_{\text{on}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$$

Literatur - Littérature - Letteratura

Bergtold, F. Die grosse Fernseh-Fibel. Teil I. Eine Einführung in die Technik des Fernsehempfanges. Berlin-Tempelhof, Jakob-Schneider-Verlag, 1959. 104 S., 96 Abb., Preis Fr. 7.50.

Der vorliegende erste Teil des Werkes ist, wie der Verfasser im Vorwort bemerkt, aus dem Umgang mit lernenden Fachleuten und aus den Fragen technisch interessierter Fernsehteilnehmer heraus entstanden. In leicht verständlicher, klarer Form wird der Laie in die Geheimnisse der Fernsehempfangstechnik eingeführt, ohne dass irgendwelche Vorkenntnisse nötig sind. Die zahlreichen, guten Abbildungen machen dem Leser auch relativ komplizierte Zusammenhänge leicht verständlich.

Im ersten Kapitel werden die Grundlagen der Bildübertragung ausführlich dargelegt und mit der Tonübertragung verglichen. Recht gründlich ist anschliessend die Bildröhre mit ihrem unmittelbaren Zubehör behandelt, wobei auch eine Übersicht der elektro-optischen Probleme der Ablenkung nicht fehlt. In weiteren Kapiteln kommen Rasterschema und Gleichlauf, Zahlen, Perioden und Frequenzen zur Sprache. Mit Hilfe von Blockschemas wird der Empfänger stufenweise in einzelne Funktionsgruppen zerlegt. Abschliessend erörtert der Verfasser Fragen rund um den Fernsehempfänger, wobei besonders die interessanten Bemerkungen über Bildgrösse, Beobachtungsabstand und Fernsehbrillen zu erwähnen sind.

Die Zusammenfassung am Schluss eines jeden Kapitels sowie das ausführliche Stichwortverzeichnis sind besonders nützlich und machen das Bändchen auch als Nachschlagewerk wertvoll. Dieser erste Teil wurde zunächst für den angehenden Fernsehtechniker geschrieben; das gut ausgestattete Bändchen ist aber auch als Nachschlagewerk für den technisch interessierten Fernsehteilnehmer gedacht und kann ausserdem allen jenen, die sich auf dem Gebiete der Fernsehempfangstechnik orientieren möchten, bestens empfohlen werden. *H. Schweizer*

Limann, Otto. Fernsehtechnik ohne Ballast. Einführung in die Schaltungstechnik der Fernsehempfänger. 2. erweiterte Auflage. München, Franzis-Verlag, 1959. 238 S., 280 Abb., Preis Fr. 17.70.

Auslieferung für die Schweiz: Verlag H. Thali & Cie, Hitzkirch (LU).

Das vorliegende Buch wendet sich vor allem an den praktisch tätigen Service-Techniker und gibt im wesentlichen eine

Übersicht der Schaltungstechnik im Fernsehempfänger. Diese hat ja gerade in Deutschland in den letzten Jahren eine rasante Entwicklung erlebt und bereits findet man in neuen Empfängern Feinheiten wie beispielsweise automatische Abstimm- und Helligkeitssteuerungen, wie sie zum Teil sogar im Fernsehland USA fehlen.

Wohl werden in zahlreichen Zeitschriften einzelne Probleme der Schaltungstechnik behandelt, doch sind zusammenfassende Werke für den Service-Techniker noch recht dünn gesät.

«Ohne Ballast» ist natürlich ein relativer Begriff, doch versteht es der Verfasser ausgezeichnet, die wesentlichen Merkmale auch komplizierter Schaltungen so herauszuarbeiten, dass ihre Funktionsweise mit klaren Worten und Begriffen erklärt werden kann. Tatsächlich sind ja auch für den geübten Fachmann die modernen Empfängerschaltungen teilweise unübersichtlich, da aus ökonomischen Gründen oft mehrere Funktionen in den gleichen Schaltelementen überlagert sind. Die besprochenen Schaltbeispiele stammen durchwegs aus gegenwärtig verwendeten Industrieschaltungen, was dem Werk die für den Praktiker so wertvolle Wirklichkeitsnähe gibt. Es ist dem Verfasser gelungen, eine sorgfältige und gleichzeitig dem heutigen Stand der Technik entsprechende Auswahl von Beispielen zu treffen. In der vorliegenden 2. Auflage sind im Kapitel Regel- und Hilfsschaltungen die neuesten Entwicklungen berücksichtigt, ein Nachtrag orientiert schliesslich über den letzten Stand der UHF-Empfangstechnik.

Der Stoff ist systematisch und übersichtlich gegliedert, das Werk ist grundsätzlich gehalten, die elementare Aufgabe der besprochenen Schaltung steht immer im Vordergrund. Obwohl auf Formeln und Mathematik weitgehend verzichtet wird, ist es O. Limann doch gelungen, eine technisch saubere und klare Darstellung der physikalischen Vorgänge zu geben. Dies kommt besonders im Kapitel Hochfrequenzleitungen und Fernsehantennen zum Ausdruck. Erwähnenswert ist das jedem Kapitel beigegebene, reichhaltige Schriftumsverzeichnis.

Im Text zu Bild 1,07 (S. 18) hat sich ein Fehler eingeschlichen und zwar beginnt (2) am Anfang einer Zeile, dagegen (5) in der Mitte einer Zeile. Andere Ungenauigkeiten sind leicht ersichtlich, so steht beispielsweise auf den Seiten 97 und 98 «Lautstärke-regelung», statt Verstärkungsregelung. Der Wert des Buches wird dadurch in keiner Weise geschmälert, es eignet sich ohne weitere Hilfsmittel zum Selbststudium und kann jedem Service-Techniker bestens empfohlen werden. *H. Brand*

Verantwortliche Redaktion W. Schenker (in Vertretung von W. Schiess), Generaldirektion PTT, Bern
Drucksachendienst PTT, Wabern-Bern
Druck und Clichés: Hallwag AG, Bern